研究生数学教学系列(工程硕士)

# 工 程 数 学 基 础


天 津 大 学

曾绍标　韩秀芹　翟瑞彩　编著



科 学 出 版 社

2 0 0 1

## 内 容 简 介

本书共10章,主要介绍线性空间与线性算子,矩阵的相似标准形,赋范空间,有界线性算子与方阵范数,矩阵分析,内积空间与Hermite二次型,代数方程组的解法,插值法与数值逼近,数值积分与数值微分,常微分方程的数值解法.每章末附有习题,书末有参考文献.

本书是专供工程硕士使用的数学教材,也可供大专院校有关专业师生和其他研究人员参考.

**图书在版编目(CIP)数据**

工程数学基础/曾绍标　韩秀芹　翟瑞彩编著 .-北京:科学出版社,2001
(研究生数学教学系列(工程硕士))
ISBN 7-03-009095-0

Ⅰ.工…　Ⅱ.①曾…,②韩…,③翟…　Ⅲ.工程数学,研究生教材
Ⅳ.TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第87503号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2001年7月第　一　版　开本:B5(720×1000)
2001年7月第一次印刷　印张:20 1/2
印数:1—5 000　字数:377 000

**定 价:31.00元**
(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

# 前　　言

为满足我校工程硕士研究生的“工程数学基础”教学需要，我们于 1998 年议定了教学要求和计划，确定了本课程的基本内容．经过三年的教学实践，编写了这本专供工程硕士研究生使用的数学教材．

根据工程硕士的培养目标和我校工程硕士门类齐全的特点，在调查研究的基础上，选取了各专业都必需具备的数学知识和方法以及有助于工程技术人员继续学习的若干近代数学的基本知识作为本书的主要内容．考虑到目前工程硕士生入学时的数学基础，我们将本学科线性代数中的线性空间与线性变换也作为本书的基本内容．

作为工程硕士的数学基础，其主要内容为线性空间与线性算子，赋范空间与有界线性算子，内积空间与正交系，矩阵的相似标准形，矩阵分析，线性方程组的解法，插值与逼近，数值积分与数值微分，常微分方程的数值解法．加“＊”的节是选用的内容．

本书的特点是：从简单的数学、物理模型甚至日常生活事例入手，引出抽象的数学概念，进行简明扼要的推理，得出重要的数学理论，列举大量的例题以加深对抽象概念和理论的理解，着重讲清常用方法的数学原理及注意事项，尽可能指出当前使用的最新方法，选择旨在巩固基本内容的适量习题．

本书的第一、三、四、六章由曾绍标执笔，第二、五、七章由韩秀芹执笔，第八、九、十章由翟瑞彩执笔．韩秀芹对全书的行文风格进行了协调统一，并对部分章节做了修改．

本书由毛云英教授主审．在编写过程中得到了天津大学研究生院领导及培养处的大力支持．编写时参考了由熊洪允、曾绍标、毛云英编著的《应用数学基础》一书．对此，我们一并表示衷心的感谢．

限于我们的学术水平和教学经验，书中的错误在所难免，恳请广大读者批评指正．

编著者
（天津大学）

# 目　　录

# 第一章　线性空间与线性算子

本章首先介绍现代数学的两个基本概念——集合与映射，然后引入贯穿全书的极为重要的概念——线性空间，最后介绍定义在线性空间上的一类重要映射——线性算子.

## §1.1　集合与映射

本节除重点介绍集合与映射的概念和基本性质外，还要介绍本书经常使用的一些术语和记号，以后直接引用时不再加以说明.

### 一、集合及其运算

1.集合概念　集合是数学的最基本、最原始的概念之一，因此不可能用其他数学概念对集合下一个严格的定义，只能像几何学中对于“点”、“直线”那样，给以直观的描述.

所谓“集合”是指具有某种确定的性质(或满足一定条件)的“事物”的全体.集合也可简称为集.构成某集合的每一个“事物”都称为该集合的一个元素(简称为元).例如，中国的所有直辖市就是集合，北京、上海、天津和重庆都是这个集合的元素；又如，自然数的全体也是一个集合，它的元素就是一个个的自然数.

为简单起见，通常用大写字母 $A,B,\cdots$代表集合，以小写字母 $a,b,\cdots$代表元素.设 $A$ 是一个集合，若“事物”$x$ 是 $A$ 的元素，则记为 $x\in A$(读作 $x$ 属于 $A$)，若 $x$ 不是 $A$ 的元素，则记为 $x\notin A$ 或 $x\overline{\in} A$(读作 $x$ 不属于 $A$).

将一个集合明确地表示出来的方法一般有两种，即列举法和描述法.

如果某集合 $A$ 的所有元素都能列举出来，那么就将它们写在大括号内(并用逗号隔开)来表示集合 $A$，这种方法就是列举法.例如，{北京，上海，天津，重庆}，$\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$，$A=\{a,b\}$.

如果某集合 $A$ 是由满足条件(或具有性质)$p(x)$的所有 $x$ 构成的，则可将集合 $A$ 表示为$\{x\mid p(x)\}$(或$\{x:p(x)\}$).例如，可用 $A=\{x\mid x^2=1\}$表示方程 $x^2=1$ 的解集合(显然，$A$ 也可表示为$\{-1,1\}$)，单位圆可表示为$\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$.

在理解集合概念时，应注意以下几点：

(1)一个给定集合的元素所具有的性质(或满足的条件)必须是明确的.例

如,条件“$x\leqslant 1$ 的全体实数”是明确的,“$x\gg 1$ 的全体实数”是不明确的,因此,前者是集合而后者不是集合.这就是说,对于任意的 $x$ 及给定的集合 $A$,要么 $x\in A$,要么 $x\notin A$,二者必居其一,且只居其一.

(2)集合中的各元素必须是彼此能够分辨的、互异的.因此,在用列举法表示集合时,其中的元素不能重复出现,例如,应将$\{a,a,b,c,c\}$写为$\{a,b,c\}$.

(3)集合中的各元素没有先后次序之分.例如$\{1,2,3,4\}$和$\{1,3,4,2\}$及$\{4,1,2,3\}$等表示的是同一个集合.

由有限个元素构成的集合称为**有限集**.特别地,将仅含有一个元素的集合叫做**单元素集**或**单点集**,必须理解元素 $x$ 和集合$\{x\}$的原则上的区别.将不含任何元素的集合称为**空集**,记为$\varnothing$.正如把 0 也算作一个数一样,将空集当作集合在数学上是有益的.由于空集的元素个数为 0,因此将空集也算作有限集.不是有限集的集合称为**无限集**.

2.常用记号的说明　在本书中,以下几个集合的记号是专用的:

$\varnothing$——空集;

$N$　　　　$N=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$;

$Z$　　　　$Z=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$;

$Q$

$R$　　　　$R=(-\infty,+\infty)$;

$C$

$$C=\{a+b\mathrm{i}\mid \mathrm{i}=\sqrt{-1},a,b\in R$$

$C[a,b]$——在闭区间$[a,b]$上连续的全体函数的集合;

$R^{m\times n}$——全体 $m\times n$ 实矩阵构成的集合;

$C^{m\times n}$——全体 $m\times n$ 复矩阵构成的集合.

此外,用 $Q^{+}(Q^{-})$表示全体正(负)有理数构成的集合,用 $R^{+}(R^{-})$表示全体正(负)实数构成的集合.

为了简化叙述常采用下面的符号:设 $p,q$ 是任意两个命题,$x$ 是任意的“事物”,则

(1)$p\Rightarrow q$ 表示 $p$ 蕴涵 $q$,亦即 $p$ 是 $q$ 的充分条件,或 $q$ 是 $p$ 的必要条件;

(2)$p\Leftrightarrow q$ 表示 $p$ 与 $q$ 等价,亦即 $q$ 是 $p$ 的充要条件;

(3)$\forall x$ 表示对于任意的 $x$ 或一切 $x$;

(4)$\exists x$ 表示存在一个 $x$,亦即至少有一个 $x$;

(5)$\exists | x$ 表示存在惟一的一个 $x$;

(6)s.t.表示“使得”或“能使”或“满足”.

例如,闭区间上连续函数的最大值定理采用上述符号可表示为

$$\forall f\in C[a,b]\Rightarrow \exists x_0\in[a,b],\text{s.t.}f(x_0)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x).$$

3.集合的包含关系与子集

**定义 1.1**　设 $A,B$ 是任意集合.

(1)若 $\forall x\in A\Rightarrow x\in B$,则称 $A$ 含于 $B$(或 $B$ 包含 $A$),记为 $A\subset B$(或 $B\supset A$),并称 $A$ 是 $B$ 的**子集**;

(2)若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 $A$ 与 $B$ **相等**(即 $A$ 与 $B$ 是完全相同的两个集合),记为 $A=B$;否则称 $A$ 与 $B$ 不相等,记为 $A\neq B$;

(3)若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$,则称 $A$ 是 $B$ 的**真子集**,记为 $A\subsetneqq B$.

由定义可知,对于任意集合 $A,B,C$ 下列结论成立:

(1)$\varnothing\subset A$,即空集是任何集合的子集;

(2)$x\in A\Leftrightarrow\{x\}\subset A$;

(3)$A\subset A$,即集合间的包含关系"$\subset$"具有自反性;

(4)$A\subset B$ 且 $B\subset C\Rightarrow A\subset C$,即包含关系"$\subset$"具有传递性.

