中国科学院科学出版基金资助出版

现代数学基础丛书　　100

数据包络分析
（DEA）

魏权龄　著

科学出版社

北　京

数 据 包 络 分 析

魏权龄　著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是一本关于数据包络分析(DEA)方法、模型和理论的专著,是作者十几年工作的总结.第一章详细地讨论了 DEA 模型 C^2R;第二章讨论了微观经济学中的效率和生产可能集,为以后各章的讨论做微观经济方面的准备;第三章使用具有取值 0 和 1 的三个参数的综合 DEA 模型,统一形式地讨论了“经典”的 DEA 模型 C^2R,BC^2,FG 和 ST;第四章给出了综合 DEA 模型对应的生产可能集的(弱)生产前沿面的特征、结构及构造方法;第五章研究了决策单元的规模收益和“拥挤”迹象分析;第六章研究了综合 DEA 模型的对策论背景;第七章研究了具有无穷多个决策单元的 DEA 模型;第八章使用 DEA 方法进行技术进步评估;第九章研究非参数的 DEA 最优化模型;第十章和第十一章分别研究了具有“偏好锥”和“偏袒锥”的综合 DEA 模型及其性质和作用.

本书可供与决策、评价和优化有关的经济、管理、数学等领域的科研与应用工作者阅读,也可作为大学高年级学生、研究生和教师的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数据包络分析/魏权龄著. —北京:科学出版社,2004
(现代数学基础丛书;100)
ISBN 7-03-012980-6

Ⅰ.数… Ⅱ.魏… Ⅲ.包络-系统分析-数学模型 Ⅳ.F224.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 020044 号

责任编辑:毕 颖 陈玉琢/责任校对:朱光光
责任印制:钱玉芬/封面设计:王 浩

科學出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

雙青印刷廠印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2004 年 8 月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2006 年 3 月第二次印刷 印张:23 3/4
印数:3 001—4 500 字数:375 000

定价:48.00 元
(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前　　言

数据包络分析(data envelopment analysis)简称 DEA,是数学、运筹学、数理经济学和管理科学的一个新的交叉领域.它是由 A.Charnes 和 W.W.Cooper 等人于 1978 年开始创建,并被命名为 DEA[1].DEA 是使用数学规划(包括线性规划、多目标规划、具有锥结构的广义最优化、半无限规划、随机规划等等)模型进行评价具有多个输入、特别是多个输出的“部门”或“单位”(称为决策单元(decision making unit),简记 DMU)间的相对有效性(称为 DEA 有效).根据对各 DMU 观察的数据判断 DMU 是否为 DEA 有效,本质上是判断 DMU 是否位于生产可能集的“生产前沿面”上.生产前沿面是经济学中生产函数向多产出情况的一种推广.使用 DEA 方法和模型可以确定生产前沿面的结构、特征和构造方法,因此又可将 DEA 看做是一种非参数的统计估计方法;由于 DEA 具有“天然”的经济背景,因此,依据 DEA 方法、模型和理论,可以直接利用输入和输出数据建立非参数的 DEA 模型,进行经济分析;同时,使用 DEA 对 DMU 进行效率评价时,可得到很多管理信息.因此,DEA 领域的研究吸引了众多的学者[2,3].

在科学研究当中,由某个新的“生长点”发展成为一个研究领域(或分支),是需要经过许许多多的人长期共同努力去完成的.就 DEA 领域来说,25 年来众多的学者在以下几方面做了一系列奠基性的工作:

(i) 完成大量应用的成功案例,说明 DEA 应用的广泛性和适用性.

(ii) DEA 模型的扩充和完善.例如 C^2R 模型[1]之后,最具代表性的“经典”模型:BC^2 模型[4],FG 模型[5]和 ST 模型[6];加法模型 C^2GS^2[7];具有无穷多个 DMU 的半无限规划的 DEA 模型 C^2W[8];具有“偏好锥”和“偏袒锥”的 DEA 模型 C^2WH[9]和综合 DEA 模型[10];Log 型的 DEA 模型[11];随机 DEA 模型[12～14];具有不可控因素的 DEA 模型[15];逆 DEA 模型[16～18],等等.这方面的工作对 DEA 领域来说尤为重要.

(iii) DEA 模型和方法的经济背景和管理背景研究,确立 DEA 在经济学和管理科学中的地位.

(iv) DEA 所依据的数学理论研究.包括凸分析、数学规划、对策论中与 DEA 有关的基础理论研究.

(v) DEA 模型的计算研究和 DEA 软件的研制.这方面的工作对于 DEA 方法和模型的实际应用同样是很重要的.

中国学者从事 DEA 的研究始于 1986 年.Charnes 教授 1986 年访问中国时曾

在北京、上海等地做过多次 DEA 方面的演讲.随后不久,陈珽教授和他的学生周泽昆发表了中国学者关于 DEA 的第一篇文章[19].当 Charnes 教授在中国访问时,我正在他领导的美国 Texas 大学(Austin)经济控制研究中心(Center for Cybernetic Studies,简称 CCS)访问,并与他合作研究.当时他已近 70 岁高龄,但仍在孜孜不倦地工作着.我亲眼目睹了他对自己从事的事业的执著、对学生父辈般的关爱、对自己及学生和合作者们研究成果的孩童般的喜悦;也目睹过他"脾气"之大.当时 DEA 是他极为重要的研究领域之一,我以从事于非线性规划和多目标规划的研究背景和工作积累有幸参与 DEA 领域的研究,与 Charnes 教授和 Cooper 教授合作研究,于 1986 年底和 1987 年初分别得到了第一个具有无穷多个决策单元的 DEA 模型 C^2W 和第一个具有锥结构的锥比率模型 C^2WH(最后一位作者黄志民是我的硕士毕业生,Charnes 的博士毕业生).1987 年徐利治教授到 Austin 访问,他鼓励我写一本小书作为运筹学小丛书之一出版.当我回国后,我的老师许国志教授也对我计划写 DEA 小书倍加鼓励.1988 年底,我将 DEA 领域的一些代表性的文章内容重新加工整理,用自己当时对 DEA 的理解和认识,大胆地写了 DEA 领域的第一本专著《评价相对有效性的 DEA 方法——运筹学的新领域》(魏权龄著,中国人民大学出版社,1988 年 11 月)[20].该书严格、系统地论述了 DEA 方法和模型,给出了 DEA 的理论框架,其中也包括了作者与 Charnes 教授和 Cooper 教授的合作研究成果.该书以中文出版,深受国内同行欢迎,成为 DEA 文章的广为引用的文献之一.同时我收到台湾学者的信函索取.个别国外指导中国学生的教授也曾向作者"求购".因此,作为作者,我深感欣慰.

