21 世纪高等院校教材

理论物理学导论　第一卷

数学物理方法

（第 三 版）

汪德新　编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是在作者的《数学物理方法》(第二版)基础上改写而成,和第二版相比有了很大的变动,反映了数学物理方法近年来的发展.本书逻辑清晰,语言流畅,论证严谨,体现了“深入浅出,学以致用”的宗旨.

本书内容包括复变函数导论、特殊函数与狄拉克δ函数、数学物理方程(用行波法、平均值法、分离变量法、积分变换法、格林函数法、保角变换法和变分法求解数理方程),以及物理学中若干新的数学方法.书中配有大量习题,书末附有习题答案和提示.

本书可作为普通高等院校物理系、电子工程系、应用数学系本科生的教材,也可供相关领域的读者参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/汪德新编著.—3版.—北京:科学出版社,2006
(理论物理学导论;第一卷)
21世纪高等院校教材
ISBN 7-03-017111-X

Ⅰ.数… Ⅱ.汪… Ⅲ.数学物理方法-高等学校-教材 Ⅳ.O411.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第030169号

责任编辑:贾 杨 贾瑞娜 昌 盛/责任校对:张怡君
责任印制:张克忠/封面设计:陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1997年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2001年8月第 二 版 印张:26
2006年8月第 三 版 字数:499 000
2006年8月第一次印刷 印数:1—4 000

定价:32.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈科印〉)

前　　言

数学物理方法包括复变函数论、特殊函数论和数学物理方程等内容，它是讨论物理问题常用的数学方法，更是学习理论物理学和高新科学技术的重要基础.

普通物理学可以说是一门“归纳的学科”，它的数学工具是高等数学.例如，在电磁学中，人们通过电磁现象和实验事实，总结出实验定律.在这个过程中，使用高等数学就足够了.理论物理学是一门“演绎的学科”.例如，在电动力学中，将经典电动力学的三个基本定律（电荷守恒定律、麦克斯韦方程组、洛伦兹力公式）用于研究静电场与静磁场，研究电磁波的传播与电磁波的辐射，研究电磁场与物质的相互作用，等等.在这个过程中，高等数学就无能为力了，必须运用数学物理方法.

随着科学技术的发展，从物理学、宇宙学、量子化学、生物物理……到材料科学；从以智能计算机、网络为主导的信息技术，以超导材料、纳米材料为标志的新材料技术，以核能、太阳能为代表的新能源技术，以基因工程、蛋白质工程为标志的生物技术，……到海洋技术和空间技术，无不以数学物理方法为其重要工具.

本书的宗旨是希望能给初学者提供一本深入浅出、学以致用的入门书.为此，我们作了如下几个方面的努力：

1．本书内容与理论体系

第一篇：复变函数导论.在介绍了复变函数的基本概念之后，着重讨论解析函数的微分性质、积分性质、幂级数展开性质，以及建立在复变函数积分理论和级数理论基础上的留数理论.最后，介绍解析延拓和多值函数的一些基本概念.

第二篇：特殊函数与狄拉克 δ 函数.特殊函数（主要介绍勒让德函数和贝塞尔函数）作为分离变量法的数学工具，我们把它放在数学物理方程的前面.这样，可以使正交曲线坐标系中分离变量法的叙述更加流畅，并通过与直角坐标系中分离变量法的横向对比，更加鲜明地显示出它们在方法上的共同特征.狄拉克 δ 函数是描述点源的重要数学工具，作为预备知识也放在数学物理方程的前面.

第三篇：数学物理方程.本篇将采用行波法、平均值法、分离变量法、积分变换法、格林函数法、保角变换法和变分法求解数学物理方程.

第四篇：数学物理方法的若干新兴分支.本篇用非常浅显的语言介绍了近年来备受关注的“典型非线性方程的孤立波解”、“Z 变换”和“小波变换”这三个专题.

2．学习理论与演练习题的关系

学好数学物理方法的基本概念、基本定理、基本方法，是应用这些方法解决物

理问题的基础.我们努力以清晰的思路为引导,以流畅的语言为载体,通过实例形象地介绍基本概念,努力突出定理证明的中心环节,时时疏理数学思想的来龙去脉,处处展现不同方法的横向对比,认真总结典型题目的解题步骤以求举一反三,努力编纂物理上富有价值的题目以利触类旁通.当然,要把数学物理方法真正学到手,还必须动手计算大量的题目. 为此,我们配备了数百道例题和习题,书末附有习题的答案和部分习题的提示. 如能正确使用它(自己先做题,之后再对照),相信对学生独立工作能力的培养和严谨科学作风的形成,将会发挥积极的作用.

3. 本书没有代替读者作“章节小结”的训练

自己动手作小结对初学者是非常重要的一环.著名数学家华罗庚先生曾说过:

> “应该怎样学会读书呢?”“在对书中每一个问题都经过细嚼慢咽,真正懂得之后,就需要进一步把全书各部分内容串连起来理解,加以融会贯通,从而弄清楚什么是书中的主要问题,以及各个问题之间的关联.这样我们就能抓住统帅全书的基本线索,贯串全书的精神实质.我常常把这种读书过程,叫作‘从厚到薄’的过程. ……愈是懂得透彻,就愈有薄的感觉.这是每个科学家都要经历的过程.”
>
> ——华罗庚《学·思·锲而不舍》

4. 本书中标有 * 号的章节可以留到以后结合后续课程进行学习

本书第一版出版后,作者连续在华中师范大学物理系基地班讲授了 6 届(1996～2001 级).第三版将第二版的两篇改为四篇,大部分章节都作了全面的修改和补充.

本书的顺利出版,得到科学出版社高等教育分社领导和昌盛编辑的大力支持,贾杨和贾瑞娜编辑精益求精的敬业精神,使本书大为增色,在此表示衷心的感谢.本书还得到华中师范大学物理科学与技术学院、物理系领导的关心和支持,在此表示深切的谢意.初稿完成后,华中师范大学理论物理研究生郑华、王美娟、辜姣,2004 级基地班李润泽、毛施君、雷洁梅、陶仕银同学在繁忙学习之余,对打印稿进行了认真细致的校正,并提出了建设性的意见,在此表示诚挚的感谢.在这里,还要感谢李芳电脑培训班的沈惠同学,她一丝不苟的工作作风,保证了本书的排版质量.

在本书的使用过程中,得到华中师范大学和兄弟院校数学物理方法课的各位任课老师的热情支持,在此表示诚挚的感谢!

在本书即将出版之际,我要特别感谢兰州大学物理系汪志诚教授,南京大学天文系汪珍如教授和中国科学院院士、南京大学天文系曲钦岳教授多年来对我的关心和鼓励.感谢作者早年在中山大学求学时的同窗好友朱鹤龄先生的鼎力相助.

由于作者水平所限,加之时间仓促,谬误之处在所难免,恳请读者批评指正.

汪德新

2006 年 1 月 28 日于武昌桂子山

目　　录

第一篇　复变函数导论

第二篇　特殊函数与狄拉克 δ 函数

第三篇 数学物理方程

第四篇　数学物理方法的若干新兴分支

第一篇　复变函数导论

自变量为复数的函数称为复变函数.

本篇讨论复变函数论的基本概念、基本定理和基本方法,以及若干实际运用.解析函数是本篇研究的重点.

第1章介绍复变函数的微分理论.着重讨论解析函数的微分性质及其应用.

第2章介绍复变函数的积分理论.着重讨论解析函数的积分性质及其应用.

第3章介绍复变函数的级数理论.着重讨论解析函数与泰勒(Taylor)级数、洛朗(Laurent)级数的关系及其应用.

第4章介绍留数理论,它是复变函数积分理论与级数理论相结合的产物.本章利用留数定理进行实变积分计算,整数与半整数级数和的计算.

第5章介绍解析延拓与多值函数的一些基本概念.着重讨论扩大解析函数的定义域,以及将多值函数转化为黎曼(Riemann)面上的单值解析函数的问题.

复变函数导论是本书其后三篇的基础.

第 1 章　复变函数与解析函数

本章首先介绍复数与复变函数的基本概念.在此基础上,着重讨论解析函数的定义、充要条件,解析函数的共轭性、调和性和保角性,以及常用的解析函数的性质.

解析函数是本篇各章研究的主要对象.

1.1 复　　数

本节讨论复数的基本概念,复数的几何表示法,复数的代数运算和复数序列的极限.

1.1.1 复数的基本概念

代数方程 $z^2+1=0$ 的根为 $z=\pm\sqrt{-1}$.1777 年瑞士著名数学家和物理学家欧拉(Euler)首次采用记号

$$\mathrm{i}=\sqrt{-1} \tag{1.1.1}$$

并将 i 称为虚数单位.