4.集合的运算　在某一个问题中,所讨论的一切"事物"构成的集合称为基本集合(或全集),它必须是非空的,记为 $X$.此问题中的所有集合都是基本集合的子集.例如,在单元函数微积分中 $R$

间是基本集合.

**定义 1.2**　设 $X$ 是基本集合,$A,B\subset X$.

(1)集合 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$称为 $A$ 与 $B$ 的交集,即 $A\cap B$(可读作 $A$ 交 $B$)是由 $A$ 与 $B$ 的公共元素构成的集合;

(2)集合 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$称为 $A$ 与 $B$ 的并集,即 $A\cup B$(可读作 $A$ 并 $B$)是由 $A$ 的所有元素与 $B$ 的所有元素构成的集合;

(3)集合 $A\setminus B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$称为 $A$ 与 $B$ 的差集,即 $A\setminus B$(可读作 $A$ 差 $B$ 或 $A$ 减 $B$)是由属于 $A$ 而不属于 $B$ 的元素构成的集合;

(4)集合 $A^C=X\setminus A$ 称为 $A$ 关于基本集合 $X$ 的余集,简称为 $A$ 的余集或补集;

可以借助文(Venn)氏图来直观地解释集合的交、并、差、补的运算及其他有关概念.图 1.1(a,b,c,d)中的阴影部分分别表示 $A\cap B,A\cup B,A\setminus B$ 和 $A^C$.

关于集合的运算,显然有

(1)$A\cap B\subset A,A\cap B\subset B,A\subset A\cup B,B\subset A\cup B,A\setminus B\subset A$;

(2)$A\cap\varnothing=\varnothing,A\cup\varnothing=A,A\cap X=A,A\cup X=X$;

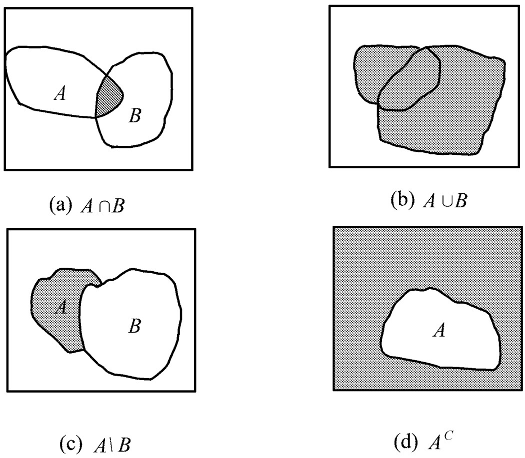
(3)$A\cup A^C=X,A\cap A^C=\varnothing,(A^C)^C=A$;

(4)$X^C=\varnothing,\varnothing^C=X$;

(5)$A\setminus B=A\cap B^C$;

(6)$A\subset B\Leftrightarrow A^C\supset B^C$;

(7)若 $A\cap B=\varnothing$(此时称 $A$ 与 $B$ 不相交),则 $A\subset B^C$ 且 $B\subset A^C$.




(a) $A\cap B$　(b) $A\cup B$

(c) $A\setminus B$　(d) $A^C$

图 1.1

**定理 1.1**　设 $X$ 是基本集合，$A,B,C\subset X$，则集合的运算服从以下规律：

(1) $A\cap A=A$，$A\cup A=A$；　　(幂等律)

(2) $A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$；　　(交换律)

(3) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$，

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；　　(结合律)

(4) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；　　(分配律)

(5) $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$，

$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$.　　(对偶原理)

**证**　此处只证明后一个分配律和前一个对偶原理(亦称 De Morgan 公式)，其余的证明作为练习留给读者自己完成.

(1)记 $V=A\cup(B\cap C)$，$W=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，要证 $V=W$，只需证明 $V\subset W$且 $W\subset V$ 即可.

因为 $\forall\ x\in V=A\cup(B\cap C)\Rightarrow x\in A$ 或 $x\in B\cap C\Rightarrow x\in A$ 或$\begin{cases} x\in B\\ x\in C\end{cases}\Rightarrow$ $\begin{cases} x\in A \text{ 或 } x\in B\\ x\in A \text{ 或 } x\in C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\in(A\cup B)\\ x\in(A\cup C)\end{cases}\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)=W$，所以 $V\subset W$.

另一方面，$\forall\ x\in W=(A\cup B)\cap(A\cup C)\Rightarrow x\in A\cup B$，且 $x\in A\cup C\Rightarrow$ $\begin{cases} x\in A \text{ 或 } x\in B\\ x\in A \text{ 或 } x\in C\end{cases}\Rightarrow$当 $x\in A$ 时，显然有 $x\in A\cup(B\cap C)=V$；当 $x\notin A$ 时，必有 $x\in B$ 且 $x\in C$，即 $x\in B\cap C\subset A\cup(B\cap C)=V$.故 $W\subset V$.

(2)因为 $x\in(A\cap B)^C\Leftrightarrow x\notin A\cap B\Leftrightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B\Leftrightarrow x\in A^C$ 或 $x\in B^C\Leftrightarrow x\in A^C\cup B^C$，所以

$$(A\cap B)^C = A^C\cup B^C.$$

下面介绍两个集合的另一种运算——直积,在给出定义之前先看一个实例:设某项工程须分前后两期完成,如果前期有三种实施方案(记为 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$)可选择,后期有两种方案(记为 $B=\{b_1,b_2\}$)可选择,那么完成这项工程的所有可能的实施方案构成一个集合

$$C=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_1),(a_3,b_2)\},$$

其元素是将集合 $A$ 的每一个元素与 $B$ 的各元素按前后次序配成的有序对 $(a_i,b_j)(i=1,2,3;j=1,2)$.

一般地,设 $A,B$ 是任意两个集合,$\forall a\in A,\forall b\in B$ 作有序对 $(a,b)$,其中 $a,b$ 分别称为有序对 $(a,b)$ 的第一坐标和第二坐标,并且规定

$$(a_1,b_1)=(a_2,b_2)\Leftrightarrow a_1=a_2 \text{ 且 } b_1=b_2.$$

我们熟悉的平面上点的坐标就是这样的有序对 $(x,y)$,而空间点的坐标则是有序三元组 $(x,y,z)$.

**定义 1.3**　设 $A$ 和 $B$ 是任意两个集合.有序对构成的集合 $\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$ 称为 $A$ 与 $B$ 的**直积**或笛卡儿(Descartes)乘积,记为 $A\times B$(可读作 $A$ 叉 $B$),$A$ 与 $B$ 分别称为 $A\times B$ 的第一坐标集和第二坐标集.

实例中的集合 $C$ 就是集合 $A$ 与 $B$ 的直积,即 $C=A\times B$.

一般说来,$A\times B\neq B\times A$,即直积不满足交换律,但由定义可知 $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$.当 $A=B$ 时,可将 $A\times A$ 缩记为 $A^2$,例如坐标平面是两个实数轴 $R$ 　　　　　　$R^2$ 表示,即 $R^2=R\times R$

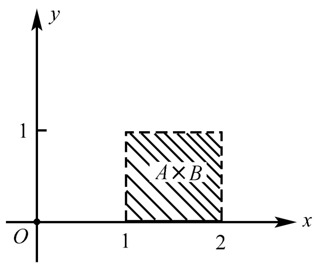



图 1.2

**例 1.1**　设 $A=(1,2)$,$B=[0,1)$,则 $A\times B=\{(x,y)\mid 1<x<2,0\leqslant y<1\}$ 是如图 1.2 所示的正方形.

对于任意有限多个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,可以同两个集合一样来定义它们的交、并、直积的运算,即

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i = A_1\cap A_1\cap\cdots\cap A_n$$

$$=\{x\mid \forall i\in\{1,2,\cdots,n\},\text{有 } x\in A_i\};$$

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i = A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$$

$$=\{x\mid \exists i\in\{1,2,\cdots,n\},\text{s.t. } x\in A_i\};$$

$$\prod_{i=1}^{n}A_i = A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$$

$$=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\},$$

其中$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是有序 $n$ 元组，$x_i$ 是它的第 $i$ 个坐标，$A_i$ 称为直积 $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$ 的第 $i$ 个坐标集$(i=1,2,\cdots,n)$；$n$ 个 $A$ 的直积可缩记为 $A^n$，例如

$$R^n = \underbrace{R\times R\times\cdots\times R}_{n个} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in R \quad i=1,2,\cdots,n\},$$

$$C^n = \underbrace{C\times C\times\cdots\times C}_{n个} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in C \quad i=1,2,\cdots,n\}.$$

5.集族及其运算　设 $D$ 是一个非空集合，若 $D$ 中的每一个元素 $\alpha$ 都对应基本集合 $X$ 中惟一的子集 $A_\alpha$，则将所有 $A_\alpha$ 构成的集合称为 $X$ 的以 $D$ 为指标集的集族，简称集族，记为$\{A_\alpha \mid A_\alpha\subset X, \alpha\in D\}$或$\{\mathrm{A}_\alpha\}_{\alpha\in D}$.当 $D=N$ 为集列，简记为$\{A_n\}$.