对 DEA 领域的深入研究需要经济学背景.幸运的是,自 1981 年开始我由中国科学院系统科学研究所(前身是数学所,现在是数学与系统科学研究院)调到了中国人民大学任教,以人文、社科为主的大学为我提供了接近经济学的良好条件和学习的愿望.经济学的知识使我对 DEA 的理解和认识有很大的提升.1991 年我又到 Texas 大学 CCS 中心,与主任 G.Yu(于刚)教授合作研究 DEA,取得较大进展.自 1997 年开始,我一直与香港理工大学 H.Yan(阎洪)教授等合作,取得颇丰成果.此外,我与很多学者都有接触和合作,在 DEA 领域,他们帮了我,我也帮助了很多人.

在我亲自指导的学生当中,从事 DEA 论文写作和研究的有 27 人,他们是:黄志民、岳明、卢刚、崔宇刚、白薇、陆剑受、肖志杰、庞信帮、李其荣、郎庆红、戚荣、罗庆兴、李淑云、苟文怀、徐春香、韩松、汪俊、熊琳、佟鑫、韩梅、王兵、娄惠兰、史健、马赞甫、李颖、邓明玉、仉小宁.在教与学的过程中,我深深地体会到了"教学相长"的乐趣.

正是由于从事于 DEA 的研究工作积累,加之我的老师、同行、朋友的鼓励和支持,我于今年开始着手准备并完成了全部书稿.

本书是一本关于 DEA 方法、模型和理论的专著,全书近百分之八十都是我们

自己的研究工作.与国外已出版的最具代表性的专著相比[21~23],这本书尤其注重DEA的数学理论的严格性和完整性,以及经济背景中数学叙述的准确性和结论证明的严谨性.同时,对有管理背景的某些结果,也给予严格的论证.本书共有11章:第一章DEA模型C^2R.这一章沿袭作者的第一本DEA小书的理论框架[20],详细地讨论了C^2R模型的足够多的性质.这不仅仅是因为它是第一个DEA模型,更为重要的是:对C^2R模型的许多性质和定理,乃至讨论和证明的技巧,在DEA其他模型的研究中极具代表性,甚至某些类似的结论,只要回顾一下C^2R模型,就会不证自明.第二章微观经济学中的效率和生产可能集.该章先汇总讨论生产函数,再讨论多输入、特别是多输出情况下的生产可能集和生产前沿面等.该章将为以后各章涉及微观经济学做必要的准备.第三章综合DEA模型(C^2R,BC^2,FG,ST).该章用统一的观点(引进带有取值0和1的三个参数δ_1,δ_2,δ_3)将最具代表性的"经典"DEA模型C^2R,BC^2,FG和ST统一为综合的DEA模型.进而对综合模型讨论了DEA有效与Pareto解的等价关系;输入和输出DEA模型下的弱DEA有效与弱Pareto之间的关系;关于(弱)DEA有效的恒等式;决策单元的增减对有效性的影响.第四章生产可能集的(弱)生产前沿面的特征、结构与构造方法.该章首先利用把凸多面锥由"交形式"转化成"和形式"的方法,将通常由"和形式"给出的生产可能集转化为"交形式".进而对生产可能集的弱生产前沿面给出了完整的结构和特征;对生产前沿面也讨论了其结构特征.第五章决策单元的规模收益和"拥挤"迹象分析.首先引进了一个新的DEA模型(NEW).在此基础上,给出了使用C^2R模型、FG模型、ST模型和BC^2模型判断决策单元为规模收益递增、不变、递减的充分必要条件;给出了分析决策单元呈现"拥挤"迹象的充分必要条件.并且由新的DEA模型(NEW)对上述三种规模收益状况和呈现"拥挤"迹象,统一给出了判别的充分必要条件.同时,也讨论了呈现弱"拥挤"迹象的充要条件.第六章综合DEA模型的对策论背景.该章针对综合DEA模型给出了(弱)DEA有效的一种对策论的解释,这实际上给出了用DEA模型评价决策单元有效性的对策论背景支持.第七章具有无穷多个决策单元的DEA模型.该章给出的是含有3个参数的具有无穷多个决策单元的DEA模型,由于决策单元个数可以是无穷多,所以DEA模型是一个半无限规划.在此基础上,研究一种特例,给出单一输出的"生产前沿面"与生产函数曲面之间的关系和相关的一些经济特性.该章的结果为利用DEA模型进行技术进步评估(第八章)和建立非参数的DEA最优化模型(第九章),提供了理论依据.第八章DEA方法与技术进步评估.基于第七章的结果,以生产函数为背景,直接使用"企业"(或部门)的投入、产出数据建立DEA模型,通过各"企业"技术进步状况,来评估整个"行业"的技术进步速度.同时对各"企业"给出技术进步速度和相对的超前或滞后年限.就此而言,该章给出的方法不但具有宏观意义,也具有微观意义.第九章非参数的DEA最优化模型.该章同样基于第七章的结果,以微观经济学的生产

理论中的优化模型为例,直接使用输入和输出数据建立最优化模型并进行经济分析.可以证明:由这些非参数的最优化模型得到的最佳配置是位于生产可能集的生产前沿面或弱生产前沿面上.同时,该章也讨论了资源配置问题,给出了相应的非参数最优化模型,该模型是一个线性规划,是可计算的,这就从另一个角度应答了经济学历史上关于“社会主义是否可行”的经济学大论战.第十章具有“偏好锥”和“偏袒锥”的综合 DEA 模型.所谓综合 DEA 模型,仍然是指模型中含有三个取值为 0 和 1 的参数,参数的不同取值可以得到 4 个当今最具代表性的 DEA 模型 C^2R, BC^2,FG 和 ST.而且,该章的综合 DEA 模型中含有表明对输入、输出各项指标重要性的“偏好锥”,以及表明对某个或某些个决策单元侧重(“喜好”)的“偏袒锥”.该章详尽地讨论了综合 DEA 模型,例如,严格证明了 DEA 有效性与相应的多目标规划的非支配解的等价关系;综合 DEA 模型与相应的具有锥结构的“加法模型”的等价性,等等.第十一章综合 DEA 模型中“偏好锥”和“偏袒锥”的性质和作用.该章研究了“偏好锥”(包括“偏好锥”为多面锥的场合)的一些性质及实际应用.同时对“偏袒锥”的性质和作用进行了深入研究.特别是给出了一种特殊的用“初等偏袒矩阵”构成的“偏袒锥”.使用这种“偏袒锥”可以研究决策单元之间的位置关系和生产前沿面的结构,并给出构造方法(由于篇幅所限,该章只用一个具体例子指出了构造方法,一般的讨论见文献[24]).本书最后给出了四个附录,主要是讲述本书讨论中用到的有关凸集、锐锥;线性不等式相容性定理和线性规划对偶理论(包括线性规划的存在性定理、“松紧定理”和“紧松定理”等等);凸多面锥的“交形式”和“和形式”间的相互转化方法;具有锥结构的线性规划对偶定理.统观全书可以看出:数学、经济学和管理科学是 DEA 这一学科形成的柱石,优化是其研究使用的主要方法,而 DEA 的应用是它能得以迅速发展的动力.从中还可以发现,Charnes 和 Cooper 始于 20 世纪 50 年代在运筹学、经济学和管理科学中诸多领域的研究工作对 DEA 的影响和推进.