形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数称为复数.实数 x 与 y 分别称为复数 z 的实部与虚部,记作

$$x=\mathrm{Re}\,z,\qquad y=\mathrm{Im}\,z \tag{1.1.2}$$

若两复数的实部与虚部分别相等:$x_1=x_2$,$y_1=y_2$,则称这两复数相等

$$z_1=z_2 \tag{1.1.3}$$

若两复数的实部相等,虚部差一负号时,则称两复数互为共轭复数.$z=x+\mathrm{i}y$ 的共轭复数为

$$z^*=(x+\mathrm{i}y)^*=x-\mathrm{i}y \tag{1.1.4}$$

1.1.2 复数的几何表示法

复数可以用平面上的点或球面上的点来表示,分别称为复数的平面表示法和球面表示法.

1. 用复平面表示复数

如果在平面中引入笛卡儿直角坐标或平面极坐标,可以得到复数的代数表示、

三角表示和指数表示.

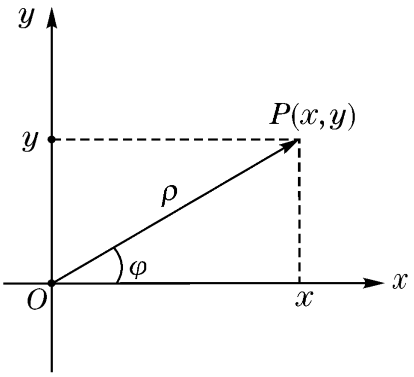


图 1.1

(1) 代数表示.在平面中引入直角坐标系,则复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以用平面上的点 (x,y) 表示.该平面上每一个点与一个复数对应,反之亦然.这样,所有复数与平面上所有的点建立了一一对应关系,平面 xOy 称为复数平面(简称复平面),如图 1.1 所示.

每一个复数还可以用一个矢量来表示.矢量由坐标原点 $O(0,0)$ 指向点 $P(x,y)$,$\overrightarrow{OP}$ 称为复矢量.

(2) 三角表示.在复数平面中引入平面极坐标系,则复平面上的点 (x,y) 可用极坐标表示为

$$x=\rho\cos\varphi,\qquad y=\rho\sin\varphi \tag{1.1.5}$$

利用直角坐标与极坐标的变换,可将复数的代数表示变换为三角表示

$$z=x+\mathrm{i}y=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi) \tag{1.1.6}$$

ρ 和 φ 分别称为复数的模与辐角,记作

$$\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2},\qquad \varphi=\mathrm{Arg}\,z \tag{1.1.7}$$

可以用反正切函数表示复数的辐角(参看习题 1.1.1).由于三角函数的周期性,使得复数的辐角不是唯一的,即

$$\mathrm{Arg}\,z=\varphi_0\pm 2k\pi=\arg z\pm 2k\pi,\qquad k=0,1,2,\cdots \tag{1.1.8}$$

式中 $\varphi_0=\arg z$ 称为辐角的主值.上述性质称为辐角的多值性.辐角主值取值的范围是

$$0\leqslant \arg z<2\pi \tag{1.1.9}$$

当复数 $z=0$ 时,$\arg z$ 没有确定值,说"$z=0$ 的辐角等于多少"是没有意义的.

(3)指数表示.复数的指数表示为

$$z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \tag{1.1.10}$$

利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$ 可以将复数的三角表示变换为指数表示①

$$z=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \tag{1.1.11}$$

2. 用复数球面表示复数　无穷远点

首先,过复平面的原点 O 作一个球面与复平面相切,如图 1.2 所示.过原点 O

---

① 复变函数的泰勒级数在 3.3 节讨论,届时可导出欧拉公式.当然,如果将实变函数的泰勒级数推广到复数,也可以得到欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=1+\frac{\mathrm{i}\varphi}{1!}+\frac{(\mathrm{i}\varphi)^2}{2!}+\frac{(\mathrm{i}\varphi)^3}{3!}+\cdots=\left(1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\cdots\right)+\mathrm{i}\left(\frac{\varphi}{1!}-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}-\cdots\right)$$
$$=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$$

的直径的另一端称为北极 N.然后,作射线 NP 交球面于 P'点.这样,球面上所有的点(除北极点 N 以外)均与复平面上所有的点一一对应,也与全体复数一一对应.因此,可以用球面上的点来表示复数.并把这球面称为复数球面(简称复球面).

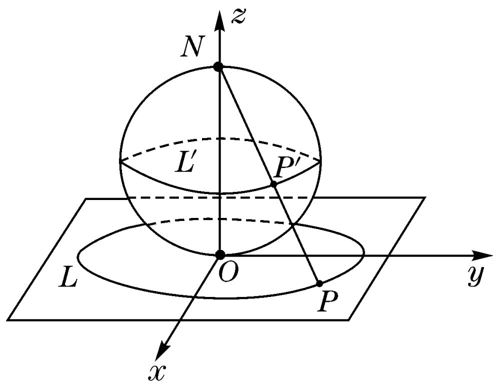


图 1.2

由图 1.2 可见,复平面上圆 L 上的点与复球面纬线 L'上的点对应,圆 L 内部和外部的点分别与纬线 L'下方和上方的点对应.当复平面上圆 L 的半径 $\rho\to\infty$时,复球面上的纬线 L'趋向球顶并缩成一点 N.这样,复平面的无穷远处与复数球的北极点 N 对应.在这个意义上,把复平面的无限远处看成一个"点",称为无穷远点.

1.1.3　复数的代数运算

(1) 加法.复数 z_1 与 z_2 的和定义为

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2) \tag{1.1.12}$$

几何意义:两复矢量之和遵守平行四边形法则,如图 1.3 所示.

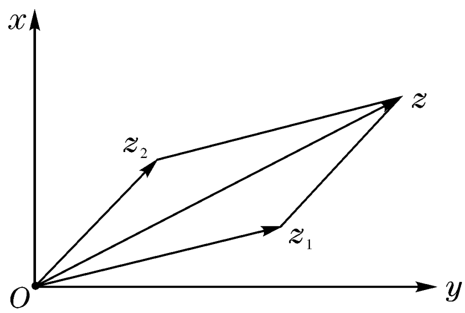


图 1.3

利用"三角形两边长度之和不小于第三边",以及"三角形一边之长度不小于另两边长度之差"可得两个重要不等式

$$|z_1| + |z_2| \geqslant |z_1 + z_2| \tag{1.1.13}$$

$$|z_1 - z_2| \geqslant \big|\,|z_1| - |z_2|\,\big| \tag{1.1.14}$$

式(1.1.13)还可推广为:多个复矢量的模之和不小于多个复矢量之和的模.这些不等式在导出复变函数积分的基本性质时要用到(见 2.1 节).

(2) 减法.复数的减法定义为加法的逆运算.如果 $z+z_2=z_1$,则

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2) \tag{1.1.15}$$

(3) 乘法.复数 z_1 与 z_2 的乘积定义为

$$z = z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + y_1 x_2) \tag{1.1.16}$$

复数乘法采用指数形式更方便,即

$$z = z_1 z_2 = \rho_1 e^{\mathrm{i}\varphi_1} \rho_2 e^{\mathrm{i}\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)} \tag{1.1.17}$$

特别是,两共轭复数的乘积等于它们的模的平方(简称模方)

$$zz^* = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 + y^2 = |z|^2 \tag{1.1.18}$$

(4) 乘方.复数的乘方可由乘法规则得到,复数 z 的整数次幂为

$$z^n = (\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi} \tag{1.1.19}$$

(5) 除法.复数的除法是乘法的逆运算.如果 $zz_2 = z_1$,则

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \tag{1.1.20}$$

同样,复数的除法采用指数式较方便,即

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \tag{1.1.21}$$

(6) 开方.复数的开方是乘方的逆运算,如果 $w^n = z$,则

$$w = \sqrt[n]{z} \tag{1.1.22}$$

令

$$w = \rho e^{i\varphi}, \qquad z = re^{i\theta} \tag{1.1.23}$$

代入 $w^n = z$,得 $\rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta}$,由此得

$$\rho^n = r, \quad n\varphi - \theta = 2k\pi, \qquad k = 0,1,\cdots,n-1 \tag{1.1.24}$$

即

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \qquad k = 0,1,\cdots,n-1 \tag{1.1.25}$$

易见,当 $k=0,1,\cdots,n-1$ 时,式(1.1.25)给出 n 个不同的根.这表明,辐角的多值性是复数开方有多个根的根源.

多值函数将在第 5 章讨论,如无特别声明,第 2～4 章的复变函数均为单值函数.