同样可定义集族(即一族集合)$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$的交、并的运算，即

$$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}的交 \bigcap_{\alpha\in D} A_\alpha \equiv \{x \mid \forall\, \alpha\in D 有 x\in A_\alpha\},$$

$$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}的并 \bigcup_{\alpha\in D} A_\alpha \equiv \{x \mid \exists\, \alpha\in D, \mathrm{s.t.}\ x\in A_\alpha\};$$

并且遵从定理 1.1 所列的运算规律，例如$\left(\bigcap\limits_{\alpha\in D} A_\alpha\right)^C = \bigcup\limits_{\alpha\in D} A_\alpha^C$ 等等.

## 二、映射及其性质

在这一段里，我们来建立两个集合的元素间的一种对应关系——映射.

1.映射的基本概念

**定义 1.4**　设 $X, Y$ 是两个非空集合.若存在一个对应法则(或规律)$f$，使得对每一个 $x\in X$，都存在惟一的 $y\in Y$ 与之对应，则称 $f$ 是从 $X$ 到 $Y$ 的**映射**，记为

$$f: X\to Y, \quad 或\ f: x\longmapsto y \quad (x\in X).$$

$y$ 称为 $x$ 在映射 $f$ 下的**像**，记为 $y=f(x)$或 $y=fx$.集合 $X$ 称为映射 $f$ 的**定义域**，记为 $\mathscr{D}(f)$，即 $\mathscr{D}(f)=X$. $Y$ 的子集 $f(X)=\{f(x) \mid x\in X\}$称为映射 $f$ 的**值域**，记为$\mathscr{R}(f)$.

若 $A\subset X$，则称 $Y$ 的子集 $f(A)=\{f(x) \mid x\in A\}$是集合 $A$ 在映射 $f$ 下的像.

若 $B\subset Y$，则称 $X$ 的子集 $f^{-1}(B)=\{x\in X \mid f(x)\in B\}$是集合 $B$ 在映射 $f$ 下的**逆像**(或原像)；$Y$ 中单元素集$\{y\}$在映射 $f$ 下的逆像 $f^{-1}(\{y\})$就称为元素 $y$ 在映射 $f$ 下的逆像，简记为 $f^{-1}(y)$，即 $f^{-1}(y)=\{x\in X \mid f(x)=y\}$.

应当注意的是：此处无论 $f^{-1}(B)$还是 $f^{-1}(y)$都是一个整体，是一个集合的记号；而且集合 $f^{-1}(y)$不一定是单元素集；当然它们都可能是空集.

当 $Y$ 是数集(如 $Y\subset R$　　$Y\subset C$　　　　　　$f$ 为集合 $X$ 上的泛函；当 $X, Y$ 都是数集时，映射 $f$ 就是以前学习过的函数.

**例 1.2** 设有集合 $X=\{a,b,c,d\}$，$Y=\{1,2,3,4,5\}$，今定义 $f:X\to Y$ 使得 $f(a)=2$，$f(b)=3$，$f(c)=5$，$f(d)=3$. 试求 $\mathscr{R}(f)$，$f(\{a,d\})$，$f^{-1}(\{2,3\})$，$f^{-1}(3)$，$f^{-1}(1)$.

**解** $\mathscr{R}(f)=\{2,3,5\}$，

$f(\{a,d\})=\{2,3\}$，

$f^{-1}(\{2,3\})=\{a,b,d\}$，

$f^{-1}(3)=\{b,d\}$，

$f^{-1}(1)=\varnothing$.

称映射 $f:X_1\to Y_1$ 与 $g:X_2\to Y_2$ 相等（记为 $f=g$），如果它们的对应法则相同且定义域相等，即

$$f=g\Leftrightarrow X_1=X_2=X \text{ 且 } \forall x\in X, f(x)=g(x).$$

2. 映射的基本性质

* **定理 1.2** 设有 $f:X\to Y$，则 $\forall A,B\in X$，$\forall C,D\in Y$，有

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$；

(2) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$；

(3) $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$；

(4) $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$；

(5) $f^{-1}(D^C)=[f^{-1}(D)]^C$，

其中 $D^C=Y\setminus D$，$[f^{-1}(D)]^C=X\setminus f^{-1}(D)$. 此定理的证明留给有兴趣的读者作为练习完成，并注意(2)不能改为等式.

3. 几种重要的映射

**定义 1.5** 设有映射 $f:X\to Y$.

(1) 若 $\mathscr{R}(f)=Y$，即 $\forall y\in Y$，$\exists x\in X$，s.t. $y=f(x)$，则称 $f$ 是**满射**，或称 $f$ 是从 $X$ 到 $Y$ 上的映射.

(2) 若 $\forall y\in\mathscr{R}(f)$，$\exists|\, x\in X$，s.t. $f(x)=y$，则称 $f$ 是**单射**，或称 $f$ 是从 $X$ 到 $Y$ 的一一映射.

(3) 若 $f$ 既是单射又是满射，则称 $f$ 为**双射**，或称 $f$ 是从 $X$ 到 $Y$ 上的一一映射.

由定义立即可知，$f$ 为单射的充要条件是：$\forall x_1,x_2\in X$，当 $x_1\neq x_2$ 时 $f(x_1)\neq f(x_2)$；因此单调函数显然是单射.

当 $f:X\to Y$ 是双射时，$f$ 在集合 $X$ 与 $Y$ 的元素之间建立了一对一的对应关系，故今后也把双射叫做一一对应.

例 1.2 中的映射不是单射[因为 $f(b)=f(d)$]，也不是满射[因为 $f^{-1}(1)=\varnothing$]，从而不是双射.

**例 1.3** 以 $I(x)=x(\forall x\in X)$ 定义的映射 $I:X\to X$，称为集合 $X$ 上的**恒等映射**或单位映射，简记为 $I_X$. 显然 $I_X$ 是双射.

**例 1.4**　以 $f(x)=y_0(\forall x\in X)$定义的映射 $f: X\to Y$ 称为**常值映射**.显然,常值映射当 $X$ 不是单元素集时,不是单射;当 $Y$ 不是单元素集时不是满射,因为$\mathscr{R}(f)=\{y_0\}\neq Y$.

**例 1.5**　设 $A$ 是非空集合,若 $\forall n\in N\quad a_n\in A$,则得到一个无穷序列,记为$\{a_n\}=(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$.由$\{a_n\}$所确定的映射 $f: N\to A$(即 $a_n=f(n)$)一般说来不是单射,也不是满射.

4.逆映射与复合映射

**定义 1.6**　若 $f: X\to Y$ 是单射,则 $\forall y\in\mathscr{R}(f)$,由关系式 $f(x)=y$ 确定了惟一的 $x\in X$ 与之对应,于是就定义了一个从$\mathscr{R}(f)$到 $X$ 上的映射,记为 $f^{-1}:\mathscr{R}(f)\to X$,并称 $f^{-1}$是 $f$ 的**逆映射**.

定义表明:$f: X\to Y$ 存在逆映射的充要条件是 $f$ 为单射,且 $f^{-1}:\mathscr{R}(f)\to X$ 必定是满射;当 $f$ 是双射时,$f$ 的逆映射为 $f^{-1}: Y\to X$.易知恒等映射的逆映射就是它本身.

**定义 1.7**　设有映射 $f: X\to Y$ 和 $g: Y\to Z$,将 $X$ 到 $Z$ 的映射 $x\longmapsto g(f(x))(\forall x\in X)$称为 $f$ 与 $g$ 的复合映射,记作 $g\circ f: X\to Z$,即 $(g\circ f)x=g(f(x))(\forall x\in X)$.

**定理 1.3**

(1)若 $f: X\to Y$ 是双射,则 $f^{-1}: Y\to X$ 也是双射;且 $f^{-1}\circ f=I_X$,$f\circ f^{-1}=I_Y$,即 $\forall x\in X$,$\forall y\in Y$ 有$(f^{-1}\circ f)(x)=x$,$(f\circ f^{-1})(y)=y$;

(2)若 $f: X\to Y$ 和 $g: Y\to Z$ 都是单射(或满射),则 $g\circ f: X\to Z$ 也是单射(或满射);

(3)若 $f: X\to Y$ 和 $g: Y\to Z$ 都是双射,则 $g\circ f: X\to Z$ 也是双射,且 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

**证**

(1)$f^{-1}: Y\to X$ 显然是双射,下证 $f^{-1}\circ f=I_X$.$\forall x\in X$,令 $f(x)=y$,因为

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x,$$

所以

$$f^{-1}\circ f=I_X.$$

同理可证

$$f\circ f^{-1}=I_Y.$$

(2)$\forall x_1,x_2\in X$ 且 $x_1\neq x_2$,因 $f$ 是单射,于是 $f(x_1)\in Y$,$f(x_2)\in Y$,且 $f(x_1)\neq f(x_2)$;又因为 $g$ 是单射,所以

$$(g\circ f)(x_1)=g(f(x_1))\neq g(f(x_2))=(g\circ f)(x_2),$$

即 $g\circ f: X\to Z$ 是单射.