感谢所有帮助过我的老师、同行、同学、朋友和合作者.我的学生韩松、汪俊、史健、马赞甫、李颖和邓明玉,他们在学习和讨论本书的过程中,对某些内容提出过很好的意见和建议,在此表示感谢.

最后,我要特别感谢我的妻子刘木兰教授对我研究工作的一贯支持.

本书的出版得到中国科学院科学出版基金的资助,深表谢意.同时还要感谢国家自然科学基金 1989～2006 年连续对 DEA 研究的支持,以及国家社科基金、教育部人文社科基金的基金支持.感谢科学出版社对本书的出版给予大力帮助和支持.

作 者

2003 年

目　　录

前　言

第一章　DEA 模型 C^2R …… 1

第一节　C^2R 模型和(弱)DEA 有效性 …… 2

第二节　具有非阿基米德无穷小的 C^2R 模型 …… 20

第三节　(弱)DEA 有效与(弱)Pareto 最优 …… 26

第四节　判定(弱)DEA 有效性的目标规划法(加法模型) …… 35

第五节　C^2R 的生产可能集和生产前沿面 …… 38

第六节　决策单元在生产前沿面上的“投影” …… 51

第二章　微观经济学中的效率和生产可能集 …… 59

第一节　生产函数 …… 60

第二节　生产函数之下的规模收益分析 …… 62

第三节　多产出之下的生产可能集 …… 66

第四节　生产可能集的公理体系 …… 71

第三章　综合 DEA 模型(C^2R,BC^2,FG,ST) …… 75

第一节　BC^2 模型,FG 模型和 ST 模型 …… 75

第二节　综合 DEA 模型下的 DEA 有效与 Pareto 解的等价性 …… 83

第三节　输入和输出 DEA 模型下的弱 DEA 有效与弱 Pareto 解之间的关系 …… 89

第四节　关于(弱)DEA 有效决策单元的恒等式 …… 100

第五节　决策单元的增减对决策单元有效性的影响 …… 107

第四章　生产可能集的(弱)生产前沿面的特征、结构与构造方法 …… 119

第一节　生产可能集的“交形式”表示 …… 119

第二节　生产可能集 T 的(弱)生产前沿面 …… 123

第三节　弱生产前沿面的结构特征 …… 131

第四节　生产前沿面的结构特征 …… 137

第五章　决策单元的规模收益和“拥挤”迹象分析 …… 139

第一节　输出 DEA 模型 NEW …… 139

第二节　FG 模型,ST 模型与规模收益分析 …… 142

第三节　C^2R 模型与规模收益分析 …… 146

第四节　BC^2 模型与规模收益分析 …… 148

第五节　(弱)DEA 有效的经济含义 …………………………………… 151
第六节　使用输出 DEA 模型判定规模收益状况的几点注记 ……………… 154
第七节　“拥挤”迹象分析………………………………………………… 157
第八节　关于规模收益与“拥挤”迹象判定的统一处理…………………… 161
第九节　弱“拥挤”迹象分析……………………………………………… 164
第六章　综合 DEA 模型的对策论背景 ……………………………… 170
第一节　效率评价的二人无限零和对策…………………………………… 171
第二节　(弱)对策有效与(弱)DEA 有效的等价性 ……………………… 176
第三节　(弱)对策有效与(弱)Pareto 解的等价性………………………… 183
第七章　具有无穷多个决策单元的 DEA 模型 ………………………… 185
第一节　具有无穷多个决策单元的综合 DEA 模型 ……………………… 185
第二节　生产可能集,生产前沿和 Pareto 最优 …………………………… 189
第三节　DEA 的生产前沿面与生产函数曲面 …………………………… 195
第四节　生产可能集和生产前沿面的逼近………………………………… 203
第八章　DEA 方法与技术进步评估 …………………………………… 206
第一节　中性技术进步与输出 DEA 模型 ………………………………… 206
第二节　资金增长型和劳力增长型技术进步……………………………… 212
第三节　评估技术进步的积分方法………………………………………… 222
第九章　非参数的 DEA 最优化模型 …………………………………… 228
第一节　产出最大化模型…………………………………………………… 229
第二节　成本最小化模型…………………………………………………… 239
第三节　利润最大化模型…………………………………………………… 245
第四节　资源配置的非参数 DEA 模型 …………………………………… 247
第十章　带有“偏好锥”和“偏祖锥”的综合 DEA 模型 ……………… 259
第一节　锥结构的综合 DEA 模型 ………………………………………… 259
第二节　4 种 DEA 模型之间的关系 ……………………………………… 266
第三节　综合加法模型……………………………………………………… 269
第四节　DEA 有效与非支配解的等价性 ………………………………… 275
第五节　生产可能集和有效前沿面………………………………………… 277
第六节　具有凸多面锥的综合 DEA 模型 ………………………………… 285
第十一章　综合 DEA 模型中“偏好锥”和“偏祖锥”的性质和作用 ……… 290
第一节　“偏好锥” W 的性质及作用 …………………………………… 290
第二节　“偏祖锥” K 的性质及作用 …………………………………… 299
第三节　“初等偏祖矩阵”构成的“偏祖锥”………………………………… 308
第四节　关于“偏好锥” W 和“偏祖锥” K 的例子 ……………………… 317

附录 A　凸集,锥,凸锥,极锥和锐锥 …… 329
第一节　凸集、锥和凸锥 …… 329
第二节　极锥和锐锥 …… 330
第三节　凸多面体和凸多面锥 …… 332
附录 B　Tucker 型定理与线性规划对偶理论 …… 335
第一节　线性规划对偶定理和松紧定理 …… 335
第二节　线性齐次不等式组的 Tucker 型定理 …… 338
第三节　线性规划最优解存在性定理和紧松定理 …… 341
附录 C　"交形式"的凸多面锥与"和形式"的凸多面锥的相互转换方法 …… 346
第一节　一个简单的场合 …… 346
第二节　凸多面锥由"交形式"向"和形式"的转换方法 …… 348
第三节　凸多面锥由"和形式"向"交形式"的转换方法 …… 351
附录 D　具有锥结构的线性规划对偶定理 …… 353
第一节　与约束规格有关的几个集合 …… 353
第二节　约束规格 …… 354
第三节　对偶定理 …… 354
参考文献 …… 357

*　*　*

《现代数学基础丛书》已出版书目 …… 363

第一章　DEA 模型 C^2R

1978 年 A.Charnes,W.W.Cooper 和 E.Rhodes 给出了评价决策单元相对有效性的数据包络分析方法(data envelopment analysis)[1],即 DEA.自第一个 DEA 模型 C^2R 出现①,至今已形成关于效率、生产可能集、生产前沿面等概念的完整的理论、方法和模型的 DEA 研究领域.