【例 1.1.1】 试证明棣莫弗(De Moivre)公式

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \tag{1.1.26}$$

并用 $\cos\varphi$ 及 $\sin\varphi$ 表示 $\cos n\varphi$ 及 $\sin n\varphi$.

证明 对于 $|z| = \rho = 1$ 的复数 z,由 z^n 的三角表示与指数表示相等,便有

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = e^{in\varphi} \tag{1.1.27}$$

将欧拉公式 $e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ 代入上式,即得棣莫弗公式.

利用牛顿(Newton)二项式定理展开棣莫弗公式左边,便有

$$\cos n\varphi + i\sin n\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k \sin^k\varphi \cos^{n-k}\varphi$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k n!}{k!(n-k)!} \sin^k\varphi \cos^{n-k}\varphi \tag{1.1.28}$$

由于求和式中 $k=2l$ 的项为实数,$k=2l+1$ 的项为虚数,根据上式两边的实部与虚部分别相等,即得

$$\cos n\varphi = \sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^l n!}{(2l)!(n-2l)!} \sin^{2l}\varphi \cos^{n-2l}\varphi \tag{1.1.29}$$

$$\sin n\varphi=\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^{l}n!}{(2l+1)!(n-2l-1)!}\sin^{2l+1}\varphi\cos^{n-2l-1}\varphi \tag{1.1.30}$$

式中记号

$$\left[\frac{n}{2}\right]=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数}\\ \dfrac{n-1}{2}, & \text{当 } n \text{ 为奇数}\end{cases} \tag{1.1.31}$$

这个记号常用来简化公式的表达,6.1 节将利用它来表示勒让德多项式.

【例 1.1.2】 求 $w=\sqrt[3]{\mathrm{i}}$的值.

解 将 $\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$ 代入,得

$$w=\sqrt[3]{\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)},\qquad k=0,1,2 \tag{1.1.32}$$

这表明,$\sqrt[3]{\mathrm{i}}$有三个不同的根

$$w_0=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}},\qquad w_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5}{6}\pi},\qquad w_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{2}\pi} \tag{1.1.33}$$

1.1.4 复数序列的极限

1. 复数序列

按一定顺序排列的复数 $z_n=x_n+\mathrm{i}y_n$,$n=1,2,\cdots$,称为复数序列,记作$\{z_n\}$.一个复数序列等价于两个实数序列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$的有序组合.

2. 聚点与极限

(1) 聚点.任给 $\varepsilon>0$,存在无穷多个 z_n 满足

$$|z_n-z|<\varepsilon \tag{1.1.34}$$

则称 z 为复数序列$\{z_n\}$的一个聚点.

(2) 极限.任给 $\varepsilon>0$,存在 $N(\varepsilon)>0$,使当 $n>N(\varepsilon)$时,有

$$|z_n-z|<\varepsilon \tag{1.1.35}$$

则称 z 为复数序列$\{z_n\}$的极限,或称复数序列收敛于 z.记作

$$\lim_{n\to\infty}z_n=z \tag{1.1.36}$$

(3) 有的序列可以有多个聚点,当序列的极限存在时,序列的极限是序列的唯一聚点.

例如,实数序列$\{x_n\}$

$$\frac{1}{3},-\frac{2}{4},\frac{3}{5},-\frac{4}{6},\frac{5}{7},-\frac{6}{8},\cdots \tag{1.1.37}$$

就有两个聚点.

在实数序列$\{x_n\}$中，数值最大的聚点称为$\{x_n\}$的上极限，记作$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$；数值最小的聚点称为$\{x_n\}$的下极限，记作$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$，对于序列(1.1.37)，有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n=1,\qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n=-1 \tag{1.1.38}$$

上极限与下极限的概念在计算级数收敛半径时要用到(见 3.2 节)．

3．复数序列极限存在的充要条件——柯西判别法

任给 $\varepsilon>0$，存在自然数 $N(\varepsilon)$，当 $n>N(\varepsilon)$时，对任意正整数 p，有

$$|z_{n+p}-z_n|<\varepsilon \tag{1.1.39}$$

则$\{z_n\}$的极限存在，定理的证明见习题 1.1.7．

4．极限趋于无穷

任给 $M>0$，存在自然数 $N(\varepsilon)$，使当 $n>N(\varepsilon)$时，有

$$|z_n|>M \tag{1.1.40}$$

则$\{z_n\}$趋于无穷，记作

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\infty \tag{1.1.41}$$

习　题　1.1

1.1.1　已知反正切的主值范围为

$$-\frac{\pi}{2}<\arctan\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}$$

试用 $\arctan\dfrac{y}{x}$表示辐角的主值 $\arg z$．

1.1.2　试写出下列复数的三角表示及指数表示．

(1) e^{1+i}；　(2) $1-i\sqrt{3}$；　(3) $1-\cos\alpha+i\sin\alpha, 0\leqslant\alpha\leqslant\pi$；

(4) $(\sqrt{3}+i)^{-3}$；　(5) $\dfrac{2i}{-1+i}$．

1.1.3　设$|b|<1$，$|a|=1$，试证明$\left|\dfrac{a-b}{1-a^*b}\right|=1$．

1.1.4　设复数 z_1, z_2, z_3 满足$\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$，试证

$$|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$$

1.1.5　试证明式(1.1.13)和式(1.1.14)．

1.1.6　试证明

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\varphi=\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\varphi-\sin\dfrac{\varphi}{2}}{2\sin\dfrac{\varphi}{2}};\qquad \sum_{k=1}^{n}\sin k\varphi=\frac{-\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\varphi+\cos\dfrac{\varphi}{2}}{2\sin\dfrac{\varphi}{2}}$$

1.1.7 试利用实数序列极限存在的柯西判别法,证明复数序列极限存在的柯西判别法.

1.1.8 试用 ε-N 的语言证明序列$\left\{\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^n\right\}$的极限为零.

1.1.9 求下列序列的聚点和极限.

(1) $z_n=\left(\frac{3+4\mathrm{i}}{6}\right)^n$; (2) $z_n=(-1)^n\frac{n}{2n+1}$;

(3) $z_n=\frac{\mathrm{i}^{n-1}}{n}$; (4) $z_n=(-1)^n\frac{1}{2n+1}$;

(5) $z_n=\mathrm{i}^{n-1}$; (6) $z_n=n+(-1)^n(2n+1)\mathrm{i}$;

(7) $z_n=\left(1+\frac{\mathrm{i}}{n}\right)\sin\frac{n\pi}{6}$; (8) $z_n=\left(1+\frac{1}{2n}\right)\cos\frac{n\pi}{3}$.

1.2 复变函数 复变函数的极限与连续

本节介绍区域的概念,复变函数的定义及其几何意义,复变函数的极限与连续.

1.2.1 区域

如果将函数的概念由实数域推广到复数域,那么自变量取值的范围就是复平面上的区域(称为定义域),如图 1.4 所示,开区域 D 是指边界线 L 所包围的区域(不含边界线 L).

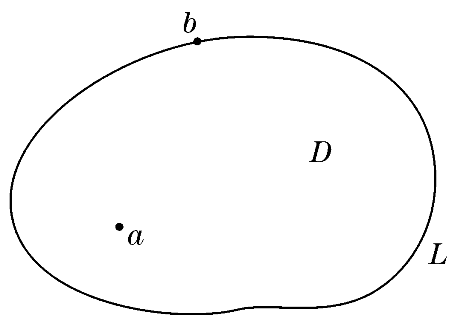


图 1.4

如果要给区域作出严格的定义,则要介绍有关点集(点的集合)的一些基本概念.

(1) 点 z_0 的 ε 邻域.它是指以点 z_0 为圆心,任意小的正实数 ε 为半径的一个开圆,即满足

$$|z-z_0|<\varepsilon \tag{1.2.1}$$

的点的集合.

今后还经常会用到“点 z_0 的无心邻域”的概念(见第 3 章).它是指满足

$$0<|z-z_0|<\varepsilon \tag{1.2.2}$$

的点的集合,与前者的区别就是不包含点 z_0.

(2) 点集 D 的内点.若某点的 ε 邻域中所有的点都属于点集 D,则此点称为点集 D 的内点,如图 1.4 中的 a 点.

(3) 区域.满足如下两个条件的点集 D 称为区域(开区域):

① 每一点都是内点(开集性);

② 点集 D 中的任意两点都可以用一条由该点集 D 的点构成的曲线连接起来(连通性).