(3)由(2)即知 $g\circ f$ 是双射,从而$(g\circ f)^{-1}: Z\to X$ 存在. $\forall z\in Z$,因$(g\circ f)^{-1}$是双射,故 $\exists | x\in X$, s.t. $(g\circ f)^{-1}(z)=x$,即$(g\circ f)(x)=g(f(x))=z$.若记$f(x)=y$,则 $g(y)=z$.又因为 $f,g$ 都是双射,因而可逆,故 $y=g^{-1}(z)$, $x=f^{-1}(y)$.于是$(f^{-1}\circ g^{-1})(z)=f^{-1}(g^{-1}(z))=f^{-1}(y)=x=(g\circ f)^{-1}(z)$对任意 $z\in Z$成立,所以$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

5.可数集

**定义 1.8** 设 $A$ 是无限集,若存在一个双射 $f: N\to A$,则称 $A$ 是**可数集**或可列集;不是可数的无限集称为不可数集.

**例 1.6** 证明:集合 $A$ 是可数的,当且仅当 $A$ 的所有元素可以排成一个各项互不相同的无穷序列,即

$$A_n=(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)\quad(\text{且当 } i\neq j \text{ 时 } a_i\neq a_j).$$

**证** 因为 $f: n\longmapsto a_n\in A_n(\forall n\in N$

此结论表明,若无限集合的全体元素能用自然数来编号,则必定是可数的.

利用定义及例 1.6 的结论,不难知道全体正偶数的集合是可数的,$Z$

数集.

将可数多个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的交集记为$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$,并集记为$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

关于可数集的运算有如下结论.

**定理 1.4**

(1)可数集的子集是可数集或有限集;

(2)有限多个或者可数多个可数集的并是可数集;

(3)有限多个可数集的直积是可数集.

**证**

(1)显然.

(2)有限多个的情况容易证明(请读者完成),现证可数多个的情况.

设有可数多个可数集 $A_n=(a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nm},\cdots)(n\in N$ $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 是可数集.为此先将它们的所有元素排成表 1.1,再按表中箭头所指的顺序将它们的所有元素排成序列

$$(a_{11},a_{12},a_{21},a_{31},a_{22},a_{13},a_{14},a_{23},\cdots),$$

然后从中删去重复的元素,得到一个各项互异的无穷序列,故$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 是可数集.

**表　1.1**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$: | $a_{11}$ | ↗ | $a_{12}$ | | $a_{13}$ | ↗ | $a_{14}$ | $\cdots$ |
| | | ↙ | | ↗ | | ↙ | | |
| $A_2$: | $a_{21}$ | | $a_{22}$ | | $a_{23}$ | | $a_{24}$ | $\cdots$ |
| | ↓ | ↗ | | ↙ | | | | |
| $A_3$: | $a_{31}$ | | $a_{32}$ | | $a_{33}$ | | $a_{34}$ | $\cdots$ |
| | | ↙ | | | | | | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $A_n$: | $a_{n1}$ | | $a_{n2}$ | | $a_{n3}$ | | $a_{n4}$ | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |

(3)只需证明两个集合的情况.设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots)$, $B=(b_1,b_2,\cdots,b_j,\cdots)$,则

$$A\times B=\{(a_i,b_j)\mid a_i\in A,b_j\in B,(i,j=1,2,\cdots)\}$$

的所有元素可排成各项互异的无穷序列:

$$((a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_1),(a_3,b_1),(a_2,b_2),(a_1,b_3),(a_1,b_4),\cdots),$$

故 $A\times B$ 是可数集.

**例 1.7**　证明 $Q$

**证**　若令 $A_q=\{\frac{1}{q},\frac{2}{q},\frac{3}{q},\cdots\}(q\in N$　　$A_q$ 为可数集,于是由定理 1.3, $Q^+=\bigcup_{q=1}^{\infty}A_q$ 是可数集;同理可知 $Q^-$ 是可数集.所以 $Q=Q^+\cup\{0\}\cup Q^-$ 是可数集.

应当注意的是,不可数集是大量存在的,例如 $R$　　$R$
零的区间都是不可数的.显然若 $A(\subset B)$是不可数集,则 $B$ 一定是不可数集.

## 三、数域,实数集的确界

1.数域

**定义 1.9**　设 $K$　　　$K$　　　$a,b\in$
$K$

$$a\pm b\in K\quad ab\in K\quad a/b\in K\quad b\neq 0),$$

则称 $K$

由定义立即可知 $Q$　$R$　$C$
域;而 $N$　$Z$　$R^+$ 等都不是数域.显然任何数域都必定含有 0 和 1 这两个数,因此必定包含有理数域,即 $Q$
数集.本书只在实数域或复数域上讨论问题,在不必区分的时候,将以 $K$
数域,即 $K=R$　　$K=C$

2.实数集的确界　在给出"确界"定义之前,回忆一下非空实数集 $A$ 的有

界性和上、下界的概念是必要的.

设 $A\subset R$ $A\neq\varnothing$，若 $\exists\ M>0$, s.t. $\forall\ x\in A$，有 $|x|\leqslant M$，则称 $A$ 是有界数集；否则，称 $A$ 是无界数集.若 $\exists\ b\in R$ s.t. $\forall\ x\in A$，有 $x\leqslant b$，则称实数集 $A$ 有上界，数 $b$ 称为 $A$ 的一个上界；若 $\exists\ a\in R$ s.t. $\forall\ x\in A$，有 $x\geqslant a$，则称实数集 $A$ 有下界，数 $a$ 称为 $A$ 的一个下界.易知 $A\subset R$ $A$ 既有上界，又有下界.

显然，如果 $A\subset R$

(小)者.那么，是否存在最小(大)的上(下)界呢？回答是肯定的.下面先给出最小(大)上(下)界的精确定义，然后给出“确界存在原理”.

**定义 1.10** 设 $A\subset R$ $A\neq\varnothing$.

(1)若 $\mu\in R$

① $\forall\ x\in A$，有 $x\leqslant\mu$，

② $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ x_\varepsilon\in A$, s.t. $x_\varepsilon>\mu-\varepsilon$，

则称 $\mu$ 是 $A$ 的**上确界**，记为 $\sup\{x\mid x\in A\}$ 或 $\sup\ A$；

(2)若 $\nu\in R$

① $\forall\ x\in A$，有 $x\geqslant\nu$，

② $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ x_\varepsilon\in A$, s.t. $x_\varepsilon<\nu+\varepsilon$，

则称 $\nu$ 是 $A$ 的**下确界**，记为 $\inf\{x\mid x\in A\}$ 或 $\inf\ A$.

由定义可知，实数集的上(下)确界必定是它的一个上(下)界，因此无上(下)界的实数集 $A$ 必定不存在上(下)确界.但为方便起见，有时也说 $A$ 的上(下)确界是正(负)无穷大，即

$$\sup\ A=+\infty\quad(\inf\ A=-\infty).$$

**例 1.8** 写出下列实数集的确界：

$$A=[0,1),\ B=(-1,2)\cup\{\mathrm{e}\},\ N\quad R$$

**解** $\inf A=0, \sup A=1$；

$\inf\ B=-1, \sup\ B=\mathrm{e}$；

$\inf\ N=1, \sup\ N=+\infty$(不存在)；

$\inf\ R=-\infty$(不存在)，$\sup\ R=+\infty$(不存在).

应当注意 $A$ 的上(下)确界 $\sup\ A(\inf\ A)$ 和 $A$ 的最大值 $\max\ A(\min\ A)$ 之间的区别与联系.此外，容易证明：若 $\sup\ A$ 或 $\inf\ A$ 存在，则 $\sup\ A$ 或 $\inf\ A$ 必定是惟一的.

**确界存在原理** 任何非空有上(下)界的实数集必有上(下)确界.

确界存在原理是对实数系 $R$

精确的描述.所谓 $R$ $R$

一对应，从而是没有间隙，即连续的，$R$

以用若干个等价命题来表述，以其中任何一个作为公理，都可以推出其他结

论.我们采用确界存在原理作为公理来建立本书的理论体系.

3.单调有界准则　利用确界存在原理容易证明下面的单调有界准则.

**定理 1.5**　单调增(减)有上(下)界的实数列$\{x_n\}$必收敛,且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in N}\{x_n\}\left(\inf_{n\in N}\{x_n\}\right).$$

**证**　因为$\{x_n\}$有上界,由确界存在原理,实数集$\{x_n \mid n\in N$ $\sup\limits_{n\in N}\{x_n\}$,记为 $\mu$.于是$\forall\,\varepsilon>0$,由上确界定义知,$\exists\, N\in N$ s.t. $x_N\in\{x_n \mid n\in$ $N$

$$\mu-\varepsilon< x_N.$$

又因为$\{x_n\}$单调增,故当 $n>N$ 时,恒有

$$\mu-\varepsilon< x_N\leqslant x_n\leqslant\mu<\mu+\varepsilon,$$

即$|x_n-\mu|<\varepsilon$,所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\mu=\sup\limits_{n\in N}\{x_n\}$.

同理可证单调减的情况.

4.两个重要的不等式　在这一节的末尾,我们不加证明地给出两个不等式.

**Hölder 不等式**　设 $p>1$, $q>1$ 且$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$　($p$, $q$ 称为相伴数),则$\forall\,(x_1,x_2,\cdots,x_n),(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in K^n$,Hölder 不等式

$$\sum_{k=1}^{n}\left|x_k y_k\right|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\left|y_k\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

成立.

类似地有级数形式和积分形式的 Hölder 不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k y_k\right|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\qquad\text{(只要级数收敛)},$$

$$\int_a^b\left|x(t)y(t)\right|\mathrm{d}t\leqslant\left(\int_a^b\left|x(t)\right|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_a^b\left|y(t)\right|^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}$$

(只要积分有意义).