初始的 DEA 模型 C^2R 是一个分式规划,当使用 1962 年由 Charnes 和 Cooper 给出的 C^2 变换(即 Charnes-Cooper 变换,见文献[25]),可将分式规划化为一个与其等价的线性规划问题.该分式规划是将科学-工程效率的定义推广到多输入、多输出的系统的相对效率的概念;由线性规划的对偶理论,可以得到一个对偶规划,该对偶规划是有其经济含义的,它与生产可能集和相应的生产前沿面相联系.判断一个决策单元是否为 DEA 有效,本质上是判断该决策单元是否落在生产可能集的生产前沿面上.这里的生产前沿面,实际上是指由观察到的决策单元的输入数据和输出数据的包络面的有效部分.这也是称谓数据包络分析的原因所在.从多目标规划的角度看,如果以输入最小、输出最大为目标,那么生产前沿面就是以生产可能集做为约束集合的相应的线性多目标规划的 Pareto 面,也即数据包络面的有效部分.

生产可能集是由关于生产可能集的经济特性所决定,它是由反映经济特性的公理体系惟一确定.C^2R 模型对应的生产可能集的公理体系中,假定生产可能集满足“锥性公理”,这就决定了在 C^2R 模型之下的 DEA 有效既为“技术有效”,也为“规模有效”(相当于具有一个输出时的生产函数为规模收益不变的状态).在研究多输入、多输出(特别是多输出)的“生产”活动中,当公理系统给定后,往往要研究有效“生产”的特征,给出关于有效性的一些条件.

在经济学界,关于生产、效率和效率度量等方面的研究中,著名经济学家 R.W.Shephard 在研究生产成本的时候,曾引进了被称为“距离函数”的公式(见文献[26],[27]);M.J.Farrell 随后给出的输入型技术有效性度量公式(见文献[28]),都与 C^2R 模型的对偶规划问题有着相似的形式.Charnes 和 Cooper 等人的方法是使用对每个决策单元的输入、输出数据,直接建立 DEA 模型,并利用线性规划的对偶理论和使用非阿基米德无穷小的技巧,用一步计算去判别决策单元的 DEA 有效性,成功地实现了对有效性计算.

---

①　C^2R 是用 Charnes, Cooper 和 Rhodes 三位作者的第一个英文字母命名的.

本章取材于本书作者 1988 年公开出版的关于 DEA 的第一本专著《评价相对有效性的 DEA 方法——运筹学的新领域》[20]的第二章.

比较而言,本书第一章的叙述较为详细.这不仅仅是因为 C^2R 模型重要.实际上,对 C^2R 模型的许多性质和定理,以及讨论和证明的技巧,在 DEA 其他模型的研究中极具代表性.甚至某些类似的性质,只要回顾一下 C^2R 模型,就会不证自明.

第一节　C^2R 模型和(弱)DEA 有效性

假设有 n 个部门或单位(称为决策单元,decision making units),这 n 个决策单元都是具有可比性的.每个决策单元都有 m 种类型的输入(表示该决策单元对"资源"的耗费,类似于微观经济学中的生产要素)和 s 种类型的"输出"(它们是决策单元在消耗了"资源"之后,表明"成效"的一些指标,例如经济效益指标及产品质量的指标).我们对输入和输出的理解是:输入越小越好,而输出越大越好.各决策单元的输入数据和输出数据由表 1.1.1 给出.

表 1.1.1

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & n & & \\
v_1 & 1 & \rightarrow & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} & & \\
v_2 & 2 & \rightarrow & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2n} & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
v_m & m & \rightarrow & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mj} & \cdots & x_{mn} & & \\
 & & & y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1j} & \cdots & y_{1n} & \rightarrow & 1 & u_1 \\
 & & & y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2j} & \cdots & y_{2n} & \rightarrow & 2 & u_2 \\
 & & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & y_{s1} & y_{s2} & \cdots & y_{sj} & \cdots & y_{sn} & \rightarrow & s & u_s
\end{array}
$$

表中(决策单元 j 记为 DMU_j,$1\leqq j\leqq n$)

x_{ij}=DMU_j对第 i 种输入的投入量,$x_{ij}>0$;

y_{rj}=DMU_j对第 r 种输出的产出量,$y_{rj}>0$;

v_i=对第 i 种输入的一种度量(或称权);

u_r=对第 r 种输出的一种度量(或称权),$i=1,2,\cdots,m$;$j=1,2,\cdots,n$;$r=1,2,\cdots,s$.

为方便,记

$$X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{mj})^{\mathrm{T}}, \quad j = 1, \cdots, n,$$

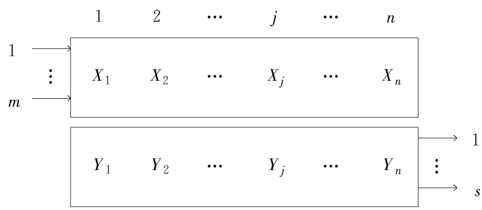
$$Y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \cdots, y_{sj})^{\mathrm{T}}, \quad j = 1, \cdots, n.$$

$$v = (v_1, v_2, \cdots, v_m)^{\mathrm{T}},$$

$$u = (u_1, u_2, \cdots, u_s)^{\mathrm{T}}.$$

这里,X_j 和 Y_j 分别为 DMU_j 的输入向量和输出向量,$j=1,\cdots,n$,均为已知数据,它可以根据历史资料或统计的数据得到;v 和 u 分别为与 m 种投入和 s 种输出对应的权向量,为变量.表 1.1.2 是以向量形式给出的输入、输出数据表.