区域 D 通常用不等式表示,例如

$$|z| < R \tag{1.2.3}$$

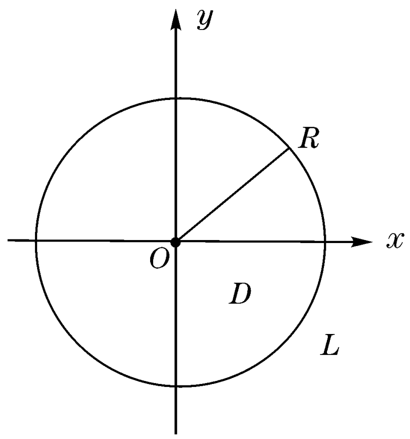


图 1.5

表示以 O 为圆心,R 为半径的开圆,如图 1.5 所示.

(4) 边界点.若某点不属于 D,但其 ε 邻域中含有属于 D 的点,则该点称为 D 的边界点,在图 1.4 的 b 点就是区域 D 的边界点(注意,b 点不属于 D).

边界点的全体就构成边界 L;在图 1.5 中,$|z|=R$ 就是区域 D 的边界线.

(5) 闭区域.开区域 D 加上边界 L 称为闭区域 $\overline{D}$,记作

$$\overline{D} = D + L \tag{1.2.4}$$

例如,开圆 $|z|<R$ 加上边界线 $|z|=R$ 就构成闭圆 $|z|\leqslant R$.

通常还把不包括无穷远点的平面叫作全平面,把包括无穷远点的整个平面称为闭平面.

(6) 单通区域与复通区域.

图 1.6(a),(b),(c)给出的三个区域都具有连通性:区域内的任意两点均可用一根在区域内的曲线把它们连接.但是,它们的边界分别由一根、两根和三根不相连接的闭合曲线构成(图中的斜线部分不属于 D).

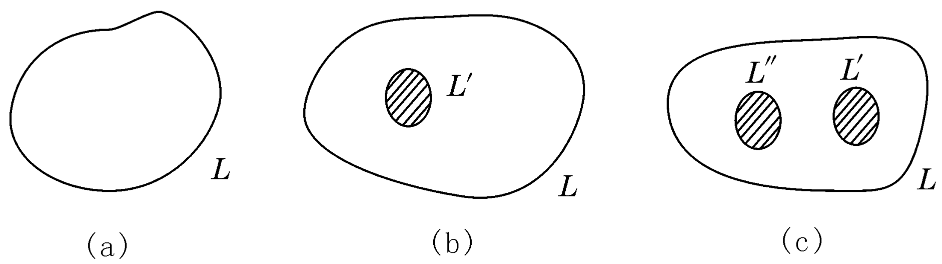


图 1.6

区域不相连接的边界数目称为连通阶数,$n=1$ 的区域称单通区域,$n>1$ 的区域称复通区域.两者的本质区别是:区域中任一闭合曲线能否连续变形而缩成一点."连续变形"是指曲线变形时不跨越不属于 D 的(标有斜线的)区域.

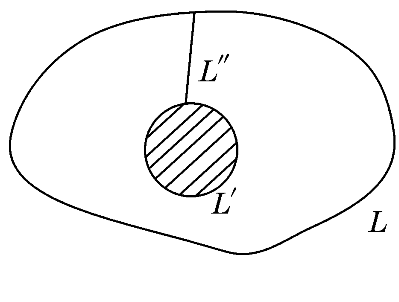


图 1.7

以后常常要将在单通区域成立的定理推广到复通区域,这只要通过作割线(见图 1.7 中的割线 L'')将复通区域割开,变成单通区域即可.

【例 1.2.1】 在复平面上画出下述区域,并指出区域的连通性:

(1) $$1 < |z+\mathrm{i}| < 3 \tag{1.2.5}$$

(2) $$0 < \arg\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} < \frac{\pi}{4} \tag{1.2.6}$$

解 (1) 首先把模的不等式变为关于 x, y 的不等式.将

$$|z+\mathrm{i}| = |x+\mathrm{i}(y+1)| = \sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

代入式(1.2.5)后平方,可得

$$1 < x^2+(y+1)^2 < 3^2 \tag{1.2.7}$$

可见区域为圆环,如图 1.8 所示.圆环的内、外边界分别为

$$x^2+(y+1)^2 = 1^2 \tag{1.2.8}$$

$$x^2+(y+1)^2 = 3^2 \tag{1.2.9}$$

区域有两条不相连接的边界线,是复通区域.

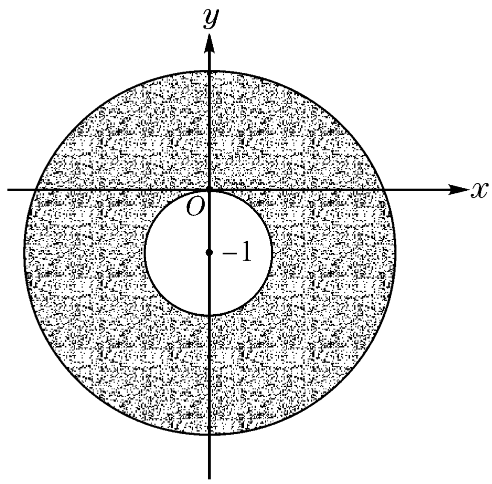


图 1.8

(2) 首先把辐角不等式变为关于 x, y 的不等式.令

$$w = \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} = \frac{x+\mathrm{i}(y-1)}{x+\mathrm{i}(y+1)} = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2} - \mathrm{i}\frac{2x}{x^2+(y+1)^2} \tag{1.2.10}$$

原先的式(1.2.6)相当于 $0<\arg w<\frac{\pi}{4}$,如图 1.9(a)所示,易见在 w 平面中

$$u = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}, \qquad v = -\frac{2x}{x^2+(y+1)^2} \tag{1.2.11}$$

图 1.9 的区域(以灰色作标记)在 w 平面和 z 平面分别由下面三个方程界定:

$$u > 0, \quad 即 \quad x^2+y^2 > 1 \quad (小圆外) \tag{1.2.12}$$

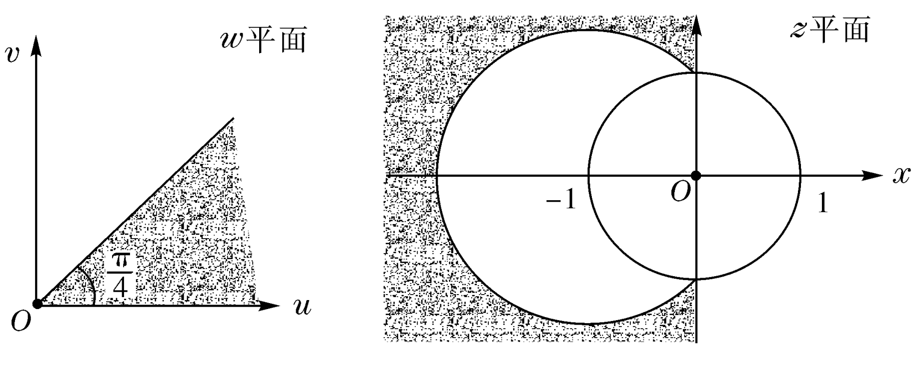


图 1.9

$$v > 0, \quad 即 \quad x < 0 \quad (左半平面) \tag{1.2.13}$$

$$u > v, \quad 即 \quad (x+1)^2 + y^2 > (\sqrt{2})^2 \quad (大圆外) \tag{1.2.14}$$

区域为图 1.9(b)中的灰色区,是单通区域.

1.2.2 复变函数的定义及几何意义

如果区域 D 内的每一个 z 值,均有一个或多个 w 值与之对应,则 w 称为 z 的函数,记作

$$w = f(z) \tag{1.2.15}$$

如果令

$$w = u + \mathrm{i}v \tag{1.2.16}$$

并将 $z = x + \mathrm{i}y$ 代入,则有

$$w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) \tag{1.2.17}$$

这表明,复变函数其实是两个二元实变函数的有序组合.因此,复变函数的许多性质(当然不是全部)都是实变函数相应性质的直接推广.

如果一个 z 值对应一个 w 值,则 $w = f(z)$称为单值函数,否则称为多值函数.本书主要讨论单值函数,后者仅于 1.4 节,5.2 节及 6.4 节涉及.

自变量 z 取值的区域称为复变函数的定义域(位于 z 平面),函数 $w = f(z)$取值的区域称为复变函数的值域(位于 w 平面).当 z 在 z 平面上沿某一曲线 L 变动时,与它相应的 w 将在 w 平面沿另一曲线 L'变动.曲线 L 与 L'上的点根据 $w = f(z)$的关系一一对应.这种对应关系称为由 z 平面到 w 平面的一个映射,这就是复变函数的几何意义.