当 $p=q=2$ 时,Hölder 不等式就是 Cauchy 不等式.由 Hölder 不等式容易得到下面的 Minkowski 不等式.

**Minkowski 不等式**　设 $1\leqslant p<+\infty$,则有

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k\pm y_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{m}\left|y_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}(m\in N\qquad\infty),$$

$$\left(\int_a^b\left|x(t)+y(t)\right|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_a^b\left|x(t)\right|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b\left|y(t)\right|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}.$$

# §1.2 线性空间概念

## 一、线性空间定义及例子

我们知道,几何空间 $R^3$ 中的任意两个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 可以相加,其和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 仍是 $R^3$ 中的向量,即 $R^3$ 对于加法运算是封闭的;同样,$R^3$ 对于数量与向量的乘法也是封闭的,即 $\forall\ \lambda\in R$ $\quad \boldsymbol{a}\in R^3$,有 $\lambda\boldsymbol{a}\in R^3$.并且加法具有交换律、结合律,数乘具有结合律与分配律等.将其推广到一般集合上就得到线性空间的概念.

**定义 1.11** 设 $X$ 是非空集合,$K$ $\quad$ $K=R$ $\quad C$ $\quad$ +”:$X\times X\rightarrow X$ 为 $(x,y)\longmapsto x+y\in X$,称为 $X$ 上的加法,$x+y$ 称为元素 $x$ 与 $y$ 的和;定义映射“.”:$K\times X\rightarrow X$ 为 $(\lambda,x)\longmapsto \lambda x\in X$,称为 $X$ 上的数乘,$\lambda x$ 称为数 $\lambda$ 与元素 $x$ 的积.如果 $X$ 上的加法与数乘满足加法公理

(1) $\forall\ x,y\in X$,有 $x+y=y+x$, (交换律)

(2) $\forall\ x,y,z\in X$,有 $(x+y)+z=x+(y+z)$, (结合律)

(3) $\forall\ x\in X$,$\exists\, 0\in X$,s.t. $x+0=x$,称 0 为 $X$ 的零元素,
(零元素的存在性)

(4) $\forall\ x\in X$,$\exists\ u\in X$,s.t. $x+u=0$,称 $u$ 为 $X$ 的负元素,记为 $-x$,即 $x+(-x)=0$, (负元素的存在性)

与数乘公理

(5) $\forall\ \lambda,\mu\in K$ $\quad x\in X$,有 $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$, (结合律)

(6) $\forall\ \lambda\in K$ $\quad x,y\in X$,有 $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$,
(关于 $X$ 的加法的分配律)

(7) $\forall\ \lambda,\mu\in K$ $\quad x\in X$,有 $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$,
(关于数的加法的分配律)

(8) $\forall\ x\in X$,有 $1x=x$,

则称 $X$ 是**数域 $K$ 上的线性空间**,简称为线性空间或向量空间.$X$ 中的元素也称为向量,满足上述八条公理的加法和数乘运算统称为**线性运算**.

当 $K=R$ $\quad X$ 为实线性空间,当 $K=C$ $\quad X$ 为复线性空间.

**例 1.9** 实线性空间 $R^n$ 与复线性空间 $C^n$.

$\forall\ x=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$,$y=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T\in R^n(C^n)$,及 $\forall\ \lambda\in R$ $\quad C$ $\quad$ 定义加法与数乘为

$$x+y=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^T,$$

$$\lambda x=(\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n)^T,$$

显然,$x+y\in R^n(C^n)$,$\lambda x\in R^n(C^n)$.又由实(复)数的运算律可知 $R^n(C^n)$ 上的加法与数乘运算满足公理(1),(2),(5),(6),(7)和(8);$0=(0,0,\cdots,0)^T$

是 $R^n$（$C^n$）的零元素，$-x=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)^T$ 是 $x$ 的负元素，即也满足公理(3)和(4).因此 $R^n$ 是实线性空间(其中 $R$　$R^2$，$R^3$ 分别是数直线、坐标平面和几何空间)，$C^n$ 是复线性空间.

**例 1.10**　实线性空间 $R^{m\times n}$.

$\forall\ A=[a_{ij}],B=[b_{ij}]\in R^{m\times n}$ 及 $\forall\ \lambda\in R$　$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$，$\lambda A=[\lambda a_{ij}]_{m\times n}$，显然有 $A+B,\lambda A\in R^{m\times n}$.由矩阵的运算规律知 $R^{m\times n}$ 上的加法和数乘满足公理(1)～(8)(其中零矩阵 $O_{m\times n}$ 是 $R^{m\times n}$ 的零元素，$-A=[-a_{ij}]\in R^{m\times n}$)，于是 $R^{m\times n}$ 按照上述的线性运算是一个实线性空间.

只要将 $R^{m\times n}$ 改为 $C^{m\times n}$，$R$　　$C$　　$C^{m\times n}$ 是一个复线性空间.当 $m=n$ 时，就得到由 $n$ 阶实或复方阵构成的线性空间 $R^{n\times n}$ 或 $C^{n\times n}$　.

**例 1.11**　连续函数空间 $C[a,b]$.

按照通常函数的加法及数与函数的乘法，即 $\forall\ f,g\in C[a,b]$，$\forall\ \lambda\in K$ 规定 $f+g$ 为 $(f+g)(x)=f(x)+g(x)(\forall\ x\in[a,b])$，$\lambda f$ 为 $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)(\forall\ x\in[a,b])$，则由连续函数的运算性质可知 $C[a,b]$ 是线性空间(称为连续函数空间)，零函数 $0(0(x)=0,\forall\ x\in[a,b])$ 是 $C[a,b]$ 的零元素.

读者不难验证：由零多项式(即数 0)和所有次数不超过 $n$ 的多项式构成的集合 $P_n[a,b]$，按照 $C[a,b]$ 上的线性运算也是一个线性空间；同样，$P[a,b]$(由全体多项式构成的集合)也是一个线性空间.

**例 1.12**　由线性齐次微分方程解的结构知，常系数线性齐次微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的解集合，按上例中的线性运算是一个线性空间；而非齐次方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的解集合按上述线性运算不构成线性空间，因为它对加法和数乘都不封闭.

由定义容易证明线性空间的如下性质：

(1)零元素是惟一的；

(2)任何元素的负元素是惟一的；

(3)$0x=0,\lambda 0=0,(-\lambda)x=-(\lambda x)=\lambda(-x)$；

(4)$\lambda x=0\Rightarrow\lambda=0$ 或 $x=0$.

下面再举几个线性空间的例子.

**例 1.13**　有界数列空间 $l^\infty$，收敛数列空间 $c$ 以及 $l^2$ 空间.

全体有界实(或复)数列 $x=\{\xi_k\}$ 构成的集合记为 $l^\infty$，全体收敛实(或复)数列 $x=\{\xi_k\}$ 构成的集合记为 $c$，全体满足条件 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2<+\infty$ 的实(或复)数列 $x=\{\xi_k\}$ 构成的集合记为 $l^2$，显然 $c$ 与 $l^2$ 均为 $l^\infty$ 的子集.

$\forall\ x=\{\xi_k\},y=\{\eta_k\}\in l^\infty$ 及 $\forall\ \lambda\in R$　$C$

$$x+y=\{\xi_k+\eta_k\}=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_k+\eta_k,\cdots),$$

$$\lambda x = \{\lambda\xi_k\} = (\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \cdots, \lambda\xi_k, \cdots).$$

易知，$x+y\in l^{\infty}$，$\lambda x\in l^{\infty}$. 又由实(或复)数的运算规律知，上面定义的加法和数乘满足加法公理和数乘公理，因此 $l^{\infty}$ 是实(或复)线性空间，称为有界数列空间. 零数列 $0=(0,0,\cdots,0,\cdots)$ 是 $l^{\infty}$ 的零元素，$x=\{\xi_k\}$ 的负元素为 $-x=\{-\xi_k\}$.

如同在 $l^{\infty}$ 上那样定义 $c$ 上的加法和数乘，且满足定义 1.11 中的八条公理，再由收敛数列的运算性质可知，$c$ 对加法和数乘是封闭的，所以 $c$ 是线性空间，称为收敛数列空间.

以类似的方式定义 $l^2$ 上的线性运算，显然 $l^2$ 对数乘是封闭的，由 $p=2$ 时的 Minkowski 不等式知，$l^2$ 对加法也是封闭的，故 $l^2$ 是线性空间.

线性空间定义中的加法和数乘都是一个映射，不一定与我们熟悉的加法和乘法有什么关系，只要它们满足八条公理就是线性运算，而一个非空集合对它们是封闭的，则就是一个线性空间，请看下面的例 1.14.