表 1.1.2



对于权系数 $v \in E^m$ 和 $u \in E^s$,决策单元 j(即 DMU_j,$1 \leqslant j \leqslant n$)的效率评价指数

$$h_j = \frac{u^{\mathrm{T}} Y_j}{v^{\mathrm{T}} X_j}, \quad j = 1, \cdots, n,$$

我们总可适当选取权系数 v 和 u,使得

$$h_j \leqq 1, \quad j = 1, \cdots, n.$$

效率评价指数 h_j 的含义是:在权系数 v, u 之下,投入为 $v^{\mathrm{T}} X_j$,产出为 $u^{\mathrm{T}} Y_j$ 时的产出与投入之比.本书中,为书写方便总记($1 \leqslant j_0 \leqslant n$)

$$X_0 = X_{j_0}, \quad Y_0 = Y_{j_0}.$$

现在,考查 DMU_{j_0} 的效率评价问题:以 DMU_{j_0} 的效率评价指数

$$h_{j_0} = \frac{u^{\mathrm{T}} Y_0}{v^{\mathrm{T}} X_0}$$

为目标,以所有的决策单元($j=1,\cdots,n$)的效率指数(包括 DMU_{j_0})

$$h_j = \frac{u^{\mathrm{T}} Y_j}{v^{\mathrm{T}} X_j} \leqq 1, \quad j = 1, \cdots, n$$

为约束,构成如下的分式规划问题(C²R 模型)

$$
(C^2R)^I \begin{cases} \max \dfrac{u^{\mathrm{T}} Y_0}{v^{\mathrm{T}} X_0} = V_P^I, \\ \dfrac{u^{\mathrm{T}} Y_j}{v^{\mathrm{T}} X_j} \leqq 1, \quad j = 1, \cdots, n, \\ u \geqslant 0^{①}, \quad v \geqslant 0. \end{cases}
$$

分式规划问题$(C^2R)^I$是具有工程方面的背景的,它是将科学-工程效率的定义推广到多输入、多输出系统的场合,下面是文章[1]中给出的例子.

例 1.1.1 考虑由煤经过燃烧产生热量的某种燃烧装置.燃烧装置的效率是用燃烧比 E_r 来刻画:

$$
E_r = \frac{Y_r}{Y_R},
$$

其中

Y_R＝燃烧给定数量为 X 吨的煤($X>0$)所能产生的最大热量(所产生热量的理想值);

Y_r＝某设计的燃烧装置,燃烧给定数量为 X 吨的煤,所产生的热量(产生热量的实测值).显然有 $Y_r \leqq Y_R$,即 $0 \leqq E_r \leqq 1$.现在用 C^2R 模型研究设计的燃烧装置效率时,可以得出效率指数的含义就是燃烧比 E_r.实际上,我们有

$$
(P) \begin{cases} \max \dfrac{uY_r}{vX} = V_P, \\ \dfrac{uY_R}{vX} \leqq 1, \\ \dfrac{uY_r}{vX} \leqq 1, \\ u > 0, \quad v > 0. \end{cases}
$$

设其最优解为 $\bar{u}, \bar{v}$.由 $Y_r \leqq Y_R$,以及

$$
\frac{\bar{u} Y_R}{\bar{v} X} \leqq 1,
$$

可知

$$
\frac{\bar{u}}{\bar{v}} \leqq \frac{X}{Y_R} \leqq \frac{X}{Y_r}.
$$

因此,(P)的最优解 $\bar{u}, \bar{v}$ 满足

① $u = (u_1, u_2, \cdots, u_m)^{\mathrm{T}} \geqslant 0$ 表示对任意 $i = 1, 2, \cdots, m$ 均有 $u_i \geqq 0$,并且至少存在 $i_0 (1 \leqq i_0 \leqq m)$,有 $u_{i_0} > 0$.也即 $u \geqslant 0$ 等价于 $u \geqq 0$,且 $u \neq 0$.本书中符号“$\geqslant$”的使用,有相同的含义.

$$\frac{\bar{u}}{\bar{v}} = \frac{X}{Y_R},$$

而最优值为(效率指数)

$$V_P = \frac{\bar{u}\,Y_r}{\bar{v}\,X} = \frac{X}{Y_R} \cdot \frac{Y_r}{X} = \frac{Y_r}{Y_R} = E_r.$$

原始的 C^2R 模型$(C^2R)^I$ 是一个分式规划,使用 C^2 变换可将其化为一个等价的线性规划的形式.为此,令(这里由 $v^{\mathrm{T}} X_0 > 0$,知 $t>0$)

$$t = \frac{1}{v^{\mathrm{T}} X_0}, \quad \omega = tv, \quad \mu = tu,$$

则目标函数为

$$\frac{u^{\mathrm{T}} Y_0}{v^{\mathrm{T}} X_0} = \mu^{\mathrm{T}} Y_0,$$

而约束为

$$\frac{\mu^{\mathrm{T}} Y_j}{\omega^{\mathrm{T}} X_j} = \frac{u^{\mathrm{T}} Y_j}{v^{\mathrm{T}} X_j} \leqq 1, \quad j = 1, \cdots, n,$$
$$\omega \geqslant 0, \mu \geqslant 0.$$

而由

$$t = \frac{1}{v^{\mathrm{T}} X_0},$$

知它化为

$$\omega^{\mathrm{T}} X_0 = 1.$$

因此,分式规划问题$(C^2R)^I$ 化为

$$\begin{cases} \max \quad \mu^{\mathrm{T}} Y_0, \\ \omega^{\mathrm{T}} X_j - \mu^{\mathrm{T}} Y_j \geqq 0, \quad j = 1, \cdots, n, \\ \omega^{\mathrm{T}} X_0 = 1, \\ \omega \geqslant 0, \quad \mu \geqslant 0. \end{cases}$$

不难看出:由 $\omega^{\mathrm{T}} X_0 = 1$,知满足

$$\omega^{\mathrm{T}} X_0 = 1, \quad \omega \geqq 0$$

的 ω,必有 $\omega \geqslant 0$;此外,由上述规划存在使目标数 $\mu^{\mathrm{T}} Y_0 > 0$ 的可行解,故上述规划的最优目标值必大于 0,因此可将约束条件中的 $\mu \geqslant 0$ 改写为 $\mu \geqq 0$.这样,可得到如下的线性规划($P^I_{C^2R}$):

$$
(P_{C^2R}^I)\begin{cases}\max \quad \mu^T Y_0 = V_{C^2R}^I, \\ \omega^T X_j - \mu^T Y_j \geqq 0, j = 1, \cdots, n \\ \omega^T X_0 = 1, \\ \omega \geqq 0, \mu \geqq 0\end{cases}
$$

分式规划$(C^2R)^I$ 与线性规划$(P_{C^2R}^I)$是等价的.由下面定理给出.

定理 1.1.1　分式规划问题$(C^2R)^I$ 与线性规划$(P_{C^2R}^I)$在下述意义下等价:

(i)　若 v^0, u^0 为$(C^2R)^I$ 的最优解,则

$$
\omega^0 = t^0 v^0, \quad \mu^0 = t^0 u^0
$$

为$(P_{C^2R}^I)$的最优解,并且二者的最优值相等,其中

$$
t^0 = \frac{1}{v^{0T} X_0};
$$

(ii)　若 ω^0, μ^0 为$(P_{C^2R}^I)$的最优解,则 ω^0, μ^0 也为$(C^2R)^I$ 的最优解,并且二者的最优值相等.