【例 1.2.2】 已知 $w = f(z) = \dfrac{1}{z}$,问曲线$|z - a| = |a|$(a 为复数,图 1.10)被映射为怎样的图形?

解 首先由 z 满足$|z - a| = |a|$,求 w 满足的方程.将上式两边平方,得

$$(z - a)(z^* - a^*) = |a|^2 \tag{1.2.18}$$

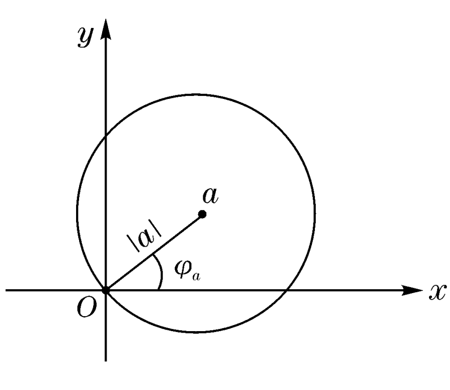


图 1.10

将 $w = \dfrac{1}{z}$代入,便有

$$\left(\frac{1}{w} - a\right)\left(\frac{1}{w^*} - a^*\right) = |a|^2 \tag{1.2.19}$$

两边乘 ww^*,整理后可得

$$aw + a^* w^* = 1 \tag{1.2.20}$$

即

$$2\mathrm{Re}(aw) = 1 \tag{1.2.21}$$

其次,只要找到 u, v 遵守的方程,便可知

$|z-a|=|a|$被映射为怎样的图形.将

$$w=u+\mathrm{i}v, \qquad a=|a|(\cos\varphi_a+\mathrm{i}\sin\varphi_a) \tag{1.2.22}$$

代入式(1.2.21),便有

$$1=2\mathrm{Re}(aw)=2|a|(u\cos\varphi_a-v\sin\varphi_a) \tag{1.2.23}$$

即

$$u\cos\varphi_a-v\sin\varphi_a=\frac{1}{2|a|} \tag{1.2.24}$$

这是直线方程.这表明,题设曲线经 $w=f(z)=\dfrac{1}{z}$映射到 w 平面是一直线.

1.2.3 复变函数的极限

1. 函数极限的定义

设 $w=f(z)$是在 z_0 点的无心邻域中定义的单值函数.若任给实数 $\varepsilon>0$,存在实数 $\delta>0$,使当 $0<|z-z_0|<\delta$时,有

$$|f(z)-w_0|<\varepsilon \tag{1.2.25}$$

则称 $z\to z_0$ 时 $f(z)$的极限为 w_0,记作

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=w_0 \tag{1.2.26}$$

由定义可见,极限值 w_0 是与 $z\to z_0$ 的方式无关的.换句话说,当 z 以不同方式趋于 z_0,如果 $f(z)$的取值不同,则其极限不存在.

由于 $w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$,因此复变函数中极限的定义可以归结为实变二元函数极限的定义,并且复变函数极限的性质就是实变函数极限性质的自然推广.

2. 函数极限的性质

若$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$和$\lim\limits_{z\to z_0}g(z)$存在,则

$$\lim_{z\to z_0}[f\pm g]=\lim_{z\to z_0}f\pm\lim_{z\to z_0}g \tag{1.2.27}$$

$$\lim_{z\to z_0}[fg]=\lim_{z\to z_0}f\cdot\lim_{z\to z_0}g \tag{1.2.28}$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f}{g}=\lim_{z\to z_0}f\Big/\lim_{z\to z_0}g \qquad [\text{当}\lim_{z\to z_0}g\neq 0] \tag{1.2.29}$$

1.2.4 复变函数的连续

1. 连续函数的定义

设 $w=f(z)$是在 z_0 点邻域中定义的函数.若任给实数 $\varepsilon>0$,存在实数 $\delta>0$,

使当 $|z-z_0|<\delta$ 时,有

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon \tag{1.2.30}$$

则称函数 $w=f(z)$ 在 z_0 处连续.

在极限的定义中,只要求在 z_0 点的无心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 中 $|f(z)-w_0|<\varepsilon$, w_0 可以不等于 $f(z_0)$;在连续的定义中要求在 z_0 点的邻域 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$.

$f(z)$ 是 x,y 的函数,因而 $w=u+\mathrm{i}v$ 也是 x,y 的函数,$f(z)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 连续与 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续是等价的.

如果 $w=f(z)$ 在 D 内每一点连续,则称函数在 D 内连续.

2. 连续函数的性质

在实变函数中有关连续函数的性质,可以自然地推广到复变函数中来.

首先,如果 $f(z)$ 在 D 上连续,则 $f(z)$ 在 D 上一致连续.即任给实数 $\varepsilon>0$,存在实数 $\delta>0$,使 D 上任何两点 z' 和 z'' 满足 $|z'-z''|<\delta$ 时,必有

$$|f(z')-f(z'')|<\varepsilon \tag{1.2.31}$$

在连续的定义中,只要求 $f(z)$ 在 z_0 点的邻域中有定义,并且 z_0 是定点,z 为动点;在一致连续的定义中,要求 $f(z)$ 闭区域 D 上连续,且 z' 及 z'' 为 D 上的两动点.

类似地,连续函数的和、差、积、商(在分母不为零的点)仍为连续函数,连续函数的复合函数仍为连续函数.

以上性质的证明,可参看实变函数相应性质的证明.

习　题　1.2

1.2.1　试在复平面上画出下述点集的位置.

(1) $\mathrm{Re}\,z^2>0$;　　(2) $0<\arg(z-1)<\dfrac{\pi}{4}$;

(3) $|z-1|\leqslant|z+1|$;　　(4) $|z|<1-\mathrm{Re}\,z$.

1.2.2　已知 $w=\dfrac{1}{z}$,问直线 $\mathrm{Re}\,z=C$(实数)被映射为怎样的图形? 已知 $C\neq 0$.

1.2.3　试证明,对任何实数 x,有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\neq 0$.

1.2.4　试问下述函数在 z_0 点的极限是否存在? 是否连续?

(1) $f(z)=2x+\mathrm{i}y^2$,　$z_0=2\mathrm{i}$;　　(2) $f(z)=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\dfrac{z}{z^*}-\dfrac{z^*}{z}\right)$,　$z_0=0$.

1.2.5　设 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 连续,且 $f(z_0)\neq 0$.试证明,可找到 z_0 的一个邻域,$f(z)$ 在其内不为零.

1.2.6　试证明 $f(z)=z^2$ 在区域 $|z|<1$ 中一致连续.

1.3 复变函数的导数 柯西-黎曼条件

本节首先介绍复变函数导数和微分的定义,进而导出复变函数可导的充分必要条件.定理的证明过程表明,柯西-黎曼(Cauchy-Riemann)条件是复变函数可导的必要条件.最后,讨论复变函数导数的几何意义.

1.3.1 导数与微分

1. 导数的定义与导数公式

设 $w=f(z)$是区域 D 中定义的单值函数,若在 D 内某点 z,极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \tag{1.3.1}$$

存在,则称函数 $f(z)$在 z 点可导,并称此极限值为 $f(z)$在 z 点的导数,记作

$$f'(z)=\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \tag{1.3.2}$$

讨论 第一,由极限的定义可知,无论 Δz 以任何方式趋于零,式(1.3.1)均应趋于同一有限的极限值.

第二,$f(z)$在 z 点可导,则 $f(z)$必在 z 点连续.因为,若 $f(z)$不连续,即当 $\Delta z\to 0$时 $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$不趋于零,式(1.3.1)必定没有有限的极限,与 $f(z)$在 z 点可导矛盾.

第三,由于复变函数导数的定义与实变函数导数的定义在形式上相同,实变函数所有导数公式都可以推广到复变函数中来.

特别是,当 $f_1'(z)$和 $f_2'(z)$都存在时,$f_1(z)$与 $f_2(z)$的和、差、积、商以及复合函数的导数公式也具有与实变函数相同的形式.例如,复合函数导数的公式为

$$\frac{\mathrm{d}f[\xi(z)]}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}f(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi(z)}{\mathrm{d}z} \tag{1.3.3}$$

2. 微分的定义与微分公式

设函数 $w=f(z)$在 z 点的改变量 $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$可以写成

$$\Delta w=\alpha\Delta z+o(\rho) \tag{1.3.4}$$

式中 $\rho=|\Delta z|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,$o(\rho)$是关于 ρ的高阶无穷小量,则称 $w=f(z)$在 z点可微,并且 Δw 的线性部分 $\alpha\Delta z$ 称为函数 $w=f(z)$在 z点的微分,记作

$$\mathrm{d}w=\alpha\Delta z \tag{1.3.5}$$

对函数 $w=z$ 而言,利用式(1.3.4)可得 $\alpha=1$,将 $\alpha=1$ 代入式(1.3.5)得恒等

式 $\mathrm{d}z=\Delta z$.将此式代入任何函数 $w=f(z)$的微分表达式中,便有

$$\mathrm{d}w = \alpha \mathrm{d}z \tag{1.3.6}$$

利用式(1.3.1)和式(1.3.4),易见

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\alpha\Delta z + o(\rho)}{\Delta z} = \alpha \tag{1.3.7}$$

由此得

$$\mathrm{d}w = f'(z)\mathrm{d}z \quad 或 \quad f'(z) = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} \tag{1.3.8}$$

这样,导数也可理解为函数微分除以自变量微分之商,称为微商.