**例 1.14**　$\forall\ a,b\in R^{+}$ 及 $\forall\ k\in R$　　　　$a\oplus b=ab$，数乘为 $k\otimes a=a^k$. 显然 $a\oplus b\in R^{+}$，$k\otimes a\in R^{+}$，且

(1) $a\oplus b=ab=ba=b\oplus a$；

(2) $(a\oplus b)\oplus c=(ab)\oplus c=(ab)c=a(bc)=a\oplus(bc)=a\oplus(b\oplus c)$；

(3)存在 $R^{+}$ 中的元素 1，使得 $a\oplus 1=a\cdot 1=a$，故 1 是 $R^{+}$ 的零元素；

(4)因为 $a\oplus\dfrac{1}{a}=a\ \dfrac{1}{a}=1$(零元素)，故 $a$ 有负元素 $\dfrac{1}{a}$；

(5) $(k+l)\otimes a=a^{k+l}=a^k a^l=a^k\oplus a^l=(k\otimes a)\oplus(l\otimes a)(\forall\ l\in R$

(6) $k\otimes(a\oplus b)=k\otimes(ab)=(ab)^k=a^k b^k=a^k\oplus b^k=(k\otimes a)\oplus(k\otimes b)$；

(7) $k\otimes(l\otimes a)=k\otimes a^l=(a^l)^k=a^{kl}=kl\otimes a$；

(8) $1\otimes a=a^1=a$，

即“$\oplus$”与“$\otimes$”是线性运算. 因此，$R^{+}$ 对于上述的加法和数乘是一个实线性空间.

**例 1.15**　由所有次数为 $n$ 的实(复)系数多项式组成的集合 $V$ 按照例 1.11 中的加法和数乘运算，不构成 $R$　$C$　　　　$V$ 对加法和数乘都不封闭.

**定义 1.12**　设 $X$ 是数域 $K$　　　　$M=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是 $X$ 的有限子集，$\lambda_i\in K$　$i=1,2,\cdots,n)$，称 $X$ 的元素

$$x=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\cdots+\lambda_n x_n$$

是集合 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 的一个**线性组合**，也称元素 $x$ 或向量 $x$ 可由向量集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 线性表示(或表出).

例如，$R^3$ 中任一向量 $x=(a_1,a_2,a_3)^T$ 都可由基本向量集

$$\{e_1=(1,0,0)^T, e_2=(0,1,0)^T, e_3=(0,0,1)^T\}$$

线性表示：　$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$.

## 二、线性空间的子空间

**定义 1.13**　设 $X$ 是数域 $K$ 　　的线性空间，$Y$ 是 $X$ 的非空子集，若 $Y$ 对 $X$ 的线性运算也构成一个线性空间，则称 $Y$ 是 $X$ 的一个**线性子空间**，简称为子空间，记为 $Y < X$.

由定义立即可知，对于任意的线性空间 $X$，必有 $X < X$ 和 $\{0\} < X$，并称 $X$ 和 $\{0\}$ 是 $X$ 的平凡子空间，$X$ 的其余子空间称为非平凡子空间.

由例 1.11 及 1.13 知：$P[a,b] < C[a,b]$，$P_n[a,b] < C[a,b]$，$c < l^{\infty}$.

**定理 1.6**　设 $X$ 是 $K$ 　　　　　$Y$ 是 $X$ 的非空子集，则 $Y$ 为 $X$ 的子空间的充要条件是：$Y$ 对 $X$ 的线性运算（加法和数乘）是封闭的.

**证**　必要性是显然的，否则 $X$ 的线性运算不能成为 $Y$ 上的线性运算，下面证明充分性.

由于 $Y$ 是 $X$ 的（非空）子集，显然满足公理(1)，(2)，(5)，(6)，(7)，(8)，故只需验证(3)和(4)，即要证明 $0 \in Y$ 且 $\forall y \in Y$ 有 $(-y) \in Y$. 事实上，$\forall y \in Y$，由条件得 $0y = 0 \in Y$，$(-1)y = -y \in Y$. 因此 $Y$ 是 $X$ 的子空间.

**例 1.16**　齐次线性方程组 $Ax = 0$ ( $A \in R^{n\times n}$，$x \in R^n$ ) 的解集合 $W = \{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T \mid Ax = 0\}$ 是 $R^n$ 的一个线性子空间.

**例 1.17**　$V = \{A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}) \mid a_{ii} \in R \quad i = 1, 2, \cdots, n\}$ 是 $R^{n\times n}$ 的线性子空间.

**例 1.18**　$R^2$ 中任何过原点的直线都是它的子空间，$R^3$ 中任何过原点的直线和平面都是其子空间.

由定理 1.6 易知：线性空间 $X$ 的任意一族子空间的交仍是 $X$ 的子空间；两个子空间 $Y_1$ 与 $Y_2$ 的和 $Y_1 + Y_2 = \{x + y \mid x \in Y_1, y \in Y_2\}$ 仍是子空间；但是两个子空间的并，却不一定是子空间，例如 $Ox$ 轴 $R_1 = \{(x, 0) \mid x \in R$ 　$Oy$ 轴 $R_2 = \{(0, y) \mid y \in R$ 　　　$R^2$ 的子空间，但 $R_1 \cup R_2$ 不是 $R^2$ 的子空间，因为 $R_1 \cup R_2$ 对 $R^2$ 的加法不封闭.

**定义 1.14**　设 $X$ 是数域 $K$ 　　　　　　$M$ 是 $X$ 的非空子集. 由 $M$ 的所有有限子集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ ( $n \in N$

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \quad (\forall \lambda_i \in K \quad i = 1, 2, \cdots, n)$$

构成的集合，称为由 $M$ 生成（或张成）的子空间，记为 $\mathrm{span}\, M$.

例如，$\mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3\} = R^3$；又如 $\mathrm{span}\{1, t, t^2\} = P_2[a, b]$.

**例 1.19**　证明 $\mathrm{span}\, M$ 是 $X$ 的包含 $M$ 的最小子空间.

**证**　因为

(1) 显然 $\mathrm{span}\, M \supset M$；

(2) 易知 $\mathrm{span}\, M$ 对 $X$ 的线性运算是封闭的，从而 $\mathrm{span}\, M$ 是 $X$ 的子空间；

(3)若 $Y$ 是 $X$ 的包含 $M$ 的任意子空间,则

$$\forall\ x \in \operatorname{span} M,\ \exists\ x_1, x_2, \cdots, x_n \in M \subset Y,\ \exists\ \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in K \quad \text{s.t.}$$

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \in Y,$$

即 $\operatorname{span} M \subset Y$;

所以 $\operatorname{span} M$ 是 $X$ 的包含 $M$ 的最小子空间,亦即

$$\operatorname{span} M = \bigcap \left\{ Y \,\middle|\, Y < X \text{ 且 } Y \supset M \right\}.$$

由 $M$ 张成的线性子空间也称为 $M$ 的线性包,并记为 $L(M)$.

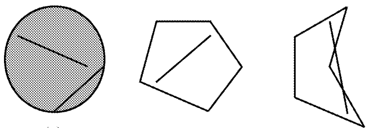
## *三、凸集

**定义 1.15**　设 $C$ 是 $X$ 的非空子集,若 $\forall\ x, y \in C$,连接 $x$ 与 $y$ 的"线段" $\lambda x + (1-\lambda) y\ (0 \leqslant y \leqslant 1)$ 均在 $C$ 中,即

$$\left\{ \lambda x + (1-\lambda) y \,\middle|\, x, y \in C, \lambda \in [0,1] \right\} \subset C,$$

则称 $C$ 是 $X$ 中的**凸集**.

显然,线性空间的每一个子空间都是凸集. $R^2$ 中的圆盘及凸多边形所围区域都是 $R^2$ 的凸集[图 1.3(a)与(b)是凸集,(c)不是凸集].



(a)　　(b)　　(c)

图 1.3

容易证明凸集的下列性质:

(1)若 $C_1, C_2$ 是线性空间 $X$ 的凸集,则 $\forall\ a, b \in K$

$$aC_1 + bC_2 \equiv \left\{ ax + by \,\middle|\, x \in C_1, y \in C_2 \right\}$$

也是 $X$ 的凸集;

(2)若 $C_\alpha\ (\alpha \in D)$是线性空间 $X$ 的凸集,且 $\bigcap\limits_{\alpha \in D} C_\alpha \neq \varnothing$,则 $\bigcap\limits_{\alpha \in D} C_\alpha$ 也是 $X$ 的凸集;

(3)若 $M$ 是线性空间 $X$ 的子集,则所有包含 $M$ 的凸集的交

$$\bigcap \left\{ C \,\middle|\, C \text{ 是 } X \text{ 中的凸集且 } C \supset M \right\}$$

是 $X$ 中包含 $M$ 的最小凸集,并称之为 $M$ 的凸包,记为 $\operatorname{co} M$. 可以证明

$$\operatorname{co} M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,\middle|\, x_i \in M, \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, n \in N \right.$$

即 $\operatorname{co} M$ 是由 $M$ 的全体有限子集的所有凸组合

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \qquad (\lambda_i \geqslant 0 \text{ 且 } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1)$$

构成的集合.

**定义 1.16**　设 $X$ 是数域 $K$　　$K \subset X$.若 $\forall\, x \in K$ 及 $\forall\, \lambda \geqslant 0$ 均有 $\lambda x \in K$,则称 $K$ 是 $X$ 中的一个**锥**;若 $K$ 还是 $X$ 中的凸集,则称 $K$ 是 $X$ 中的**凸锥**.

显然,线性子空间一定是锥,也是凸锥.

不难证明:

(1) $K$ 是 $X$ 中的凸锥的充要条件是:$\forall\, x, y \in K$ 及 $\forall\, \lambda, \mu \geqslant 0$ 有 $\lambda x + \mu y \in K$;

(2)包含集合 $M(\subset X)$的所有锥(凸锥)的交仍是锥(凸锥),并称之为 $M$ 的锥包(凸锥包).