证　首先证(i).设 v^0, u^0 为$(C^2R)^I$ 的最优解.不难看出,$(P_{C^2R}^I)$的任意可行解 $\omega, \mu \neq 0$ 都为问题$(C^2R)^I$ 的可行解,故(注意 $\omega^T X_0 = 1$)

$$
\frac{u^{0T} Y_0}{v^{0T} X_0} \geqq \frac{\mu^T Y_0}{\omega^T X_0} = \mu^T Y_0,
$$

又由

$$
\frac{u^{0T} Y_0}{v^{0T} X_0} = t^0 (u^{0T} Y_0) = \mu^{0T} Y_0,
$$

故对$(P_{C^2R}^I)$的任意可行解 ω, μ 有(当 $\mu = 0$ 时,下式也成立)

$$
\mu^{0T} Y_0 \geqq \mu^T Y_0.
$$

而

$$
\omega^0 = t^0 v^0 = \frac{v^0}{v^{0T} X_0},
$$

$$
\mu^0 = t^0 u^0 = \frac{u^0}{v^{0T} X_0}
$$

为$(P_{C^2R}^I)$的可行解,因此 ω^0, μ^0 为$(P_{C^2R}^I)$的最优解,并且问题$(C^2R)^I$ 和$(P_{C^2R}^I)$的最优值相等.

以下证(ii).设 ω^0, μ^0 为$(P_{C^2R}^I)$的最优解.可知 $\omega^0 \geqslant 0, \mu^0 \geqslant 0$,并且 ω^0, μ^0 为问题$(C^2R)^I$ 的可行解.此外,对于问题$(C^2R)^I$ 的任意可行解 v, u,令

$$
t = \frac{1}{v^T X_0}, \quad \omega = tv, \quad \mu = tu
$$

不难看出，ω, μ 为($P^I_{C^2R}$)的可行解，于是有

$$\mu^{0T}Y_0 \geqq \mu^T Y_0 = \frac{u^T Y_0}{v^T X_0},$$

因为 $\omega^{0T}X_0=1$，故

$$\frac{\mu^{0T}Y_0}{\omega^{0T}X_0} = \mu^{0T}Y_0,$$

所以，对于问题$(C^2R)^I$ 的任意可行解 v, u，有

$$\frac{\mu^{0T}Y_0}{\omega^{0T}X_0} \geqq \frac{u^T Y_0}{v^T X_0},$$

因此，ω^0, μ^0 为问题$(C^2R)^I$ 的最优解，并且问题$(C^2R)^I$ 和($P^I_{C^2R}$)的最优值相等. 证毕.

线性规划($P^I_{C^2R}$)的对偶规划为

$$(D^I_{C^2R})\begin{cases} \min\ \theta, \\ \sum_{j=1}^{n} X_j\lambda_j \leqq \theta X_0, \\ \sum_{j=1}^{n} Y_j\lambda_j \geqq Y_0, \\ \lambda_j \geqq 0, \quad j=1,2,\cdots,n. \end{cases}$$

有如下定理.

定理 1.1.2　线性规划($P^I_{C^2R}$)和对偶规划($D^I_{C^2R}$)都存在最优解，并且最优值

$$V^I_{C^2R} \leqq 1.$$

证　对于线性规划($P^I_{C^2R}$)，令

$$\bar{\omega} = \frac{X_0}{\| X_0 \|^2},$$

$$\bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, 0, \cdots, 0)^T \in E^s,$$

其中

$$\bar{\mu}_1 = \min_{1\leqslant j\leqslant n} \frac{\bar{\omega}^T X_j}{y_{1j}} > 0,$$

显然有 $\bar{\omega}\geqslant 0$, $\bar{\mu}\geqslant 0$，并且

$$\bar{\omega}^T X_0 = 1$$

以及($j=1,2,\cdots,n$)

$$\bar{\omega}^T X_j - \bar{\mu}^T Y_j = \bar{\omega}^T X_j - \bar{\mu}_1 y_{1j} \geqq 0,$$

因此 $\bar{\omega}$, $\bar{\mu}$ 为($P^I_{C^2R}$)的可行解.

对于线性规划($D^I_{C^2R}$),令

$$\theta = 1,\quad \lambda = (0,\cdots,0,\overset{j_0}{1},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}} \in E^n,$$

显然 θ,λ 为($D^I_{C^2R}$)的可行解.由线性规划最优解存在性定理,知($P^I_{C^2R}$)和($D^I_{C^2R}$)都存在最优解,并且最优值相等.并且由

$$\mu^{\mathrm{T}} Y_0 \leqq \omega^{\mathrm{T}} X_0 = 1,$$

知

$$V^I_{C^2R} \leqq 1.$$

证毕.

由定理 1.1.1 知,当使用效率评价指数

$$h_0 = \frac{u^{\mathrm{T}} Y_0}{v^{\mathrm{T}} X_0}$$

时(即应用分式规划$(C^2R)^I$),与使用线性规划($P^I_{C^2R}$)得到的最优目标函数值是相同的,因此可以用线性规划($P^I_{C^2R}$)和($D^I_{C^2R}$)来定义决策单元的有效性.在文献[8]中,首次给出了决策单元为弱 DEA 有效的定义,这是因为由 Charnes 和 Cooper 等定义的 DEA 有效性与多目标规划的 Pareto 解等价,而弱 DEA 有效则与多目标规划的弱 Pareto 解等价(见第三节).

定义 1.1.1　若线性规划($P^I_{C^2R}$),($D^I_{C^2R}$)的最优值

$$V^I_{C^2R} = 1,$$

则称 DMU_{j_0}为弱 DEA 有效.

定义 1.1.2　若线性规划($P^I_{C^2R}$)存在最优解 ω^0,μ^0 满足 $\omega^0>0,\mu^0>0$,并且最优目标值

$$V^I_{C^2R} = \mu^{0\mathrm{T}} Y_0 = 1,$$

则称 DMU_{j_0}为 DEA 有效.

由定义 1.1.1 和定义 1.1.2 不难看出,若 DMU_{j_0}为 DEA 有效,则 DMU_{j_0}也为弱 DEA 有效.

当输入和输出数据给定后,对 n 个决策单元进行评价,实际上是相对有效性的评价,因为总会存在决策单元是 DEA 有效的.我们先给出一个引理.

引理 1.1.1　设 $\hat{\omega}\geqq 0,\hat{\mu}\geqq 0,(\hat{\omega}^{\mathrm{T}},\hat{\mu}^{\mathrm{T}})\neq 0$,满足

$$\hat{\omega}^{\mathrm{T}} X_j - \hat{\mu}^{\mathrm{T}} Y_j \geqq 0,\quad j = 1,\cdots,n.$$

若对某 $j_*(1\leqq j_*\leqq n)$有

$$\hat{\omega}^{\mathrm{T}} X_{j_*} - \hat{\mu}^{\mathrm{T}} Y_{j_*} = 0,$$

则 DMU_{j_*}为弱 DEA 有效.特别地,若 $\hat{\omega}>0,\hat{\mu}>0$,则 DMU_{j_*}为 DEA 有效.