复变函数的微分公式也具有与实变函数相同的形式,此处不再赘述.

现在,我们转向研究函数 $w=f(z)$可导的条件是什么.

1.3.2　复变函数可导的充分必要条件

定理　函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在$(x,y)$点可导的充要条件是

(1) $u(x,y)$与 $v(x,y)$在(x,y)点可微;

(2) $u(x,y)$与 $v(x,y)$在(x,y)点满足柯西-黎曼条件(简称 C-R 条件)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.3.9a}$$

为书写方便,今后采用简写记号$\frac{\partial u}{\partial x}\equiv u_x$,$\frac{\partial u}{\partial y}\equiv u_y$,$\frac{\partial v}{\partial x}\equiv v_x$,$\frac{\partial v}{\partial y}\equiv v_y$.C-R 条件可简写为

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x \tag{1.3.9b}$$

证明　(1)充分性.

由 u,v 可微,可知 u,v 的全微分存在,即

$$\Delta u(x,y) = u_x(x,y)\Delta x + u_y(x,y)\Delta y + o(\rho) \tag{1.3.10}$$

$$\Delta v(x,y) = v_x(x,y)\Delta x + v_y(x,y)\Delta y + o(\rho) \tag{1.3.11}$$

式中 $o(\rho)$是关于 ρ的高阶无穷小量,利用 i 乘式(1.3.11)后加式(1.3.10),可得

$$\begin{aligned} f(z+\Delta z)-f(z) &= [u(x+\Delta x, y+\Delta y) + \mathrm{i}v(x+\Delta x, y+\Delta y) \\ &\quad - u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)] \\ &= \Delta u(x,y) + \mathrm{i}\Delta v(x,y) \\ &= (u_x + \mathrm{i}v_x)\Delta x + (u_y + \mathrm{i}v_y)\Delta y + o(\rho) \end{aligned}$$

利用 C-R 条件可得$(u_y+\mathrm{i}v_y)\Delta y=(u_x+\mathrm{i}v_x)\mathrm{i}\Delta y$,由此得

$$f(z+\Delta z) - f(z) = (u_x + \mathrm{i}v_x)\Delta z + o(\rho) \tag{1.3.12}$$

在式(1.3.12)两边取 $\Delta z\to 0$ 的极限,可得

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f[z+\Delta z]-f[z]}{\Delta z} = u_x + \mathrm{i}v_x \tag{1.3.13}$$

即 $f(z)$可导,充分性得证.

(2) 必要性.

若 $f(z)$在 z点可导,则式(1.3.1)有确定的极限

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=a+\mathrm{i}b \tag{1.3.14}$$

亦即

$$f(z+\Delta z)-f(z)=(a+\mathrm{i}b)\Delta z+o(\rho) \tag{1.3.15}$$

将 $f(z)=u+\mathrm{i}v,\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\Delta y$ 代入式(1.3.15),便有

$$\begin{aligned}&[u(x+\Delta x,y+\Delta y)+\mathrm{i}v(x+\Delta x,y+\Delta y)]-[u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)]\\&=(a+\mathrm{i}b)(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y)+o(\rho)\end{aligned} \tag{1.3.16}$$

由上式两边的实部与虚部分别相等,得

$$\Delta u=a\Delta x-b\Delta y+o(\rho) \tag{1.3.17}$$

$$\Delta v=b\Delta x+a\Delta y+o(\rho) \tag{1.3.18}$$

这就证明了二元函数 $u(x,y)$和 $v(x,y)$可微.

令 $\Delta y=0$ 及 $\Delta x\to 0$,由式(1.3.17)及式(1.3.18)得

$$u_x=a,\qquad v_x=b \tag{1.3.19}$$

令 $\Delta x=0$ 及 $\Delta y\to 0$,由式(1.3.17)及式(1.3.18)得

$$u_y=-b,\qquad v_y=a \tag{1.3.20}$$

将式(1.3.19)与式(1.3.20)联立即得 C-R 条件,必要性得证.

讨论 第一,从“函数可微”的定义可见,判断式(1.3.4)的第二项是否关于 ρ 的高阶小量要费些周折.通常以可微的充分条件(u,v 有连续的偏导数)来代替.[①] 因为要判断 u,v 是否遵守 C-R 条件就要计算 u_x,u_y,v_x,v_y,考察它们是否连续是轻而易举的.

第二,从定理的证明过程可见,C-R 条件是 $f(z)$可导的必要条件,而不是充分条件.例 1.3.1 是一个非常形象的例子.

【例 1.3.1】 设 $f(z)=\sqrt{|xy|}$,问 $f(z)$在 $z=0$ 点是否满足 C-R 条件?是否可导?

解 由题设得 $u=\sqrt{|xy|},v(x,y)=0$.

(1) $$u_x\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x|\cdot 0}-0}{\Delta x}=0$$

$$u_y\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt{0\cdot|\Delta y|}-0}{\Delta y}=0$$

---

① 菲赫金哥尔茨 Г М(Г. М. Фихтенгольц).微积分学教程.第一卷第二分册.叶彦谦等译.北京:人民教育出版社,1979.379~384

又因 $v(x,y)=0$,故 $v_x\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=0$,$v_y\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=0$,可见 $f(z)$在 $z=0$ 点满足 C-R 条件.

(2) 让 Δz 以任意方式趋于零,如让 Δz 沿径向趋于零,即令 $\Delta z=e^{i\varphi}\Delta\rho$(图 1.11)

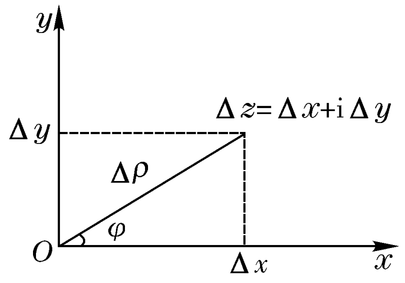


图 1.11

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{\sqrt{|\cos\varphi\,\Delta\rho\cdot\sin\varphi\Delta\rho|}}{e^{i\varphi}\Delta\rho}$$

$$=e^{-i\varphi}\sqrt{|\cos\varphi\,\sin\varphi|}$$

显然,随着 φ角取值不同,$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z}$不趋于同一极限值,故 $f(z)$在 $z=0$ 点不可导.

利用柯西-黎曼条件,$f'(z)$可表示为 4 种形式

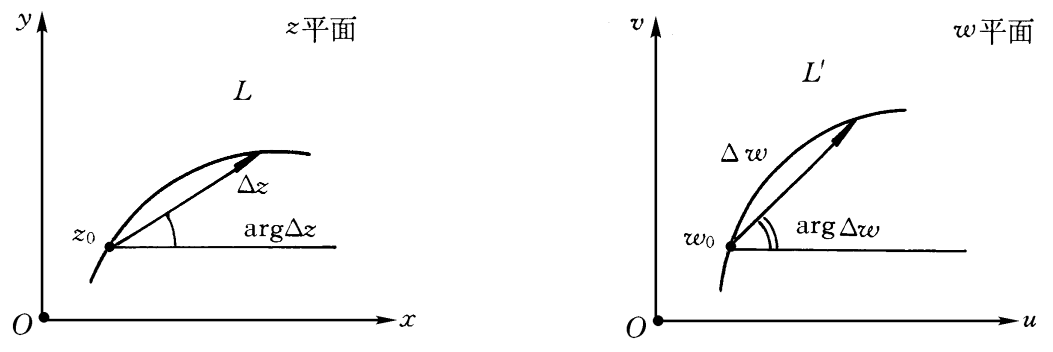
$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}\qquad(1.3.21)$$

1.3.3　复变函数导数的几何意义

设函数 $w=f(z)$在 $z=z_0$ 点有导数

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}\qquad(1.3.22)$$

由复变函数的几何意义可知,当 z 在 z 平面沿曲线 L 变动时,w 在 w 平面沿曲线 L'变动(图 1.12).