## §1.3　线性空间的基与维数

### 一、集合的线性相关性

**定义 1.17**　设 $X$ 是数域 $K$　　$x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是 $X$ 的有限子集.

若

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0,$$

仅当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ 时成立,则称集合$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是**线性无关的**,也称元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是线性无关的;若集合$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$不是线性无关的,就称它是**线性相关的**.

$\forall\, M \subset X$,若 $M$ 的任意有限子集都是线性无关的,则称 $M$ 是线性无关集,否则称 $M$ 是线性相关集.

由定义立即可知下列结论是成立的.

(1)$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是线性相关的充要条件是:存在一组不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in K$

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0;$$

(2)若 $M$ 有一个子集线性相关,则 $M$ 必定线性相关;

(3)若 $0 \in M$,则 $M$ 线性相关;

(4)空集是线性相关的;

(5)单元素集$\{x\}$线性无关的充要条件是 $x \neq 0$;

(6)$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$($n \geqslant 2$)是线性相关的充要条件是:其中有一个元素可由其余 $n-1$ 个元素线性表示.

**例 1.20**　$R^n$($C^n$)中的集合$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$($e_k$ 的第 $k$ 个坐标为 1,其余

坐标全为 0)是线性无关集.

**证**　若令 $\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\cdots+\lambda_n e_n=0$,即

$$\lambda_1(1,0,0,\cdots,0)^T+\lambda_2(0,1,0,\cdots,0)^T+\cdots+\lambda_n(0,0,0,\cdots,1)^T$$
$$=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)^T=(0,0,\cdots,0)^T,$$

则必有 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$,故 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性无关.

**例 1.21**　设 $u_k(t)=t^k(t\in[a,b],k=0,1,2,\cdots)$,试证集合 $S=\{u_0,u_1,u_2,\cdots\}$是 $C[a,b]$中的线性无关集.

**证**　只需证明对任意自然数 $n$,$n+1$ 个多项式

$$u_0,u_1,\cdots,u_n$$

线性无关即可.因为 $\sum_{k=0}^{n}\lambda_k u_k=0$,等价于在$[a,b]$上

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda_k t^k=\lambda_0+\lambda_1 t+\lambda_2 t^2+\cdots+\lambda_n t^n\equiv 0,$$

于是有 $\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$,故 $u_0,u_1,\cdots,u_n$ 线性无关,从而 $S$ 线性无关.

## 二、线性空间的基与维数

**定义 1.18**　设 $X$ 是数域 $K$　　　　　　　　　　$B\subset X$.

若 $B$ 线性无关,且 $\operatorname{span}B=X$,则称 $B$ 是线性空间 $X$ 的一个**基**(或基底).当 $B$ 为有限集时,称 $B$ 是有限基,否则称 $B$ 是无限基.

若 $X$ 具有一个有限基,则称 $X$ 是有限维线性空间,否则称 $X$ 是无限维线性空间.

可以证明,除$\{0\}$外任何线性空间都存在基(证明从略).

**例 1.22**

(1)集合$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是 $R^n(C^n)$的一个基,从而 $R^n(C^n)$是有限维的;

(2)$\{1,t,t^2,\cdots,t^n,\cdots\}$是 $P[a,b]$的一个基,但不是 $C[a,b]$的基.

**证**

(1)由例 1.20 知$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$线性无关,且 $R^n(C^n)$中任意向量都可用$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$线性表示,即

$$\operatorname{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}=R^n(C^n),$$

所以$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是 $R^n(C^n)$的一个基,并称它是 $R^n(C^n)$的标准基.

(2)在例 1.21 中已证明了 $B=\{1,t,t^2,\cdots,t^n,\cdots\}$是线性无关的,又显然 $P[a,b]$的任意元素(任意的多项式)都是 $B$ 中有限多个元素的线性组合,即 $\operatorname{span}B=P[a,b]$,所以 $B$ 是 $P[a,b]$的基.然而,任何有限多个多项式构成的集合都不能生成 $P[a,b]$,因此 $P[a,b]$不存在有限基,故是无限维的.

因为不是 $C[a,b]$中的所有元素都可以由 $B$ 的有限个元素线性表示出

来,例如 $\sin t$,$e^t$ 等都不能表示为一个多项式,因此 $B$ 不是 $C[a,b]$的基.

显然$\{1,t,t^2,\cdots,t^n\}$是 $P_n[a,b]$的一个基,并称它为 $P_n[a,b]$的自然基.不难证明:集合

$$B=\{1,t-t_0,(t-t_0)(t-t_1),\cdots,(t-t_0)(t-t_1)\cdots(t-t_{n-1})\}$$

也是 $P_n[a,b]$的一个基,其中 $t_0,t_1,\cdots,t_{n-1}$是$[a,b]$上互不相同的任意 $n$ 个点.这说明一个线性空间的基不是惟一的.

**定理 1.7** 若 $X$ 是有限维线性空间,则 $X$ 的每一个有限基所含元素的个数相同.

**证** 设 $B,S$ 是 $X$ 的任意两个有限基,分别含有 $n$ 个和 $m$ 个元素.因为 $B$ 线性无关且 $\operatorname{span}B=X$,于是所含元素个数多于 $n$ 的每一个集合都是线性相关的,而集合 $S$ 线性无关,因此有 $m\leqslant n$.在以上证明中互换 $S$ 与 $B$ 的位置就有 $n\leqslant m$.所以 $m=n$.

**定义 1.19** 若有限维线性空间 $X$ 的基含有 $n$ 个元素,则称正整数 $n$ 是 $X$ 的维数,记为 $\dim X=n$,规定 $\dim\{0\}=0$.若 $X$ 是无限维的,可记为 $\dim X=+\infty$.

例如,$R^n$($C^n$)是 $n$ 维的,$P_n[a,b]$是 $n+1$ 维的.

**例 1.23** 设

$$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},$$

则容易验证$\{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}\}$是 $R^{2\times2}$($C^{2\times2}$)的一个基,并且 $\dim R^{2\times2}=4$($\dim C^{2\times2}=4$).

一般地,若以 $E_{ij}$表示第 $i$ 行第 $j$ 列元素为 1,其余元素均为 0 的 $n$ 阶方阵,则集合$\{E_{ij}\mid i,j=1,2,\cdots,n\}$是 $R^{n\times n}$($C^{n\times n}$)的基,因此 $\dim R^{n\times n}=n^2$($\dim C^{n\times n}=n^2$).

## 三、元素的坐标

设 $X$ 是 $n$ 维线性空间,$B$ 是 $X$ 的一个基.若将基元素按某种次序排列为 $e_1,e_2,\cdots,e_n$,则以有序 $n$-元组$(e_1,e_2,\cdots,e_n)$记之,即基 $B=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$不仅表示 $B$ 由元素 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 组成,而且基元还按从 $e_1$ 到 $e_n$ 的次序排列.今后总假设基元的次序是排定了的.

**定义 1.20** 设 $X$ 是 $K$ $\dim X=n$.$(e_1,e_2,\cdots,e_n)$是 $X$ 的一个基.$\forall x\in X$,$\exists|(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\in K^n$,s.t.

$$x=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n.$$

称有序 $n$ 元数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$为元素 $x$ 关于基$(e_1,e_2,\cdots,e_n)$的**坐标**,或在基$(e_1,e_2,\cdots,e_n)$下的坐标,其中 $a_i$($i=1,2,\cdots,n$)称为 $x$ 关于基($e_1,e_2$,

$\cdots, e_n$)的第 $i$ 个坐标.

例如,$R^n$($C^n$)的任意元素$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T$ 在标准基下的坐标就是它本身.

由定义,一个元素在给定基下的坐标是惟一确定的;反之,在给定基$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$下,对于任意给定的$(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in K^n$,$\exists | x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n \in X$ 与之对应.因此在给定基下,$X$ 的元素与 $K^n$ 的元素是一一对应的.但要注意,同一元素在不同基下的坐标,一般是不相同的.

**例 1.24** $P_2[a, b]$中的元素 $p(t) = 1 + 3t^2$ 在基$(1, t, t^2)$下的坐标为$(1, 0, 3)^T$;易知$(1, 1+t, 1+t+t^2)$也是 $P_2[a, b]$的基,而它在基$(1, 1+t, 1+t+t^2)$下的坐标为$(1, -3, 3)^T$.

数域 $K$ $n$ 维线性空间 $X$,通过它的一个基 $B$ 与线性空间 $K^n$ 的元素之间建立了一一对应的关系,故有时将 $x \in X$ 直接用它的坐标表示为

$$x =_B (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)^T,$$

或在不至于引起混淆的情况下,就表示为

$$x = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)^T.$$

不仅如此,$X$ 与 $K^n$ 还有相同的线性结构.

**例 1.25** 设 $X$ 是 $K$ $n$ 维线性空间,$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$是 $X$ 的一个基.$\forall x, y \in X, \forall \lambda \in K$ $x, y$ 在$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$下的坐标分别为$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T$ 和$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)^T$,则 $x + y$ 和 $\lambda x$ 在基$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$下的坐标分别为$(\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \cdots, \xi_n + \eta_n)^T$ 和$(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \cdots, \lambda\xi_n)^T$.