证 令($\hat{\omega}^{\mathrm{T}} X_{j_*} > 0$)

$$\varpi = \frac{\hat{\omega}}{\hat{\omega}^{\mathrm{T}} X_{j_*}}, \qquad \bar{\mu} = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\omega}^{\mathrm{T}} X_{j_*}},$$

则 $\varpi \geqq 0$, $\bar{\mu} \geqq 0$, $(\varpi^{\mathrm{T}}, \bar{\mu}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \neq 0$,且满足

$$\varpi^{\mathrm{T}} X_j - \bar{\mu}^{\mathrm{T}} Y_j \geqq 0, \quad j = 1,2,\cdots,n, \quad \varpi^{\mathrm{T}} X_{j_*} = \bar{\mu}^{\mathrm{T}} Y_{j_*} = 1.$$

由于(P_{C^2R})的目标函数

$$\mu^{\mathrm{T}} Y_{j_*} \leqq 1,$$

故 ϖ, $\bar{\mu}$ 为($P^I_{C^2R}$)的最优解,且

$$V^I_{C^2R} = \bar{\mu}^{\mathrm{T}} Y_{j_*} = 1,$$

由定义 1.1.1,DMU_{j_*} 为弱 DEA 有效.

当 $\hat{\omega} > 0$, $\hat{\mu} > 0$ 时,有 $\varpi > 0$, $\bar{\mu} > 0$,由定义 1.1.2,DMU_{j_*} 为 DEA 有效.证毕.

引理 1.1.2 存在 $\bar{\varepsilon} > 0$,对 $\forall\ \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$,下面的线性规划存在可行解

$$(P_\varepsilon)\begin{cases} \max\ \mu^{\mathrm{T}} Y_0 \\ \omega^{\mathrm{T}} X_j - \mu^{\mathrm{T}} Y_j \geqq 0, \quad j = 1,\cdots,n, \\ \omega^{\mathrm{T}} X_0 = 1 \\ \omega \geqq \varepsilon \hat{e}, \quad \mu \geqq \varepsilon e \end{cases}$$

其中

$$\hat{e} = (1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}} \in E^m,$$
$$e = (1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}} \in E^s.$$

证 令

$$\hat{\omega}_i = \frac{x_{i0}}{\| X_0 \|^2}, \quad i = 1,\cdots,m,$$

$$\hat{\mu}_r = \varepsilon, \quad r = 1,\cdots,s,$$
$$\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}),$$

其中

$$\bar{\varepsilon} = \min\left\{ \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \hat{\omega}_i, \min_{1 \leqslant r \leqslant s} \frac{\hat{\omega}^{\mathrm{T}} X_j}{e^{\mathrm{T}} Y_j}, 1 \right\}.$$

可知

$$\hat{\omega} \geqq \varepsilon \hat{e}, \quad \hat{\mu} \geqq \varepsilon e,$$

$$\hat{\omega}^{\mathrm{T}} X_j - \hat{\mu}^{\mathrm{T}} Y_j = \hat{\omega}^{\mathrm{T}} X_j - \varepsilon e^{\mathrm{T}} Y_j \geqq 0, \quad j = 1,\cdots,n,$$

$$\hat{\omega}^{\mathrm{T}} X_0 = 1,$$

即 $\hat{\omega}, \hat{\mu}$为上面线性规划的可行解.证毕.

定理 1.1.3(存在性定理)　至少存在一个决策单元,它是 DEA 有效的.

证　考虑线性规划问题

$$(P_{\varepsilon}^{I})\begin{cases} \max\ \mu^{\mathrm{T}} Y_0 \\ \omega^{\mathrm{T}} X_j - \mu^{\mathrm{T}} Y_j \geqq 0, \quad j = 1,2,\cdots, n, \\ \omega^{\mathrm{T}} X_0 = 1, \\ \omega \geqq \varepsilon \hat{e}, \quad \mu \geqq \varepsilon e, \end{cases}$$

其中

$$\hat{e} = (1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}} \in E^m, \quad e = (1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}} \in E^s.$$

由引理 1.1.2,存在 $\varepsilon>0$ 使规划(P_ε)有可行解.由目标函数

$$\mu^{\mathrm{T}} Y_0 \leqq \omega^{\mathrm{T}} X_0 = 1,$$

知(P_ε)存在最优解,设其最优解为 ω^0, μ^0.

(i)　若存在 j_* ($1\leqq j_* \leqq n$),有

$$\omega^{0\mathrm{T}} X_{j_*} - \mu^{0\mathrm{T}} Y_{j_*} = 0,$$

由引理 1.1.1,DMU_{j_*} 为 DEA 有效.

(ii)　若 对 $j=1,2,\cdots, n$,均有

$$\omega^{0\mathrm{T}} X_j - \mu^{0\mathrm{T}} Y_j > 0,$$

令

$$\alpha = \min_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{ \frac{\omega^{0\mathrm{T}} X_j}{\mu^{0\mathrm{T}} Y_j} \right\} = \frac{\omega^{0\mathrm{T}} X_{j_*}}{\mu^{0\mathrm{T}} Y_{j_*}}$$

则 $\alpha>1$,并有

$$\omega^{0\mathrm{T}} X_j - (\alpha\mu^0)^{\mathrm{T}} Y_j \geqq 0, \quad j = 1,2,\cdots, n,$$

$$\omega^{0\mathrm{T}} X_0 = 1,$$

$$\omega^0 \geqq \hat{e} > 0, \quad \alpha\mu^0 \geqq \alpha e > 0,$$

因此 $\omega^0, \alpha\mu^0$ 为(P)的可行解,但却有

$$(\alpha\mu^0)^{\mathrm{T}} Y_0 > \mu^{0\mathrm{T}} Y_0,$$

此与 ω^0, μ^0 为(P)的最优解相矛盾.故情况(ii)不可能.证毕.

因为 DEA 有效也为弱 DEA 有效,由定理 1.1.3,必存在至少一个决策单元,它是弱 DEA 有效的.