(a)　　(b)

图 1.12

现在将 Δz,Δw,$f'(z_0)$写成指数形式

$$\Delta z=|\Delta z|e^{i\arg\Delta z}\qquad(1.3.23)$$

$$\Delta w = |\Delta w| e^{\mathrm{i}\arg\Delta w} \tag{1.3.24}$$

其中 $\arg\Delta z$ 及 $\arg\Delta w$ 分别是割线 Δz 和 Δw 的辐角.当 $\Delta z \to 0$ 时,它们分别是 z_0 点处 L 的切线的辐角和 w_0 点处 L' 切线的辐角.

$$f'(z_0) = |f'(z_0)| e^{\mathrm{i}\arg f'(z_0)} \tag{1.3.25}$$

将式(1.3.23)、式(1.3.24)、式(1.3.25)代入式(1.3.22),可得

$$|f'(z_0)| e^{\mathrm{i}\arg f'(z_0)} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{|\Delta w| e^{\mathrm{i}\arg\Delta w}}{|\Delta z| e^{\mathrm{i}\arg\Delta z}} = \lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| \lim_{\Delta z\to 0} e^{\mathrm{i}(\arg\Delta w - \arg\Delta z)}$$

由等式两边复数的模与辐角相等(一般来说,两者辐角可相差 $2k\pi$),便有

$$|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|, \qquad \arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0}(\arg\Delta w - \arg\Delta z) \tag{1.3.26}$$

由此可得导数的几何意义:

导数的模 $|f'(z_0)|$ 表示通过点 z_0 的无穷小线段 Δz 映射为 w 平面的 Δw 时,长度的放大系数.

导数的辐角 $\arg f'(z_0)$ 表示曲线 L 上 z_0 点的切线与曲线 L' 上的 w_0 点的切线的夹角,即从 z 平面到 w 平面映射前后切线的转动角.

习　题　1.3

1.3.1　试由导数的定义出发,计算 $f(z) = z^n$ 的导数.

1.3.2　实变二元函数 $u(x, y)$ 的可微性定义是什么? 设

$$u(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

试证明函数 $u(x, y)$ 在(0,0)不可微.

1.3.3　已知 $f(z)$ 在 z 点可导,试分别计算 Δz 平行于 x 轴及 y 轴趋于零时的极限值,并由两者相等导出 C-R 条件.

1.3.4　指出下列函数何处满足 C-R 条件:

(1) $w = \dfrac{1}{z}$; (2) $w = x$; (3) $w = |z|$; (4) $w = |z|^2$; (5) $w = e^z$.

1.3.5　求下列函数的导数:

(1) $f(z) = (z^2 - 4z + 6)^2$;　　(2) $f(z) = \dfrac{2z}{1 - z}$.

1.3.6　证明在极坐标系中,C-R 条件为

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\rho\frac{\partial v}{\partial \rho} \tag{1.3.27}$$

1.3.7　以 z 及 z^* 取代 x, y 作为复变函数的独立变量,即令

$$u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) = U(z, z^*) + \mathrm{i}V(z, z^*) = F(z, z^*)$$

试证明

$$\frac{\partial}{\partial z^*}F(z,z^*)=0 \tag{1.3.28}$$

与 C-R 条件等价,此条件有何优越性?

1.4 解析函数

本节介绍解析函数的定义,函数解析的充要条件及解析函数的共轭性、调和性和保角性.在此基础上介绍从解析函数的虚部(或实部)求解析函数的四种常用方法.最后介绍初等解析函数.

1.4.1 解析函数的定义

若函数 $f(z)$在区域 D 内点点可导,则称 $f(z)$为 D 内的解析函数.

若函数 $f(z)$在 z_0 点的邻域($|z-z_0|<\varepsilon$)点点可导,则称 $f(z)$在 z_0 点解析,它比"$f(z)$在 z_0 点可导"要求为高(参看例 1.4.1).

若函数 $f(z)$在包含$\overline{D}$的某个开区域 D^+ 内解析,则称 $f(z)$在闭区域$\overline{D}$中解析.

如果 $f_1(z)$和 $f_2(z)$在 D 内解析,即 $f_1(z)$与 $f_2(z)$在 D 内点点可导,1.3 节指出 $f_1(z)$和 $f_2(z)$的和、差、积、商($f_2(z)\neq 0$)也在 D 内点点可导,可见它们均为解析函数.特别是,令 $f_1(z)=1$,则解析函数 $f_2(z)$的倒函数 $g(z)=\dfrac{1}{f_2(z)}$也是解析函数(当然,仍要求 $f_2(z)\neq 0$).

【例 1.4.1】 函数 $f(z)=|z|^2$ 在 $z=0$ 点是否可导?是否解析?

解 由 $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$,得 $u=x^2+y^2$, $v=0$,由此得

$$u_x=2x,\qquad u_y=2y,\qquad v_x=0,\qquad v_y=0$$

即 u,v 在 $z=0$ 点可微且满足 C-R 条件,可见 $f(z)$仅于 $z=0$ 点可导.

因为 $f(z)$在 $z=0$ 的邻域除 $z=0$ 点外均不可导,故 $f(z)$在 $z=0$ 不解析.

若函数 $f(z)$在某点 a 没有定义,或者在 a 点不解析,则称 a 点为 $f(z)$的奇点.例如,$z=a$ 就是函数 $f(z)=\dfrac{1}{z-a}$的奇点.

1.4.2 函数解析的充要条件

定理 函数 $f(z)$在区域 D 内解析的充要条件为

(1) $f(z)$在 D 内连续;

(2) u,v 遵守 C-R 条件.

既然 $f(z)$在 D 内解析定义为 $f(z)$在 D 内点点可导,而 $f(z)$可导的充要条件是 u,v 可微且满足 C-R 条件,自然会得出函数解析的充要条件是 u,v 在 D 内可微

且满足 C-R 条件.1923 年,Looman 等试图利用 $f(z)$ 连续代替 u,v 可微作为函数解析的充要条件,可惜他们的证明有缺陷.10 年之后前苏联数学家 Д.Е. Менвщов 在 1933 年完成了这一证明①.定理的证明超出本书的范围.

1.4.3 解析函数的共轭性、调和性和保角性

1. 解析函数的共轭性

解析函数的实部与虚部由 C-R 条件联系,称为解析函数的共轭性.

首先,可以利用解析函数的虚部确定其实部,或用实部确定其虚部,准确到一个可加常数.如果给出 $f(z)$ 在 D 内某一点的值,则可加常数便能完全确定.

设 $f(z)$ 在 D 内解析,已知 $v(x,y)$,利用 C-R 条件可得

$$du = u_x dx + u_y dy = v_y dx - v_x dy \tag{1.4.1}$$

因为它是一个全微分,可以采用四种方法求出 $u(x,y)$,分别称为全微分法,曲线积分法,不定积分法和求导法.

【例 1.4.2】 已知解析函数的虚部 $v(x,y)=2(x^2-y^2)+x$,求解析函数 $f(z)$.

解 由题设易得

$$u_x = v_y = -4y, \qquad u_y = -v_x = -(4x+1) \tag{1.4.2}$$

(1) 全微分法.由式(1.4.1)及式(1.4.2)得

$$du = u_x dx + u_y dy = -4y dx - (4x+1)dy = d(-4xy - y)$$

易见

$$u(x,y) = -4xy - y + C \tag{1.4.3}$$

现在知道了 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$,怎样才能找到 $f(z)$ 呢?从函数形式来看

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+iy) = f(x+iy)\big|_{x=z,y=0} = [u(x,y)+iv(x,y)]\big|_{x=z,y=0} \\ &= u(z,0) + iv(z,0) \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

由此得

$$f(z) = \{[-4xy - y + C] + i[2(x^2-y^2)+x]\}\big|_{x=z,y=0} = i(2z^2+z)+C \tag{1.4.5}$$

(2) 曲线积分法.由式(1.4.2)得

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (u_x dx + u_y dy) + C \\ &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} [-4y dx - (4x+1)dy] + C \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

积分分两段进行,即由 $(0,0)$ 到 $(x,0)$,再到 (x,y).在 $(0,0)$ 到 $(x,0)$ 段,$y=0$,

---

① 普里瓦诺夫 И И.复变函数引论.闵嗣鹤,程民德等译.北京:人民教育出版社,1956.71

$dy=0$;在$(x,0)$到(x,y)段,$dx=0$.由此得

$$u(x,y)=-\int_0^y(4x+1)dy+C=-4xy-y+C$$

与式(1.4.3)完全一致,求$f(z)$的方法与式(1.4.5)同.