**证** 因为

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n, \quad y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \cdots + \eta_n e_n,$$

所以

$$\begin{aligned} x + y &= (\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n) + (\eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \cdots + \eta_n e_n) \\ &= (\xi_1 + \eta_1) e_1 + (\xi_2 + \eta_2) e_2 + \cdots + (\xi_n + \eta_n) e_n, \\ \lambda x &= \lambda(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n) \\ &= (\lambda\xi_1 e_1 + \lambda\xi_2 e_2 + \cdots + \lambda\xi_n e_n), \end{aligned}$$

即 $x + y$ 和 $\lambda x$ 在基$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$下的坐标分别为

$$(\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \cdots, \xi_n + \eta_n)^T$$

和

$$(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \cdots, \lambda\xi_n)^T.$$

数域 $K$ $n$ 维线性空间 $X$ 与线性空间 $K^n$ 之间的这种关系称为**同构**,或称 $X$ 与 $K^n$ 是线性同构的.

# §1.4　线性算子及其矩阵表示

## 一、线性算子及其性质

**定义 1.21**　设 $X$ 和 $Y$ 都是数域 $K$ $T: X\to Y$ 满足条件：

(1) $T(x_1+x_2)=Tx_1+Tx_2 \quad (\forall x_1, x_2\in X)$,

(2) $T(\lambda x)=\lambda Tx \quad (\forall \lambda\in K \quad x\in X)$,

则称 $T$ 是**线性算子**.

线性空间 $X$ 到自身的线性算子 $\sigma$,也称为 $X$ 上的线性变换;线性空间 $X$ 到数域 $K$ $f$,称为 $X$ 上的**线性泛函**.

由定义立即可知,线性空间 $X$ 上的恒等映射 $I$ 是一个线性变换.

**例 1.26**　容易验证:线性空间 $X$ 到 $Y$ 的零算子

$$O: x \longmapsto 0 (\forall x \in X)$$

是线性算子.

**例 1.27**　若 $T: R^2\to R^3$ 的定义为:$\forall x=(\xi_1,\xi_2)^T\in R^2$,

$$Tx = T[(\xi_1,\xi_2)^T]=(\xi_1,\xi_1-\xi_2,\xi_1+\xi_2)^T,$$

则 $T$ 是线性算子.

**证**　$\forall x=(\xi_1,\xi_2)^T\in R^2$, $\forall y=(\eta_1,\eta_2)^T\in R^2$ 及 $\forall \lambda\in R$

因为

$$\begin{aligned}
T(x+y)&= T[(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2)^T]\\
&=(\xi_1+\eta_1,\xi_1+\eta_1-\xi_2-\eta_2,\xi_1+\eta_1+\xi_2+\eta_2)^T\\
&=(\xi_1,\xi_1-\xi_2,\xi_1+\xi_2)^T+(\eta_1,\eta_1-\eta_2,\eta_1+\eta_2)^T\\
&= Tx+Ty,\\
T(\lambda x)&= T[(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2)^T]=(\lambda\xi_1,\lambda\xi_1-\lambda\xi_2,\lambda\xi_1+\lambda\xi_2)^T\\
&=\lambda(\xi_1,\xi_1-\xi_2,\xi_1+\xi_2)^T=\lambda Tx,
\end{aligned}$$

所以 $T$ 是线性算子.

**例 1.28**　线性空间 $X$ 到 $Y$ 的映射 $T: X\to Y$ 是线性的充要条件为 $\forall x_1$, $x_2\in X$及 $\forall \lambda,\mu\in K$　都有

$$T(\lambda x_1+\mu x_2)=\lambda Tx_1+\mu Tx_2.$$

**证**　必要性. $\forall x_1, x_2\in X$ 及 $\forall \lambda,\mu\in K$　　$T$ 是线性的,所以有

$$T(\lambda x_1+\mu x_2)=T(\lambda x_1)+T(\mu x_2)=\lambda Tx_1+\mu Tx_2.$$

充分性.在 $T(\lambda x_1+\mu x_2)=\lambda Tx_1+\mu Tx_2$ 中,取 $\lambda=\mu=1$ 得

$$T(x_1+x_2)=Tx_1+Tx_2;$$

取 $\mu=0$ 并记 $x_1=x$ 得

$$T(\lambda x) = \lambda Tx.$$

**例 1.29** 证明：$\forall f \in C[a,b]$，由变上限定积分

$$(Tf)(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad (\forall x \in [a,b])$$

定义的映射 $T: C[a,b] \to C[a,b]$是线性算子.

**证** $\forall f, g \in C[a,b]$及$\forall \lambda, \mu \in R$

$$\begin{aligned}[T(\lambda f + \mu g)](x) &= \int_a^x (\lambda f + \mu g)(t)\mathrm{d}t = \int_a^x [\lambda f(t) + \mu g(t)]\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \mu \int_a^x g(t)\mathrm{d}t = \lambda(Tf)(x) + \mu(Tg)(x) \\ &= [\lambda T(f) + \mu T(g)](x)\end{aligned}$$

对任意的 $x \in [a,b]$成立，所以

$$T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g),$$

即 $T$ 是线性的.

**例 1.30** 由矩阵 $A = [a_{ij}] \in C^{m \times n}$ 确定的映射 $T: C^n \to C^m$ 为

$$Tx = Ax \in C^m \quad (\forall x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T \in C^n)$$

是线性算子.

**证** $\forall x, y \in C^n$ 及$\forall \lambda, \mu \in C$

$$T(\lambda x + \mu y) = A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay = \lambda Tx + \mu Ty,$$

即 $T: C^n \to C^m$是线性的.

由定义容易推出线性算子的基本性质.

**定理 1.8** 设 $X$ 和 $Y$ 都是 $K$ $T: X \to Y$ 是线性算子.

(1) $T(0) = 0$, $T(-x) = -T(x)$ ($\forall x \in X$);

(2) $T\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(x_i)$;

(3)若$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是 $X$ 中的线性相关集，则

$$\{T(x_1), T(x_2), \cdots, T(x_n)\}$$

是 $Y$ 中的线性相关集，反之不真.

**证**

(1)在定义式中分别取 $\lambda = 0$, $\lambda = -1$ 即得.

(2)由例 1.28 及数学归纳法即可得证.

(3)因为$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$线性相关，故存在一组不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in K$ 使得

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0,$$

于是得

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) = T(0) = 0,$$

即

$$\lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2) + \cdots + \lambda_n T(x_n) = 0,$$

所以$\{T(x_1), T(x_2), \cdots, T(x_n)\}$在 $Y$ 中线性相关.

反之不真,即线性算子可能将线性无关集映成线性相关集,见例 1.31.

**例 1.31**　$R^3$ 中的投影算子

$$P:(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \longmapsto (\xi_1, \xi_2)^T \in R^2$$

显然是线性的.集合$\{e_1, e_2, e_3\} \subset R^3$ 线性无关,但

$$\{P(e_1), P(e_2), P(e_3)\} = \{(1,0)^T, (0,1)^T, (0,0)^T\} \subset R^2$$

却是线性相关的.

**定理 1.9**　设 $X$ 和 $Y$ 是 $K$　　　　$T: X \to Y$ 是线性算子,则 $T$ 的零空间(或称为 $T$ 的核)

$$\mathscr{N}(T) = T^{-1}(0) = \{x \in X \mid Tx = 0\} \quad (\text{或记为 } \ker T)$$

和 $T$ 的值域$\mathscr{R}(T) = T(X)$分别是 $X$ 和 $Y$ 的线性子空间.

**证**　先证$\mathscr{N}(T)$是 $X$ 的线性子空间.

因为 $0 \in \mathscr{N}(T)$,故$\mathscr{N}(T)$是 $X$ 的非空子集.又因为$\forall x_1, x_2 \in \mathscr{N}(T)$及$\forall \lambda, \mu \in K$ 有 $Tx_1 = 0, Tx_2 = 0$,从而有

$$T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda T x_1 + \mu T x_2 = 0,$$

即 $\lambda x_1 + \mu x_2 \in \mathscr{N}(T)$,所以$\mathscr{N}(T)$是 $X$ 的线性子空间.

再证$\mathscr{R}(T) = T(X)$是 $Y$ 的线性子空间.

显然$\mathscr{R}(T)$是 $Y$ 的非空子集,又$\forall y_1, y_2 \in \mathscr{R}(T)$及$\forall \lambda, \mu \in K$

$x_1, x_2 \in X$,使得 $Tx_1 = y_1, Tx_2 = y_2$,于是

$$\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda T x_1 + \mu T x_2 = T(\lambda x_1 + \mu x_2) \in T(X) = \mathscr{R}(T),$$

所以$\mathscr{R}(T)$是 $Y$ 的线性子空间.

## * 二、线性算子空间与线性算子的乘积

设 $X, Y$ 是同一数域 $K$　　　　$X$ 到 $Y$ 的全体线性算子的集合记为$\mathscr{L}(X, Y)$.

$\forall T, S \in \mathscr{L}(X, Y)$及$\forall \lambda \in K$　　$T + S$ 为

$$(T + S)(x) = T(x) + S(x) \quad (\forall x \in X);$$

定义 $\lambda T$ 为

$$(\lambda T)(x) = \lambda T(x) \quad (\forall x \in X).$$

容易验证,$\mathscr{L}(X, Y)$是数域 $K$　　　　**线性算子空间**.其中零