(3) 不定积分法.将$u_x=-4y$对x作不定积分,由于被积函数是二元函数,故“积分常数”应与积分变量x无关,但它可以是另一变量y的函数,即

$$u(x,y)=\int u_x dx+g(y)=-\int 4y dx+g(y)=-4xy+g(y) \tag{1.4.7}$$

将上式代入式(1.4.2)的$u_y=-(4x+1)$确定$g(y)$,即

$$-(4x+1)=u_y=-4x+g'(y)$$

由此得$g'(y)=-1$,故

$$g(y)=-y+C \tag{1.4.8}$$

将式(1.4.8)代入式(1.4.7)得

$$u(x,y)=-4xy-y+C \tag{1.4.9}$$

与式(1.4.3)相同,同理可得$f(z)$.

(4) 求导法.由

$$f'(z)=v_y+iv_x=-4y+i(4x+1)=4iz+i \tag{1.4.10}$$

容易找到一个函数的导数与$f'(z)$相同

$$h(z)=i(2z^2+z) \tag{1.4.11}$$

故$f(z)$与$h(z)$只能相差一个常数C,即

$$f(z)=h(z)+C=i(2z^2+z)+C \tag{1.4.12}$$

其次,我们来证明解析函数共轭性的几何意义:曲线族$u(x,y)=C_1$(称为等u线)与曲线族$v(x,y)=C_2$(称为等v线)互相正交.

证明 由矢量分析(见附录A)可知,等u线的法线沿Δu的方向,等v线的法线沿Δv的方向,要证明两曲线族正交,只要证明Δu与Δv正交即可,亦即证明两矢量的标积为零

$$\Delta u\cdot\Delta v=0 \tag{1.4.13}$$

由C-R条件可见

$$\begin{aligned}\Delta u\cdot\Delta v&=(u_x\boldsymbol{e}_x+u_y\boldsymbol{e}_y)\cdot(v_x\boldsymbol{e}_x+v_y\boldsymbol{e}_y)=u_xv_x+u_yv_y\\&=u_x(-u_y)+u_yu_x=0\end{aligned} \tag{1.4.14}$$

利用这个结论容易求得静电场等势线与电力线的分布,详见14.3节“用保角变换法求解边值问题”.

2. 解析函数的调和性

遵守二维拉普拉斯方程

$$\Delta^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad \Delta^2 v = v_{xx} + v_{yy} = 0 \tag{1.4.15}$$

的函数 $u(x, y)$，$v(x, y)$称为调和函数.

解析函数的实部与虚部均为调和函数，这个性质称为解析函数的调和性.

证明 由 $f(z)$在 D 内解析，将 C-R 条件 $u_x = v_y$ 和 $u_y = -v_x$ 分别对 x 和 y 求偏导后相加，即得

$$\Delta^2 u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0 \tag{1.4.16}$$

这就证明了 $f(z)$的实部为调和函数，同理可证其虚部亦为调和函数.

满足 C-R 条件的两个调和函数称为共轭调和函数.解析函数的实部与虚部是一对共轭性调和函数.

3. 解析函数的保角性

设 $w = f(z)$在 D 内解析，D 内的 z_0 点有 $f'(z_0) \neq 0$，如图 1.13(a)所示. L_1 和 L_2 是通过 z_0 点的两任意曲线，两曲线在 z_0 点的两切线夹角为 $\theta = \theta_2 - \theta_1$.

$w = f(z)$的几何意义是从 z 平面到 w 平面的映射.设点 z_0 与 w 平面的 w_0 相对应，曲线 L_1，L_2 分别与 w 平面曲线 L_1' 与 L_2' 相对应.在 w_0 点的两切线的夹角为 $\theta' = \theta_2' - \theta_1'$，如图 1.3(b)所示.

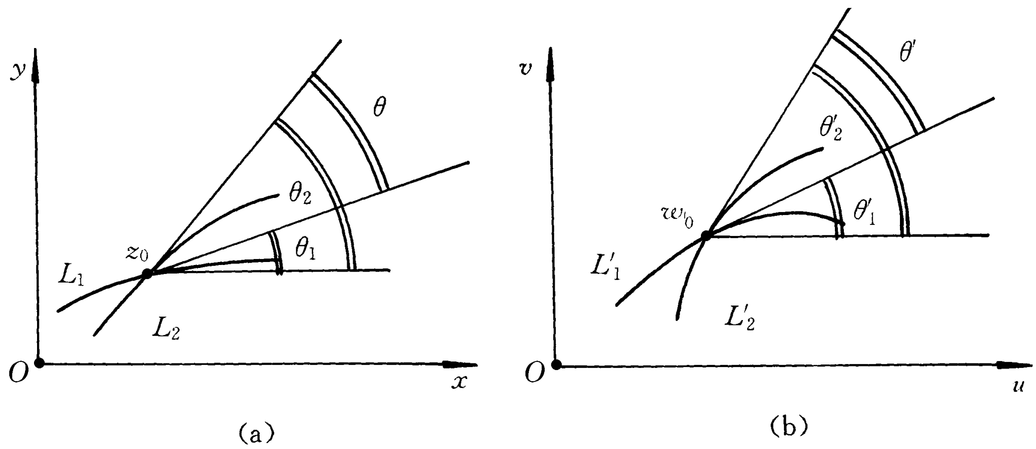


图 1.13

现在证明，解析函数 $w = f(z)$在 $f'(z_0) \neq 0$ 的点处所实现的映射是保角的，即映射前后两切线的夹角是相等的：$\theta = \theta'$.这个性质称为解析函数的保角性.

证明 由于导数值与 $\Delta z \to 0$ 的方式无关，故分别沿曲线 L_1 及 L_2 取 $z \to z_0$ 来计算 $f'(z_0)$时，均有

$$f'(z_0) = |f'(z_0)| e^{i\arg f'(z_0)} \tag{1.4.17}$$

又由导数的几何意义可知，$\arg f'(z_0)$表示映射前后切线的转动角，这样

$$\arg f'(z_0) = \begin{cases} \theta_1' - \theta_1, & z \text{ 沿 } L_1 \text{ 趋于 } z_0 \\ \theta_2' - \theta_2, & z \text{ 沿 } L_2 \text{ 趋于 } z_0 \end{cases} \tag{1.4.18}$$

由右边两式相等,得

$$\theta_1' - \theta_1 = \theta_2' - \theta_2$$

移项后便有

$$\theta_2 - \theta_1 = \theta_2' - \theta_1'$$

由此得

$$\theta = \theta'$$

纵观解析函数的三个性质,共轭性直接来自 C-R 条件$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$和$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$;而调和性表现为$\Delta^2 u(x,y)=0$ 和$\Delta^2 v(x,y)=0$;保角性则由于解析函数导数的辐角 $\arg f'(z)=\theta_1'-\theta_1=\theta_2'-\theta_2$. 因此,这三个性质都是从微分角度考察解析函数得到的,在第 2 章则从积分角度,第 3 章从级数展开的角度来研究解析函数的性质.

1.4.4　初等复变函数

初等复变函数是初等实变函数的自然推广,只要把 $y=f(x)$改为 $w=f(z)$即得.这里着重介绍它们作为复变函数所特有的性质.相同的性质不再赘述.

(1) 幂函数 $w=z^n$,多项式 $w=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$,有理函数 $w=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \Big/ \sum_{l=0}^{m} b_l z^l$ 是实变函数的简单推广,其性质与实变函数相似.

(2) 指数函数的定义

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \tag{1.4.19}$$

复变量指数函数的特有性质是

① e^z 以 $2\pi i$ 为周期.由定义(1.4.19)出发,有

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+i(y+2\pi)} = e^x[\cos(y+2\pi)+i\sin(y+2\pi)] \\ &= e^x(\cos y + i\sin y) = e^{x+iy} = e^z \end{aligned} \tag{1.4.20}$$

② 在实数域,$e^x>0$;在复数域,e^z 可小于零,如 $e^{i\pi}=-1$.

③ e^z 在无穷远点无定义.因为当 z 沿不同方向趋于无穷远点时,e^z 趋于不同的值.

(3) 三角函数的定义

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \qquad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cdots \tag{1.4.21}$$

复变量三角函数特有的性质:正、余弦函数的模可以大于 1. 实际上令 $z=iy$,当 $y\to\infty$时,$|\sin z|$与$|\cos z|$均无界.例如

$$\lim_{y\to\infty} |\sin z| = \lim_{y\to\infty}\left|\frac{e^{i\cdot iy}-e^{-i\cdot iy}}{2i}\right| = \lim_{y\to\infty}\left|\frac{e^{-y}-e^{y}}{2}\right| = \infty \tag{1.4.22}$$