例 1.1.2　考虑具有一种输入和一种输出的情况,其输入数据和输出数据由表 1.1.3 给出.不妨设(这里 $X_j\in E^1$, $Y_j\in E^1$, $j=1,\cdots, n$)

$$\frac{Y_0}{X_0} = \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \frac{Y_j}{X_j}$$

表 1.1.3

	1	2	…	j	…	n	
$m=1 \rightarrow$	X_1	X_2	…	X_j	…	X_n	
	Y_1	Y_2	…	Y_j	…	Y_n	$\rightarrow s=1$

此时$(P_{C^2R}^I)$为$(\omega \in E^1, \mu \in E^1)$

$$(P_{C^2R}^I)\begin{cases} \max\ \mu Y_0, \\ \omega X_j - \mu Y_j \geqq 0, \quad j = 1, \cdots, n, \\ \omega X_0 = 1, \\ \omega \geqq 0, \quad \mu \geqq 0. \end{cases}$$

由于$(P_{C^2R}^I)$的最优解 ω^0, μ^0 必满足 $\omega^0 > 0, \mu^0 > 0$ 故有

$$\frac{Y_j}{X_j} \leqq \frac{Y_0}{X_0} \leqq \frac{\omega^0}{\mu^0}, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

而 $\omega^0 X_0 = 1$,故知(P_{C^2R})的最优解为

$$\omega^0 = \frac{1}{X_0} > 0, \quad \mu^0 = \frac{1}{Y_0} > 0,$$

而且 $\mu^0 Y_0 = 1$,因此 DMU_{j_0} 为 DEA 有效.由本例可以看出,那些产出与投入比最大者(即“利率”最大者)必为 DEA 有效.在几何上,是斜率最大者为 DEA 有效.见图 1.1.1(其中 $j \neq j_0$).

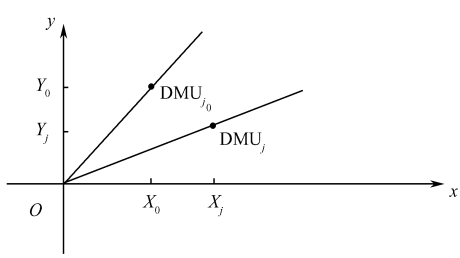


图 1.1.1

如果输入和输出的量纲发生变化,例如数据由表 1.1.4 给出,其中

$$\eta_i > 0, \quad i = 1, \cdots, m,$$

$$\rho_r > 0, \quad r = 1, \cdots, s.$$

表 1.1.4

$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
 & 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & n & \\
\hline
1 \rightarrow & \eta_1 x_{11} & \eta_1 x_{12} & \cdots & \eta_1 x_{1j} & \cdots & \eta_1 x_{1n} & \\
2 \rightarrow & \eta_2 x_{21} & \eta_2 x_{22} & \cdots & \eta_2 x_{2j} & \cdots & \eta_2 x_{2n} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
m \rightarrow & \eta_m x_{m1} & \eta_m x_{m2} & \cdots & \eta_m x_{mj} & \cdots & \eta_m x_{mn} & \\
\hline
 & \rho_1 y_{11} & \rho_1 y_{12} & \cdots & \rho_1 y_{1j} & \cdots & \rho_1 y_{1n} & \rightarrow 1 \\
 & \rho_2 y_{21} & \rho_2 y_{22} & \cdots & \rho_2 y_{2j} & \cdots & \rho_2 y_{2n} & \rightarrow 2 \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & \rho_s y_{s1} & \rho_s y_{s2} & \cdots & \rho_s y_{sj} & \cdots & \rho_s y_{sn} & \rightarrow s \\
\hline
\end{array}
$$

此时由表 1.1.4 给出的线性规划为

$$
(\hat{P}^I_{C^2R})\begin{cases}
\max \sum\limits_{r=1}^{s} \mu_r(\rho_r y_{r_0}), \\
\sum\limits_{i=1}^{m} \omega_i(\eta_i x_{i_j}) - \sum\limits_{r=1}^{s} \mu_r(\rho_i y_{r_j}) \geqq 0, \quad j=1,\cdots,n \\
\sum\limits_{i=1}^{m} \omega_i(\eta_i x_{i_0}) = 1, \\
\omega_i \geqq 0, \quad i=1,\cdots,m; \quad \mu_r \geqq 0, \quad r=1,\cdots,s.
\end{cases}
$$

有如下定理.

定理 1.1.4(有效性与量纲选取无关定理)　决策单元的弱 DEA 有效性和 DEA 有效性与输入和输出量纲的选取无关.

证　由$(P^I_{C^2R})$和$(\hat{P}^I_{C^2R})$可知,若 ω^0,μ^0 为$(P^I_{C^2R})$的最优解,令

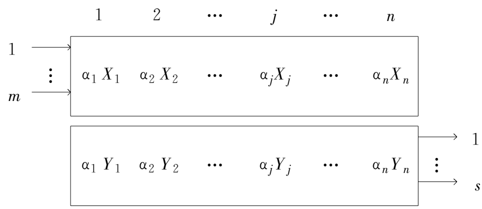
$$
\hat{\omega} = \left(\frac{\omega_1^0}{\eta_1}, \frac{\omega_2^0}{\eta_2}, \cdots, \frac{\omega_m^0}{\eta_m}\right)^{\mathrm{T}},
$$

$$
\hat{\mu} = \left(\frac{\mu_1^0}{\rho_1}, \frac{\mu_2^0}{\rho_2}, \cdots, \frac{\mu_r^0}{\rho_r}\right)^{\mathrm{T}},
$$

则 ω^0,μ^0 为$(P^I_{C^2R})$的最优解的充分必要条件是:$\hat{\omega},\hat{\mu}$为$(\hat{P}^I_{C^2R})$的最优解;$\omega^0>0$,$\mu^0>0$ 的充分必要条件是:$\hat{\omega}>0,\hat{\mu}>0$.由弱 DEA 有效和 DEA 有效的定义,知定理结论成立.证毕.

考虑由表 1.1.5 给出的数据,其中 $\alpha_j\in E^1,\alpha_j>0,j=1,\cdots,n$.表中 DMU_j 由(X_j,Y_j)同倍“增长”为$(\alpha_j X_j,\alpha_j Y_j),j=1,\cdots,n$.

表 1.1.5



定理 1.1.5(有效性与 DMU 同倍“增长”无关定理)　决策单元的弱 DEA 有效性和 DEA 有效性与决策单元对应的输入和输出的同倍“增长”无关.

证　由表 1.1.5 给出的线性规划为($\alpha_0=\alpha_{j_0}$)

$$\begin{cases}\max\ \mu^{\mathrm{T}}(\alpha_0 Y_0),\\ \omega^{\mathrm{T}}(\alpha_j X_j)-\mu^{\mathrm{T}}(\alpha_j Y_j)\geqq 0, \quad j=1,\cdots,n,\\ \omega^{\mathrm{T}}(\alpha_0 X_0)=1,\\ \omega\geqq 0, \quad \mu\geqq 0\end{cases}$$

由 $\alpha_j\in E^1$, $\alpha_j>0$, $j=1,\cdots,n$,不难看出:上述规划等价于线性规划

$$(P_{\mathrm{C^2R}}^{I})\begin{cases}\max\ \mu^{\mathrm{T}}(\alpha_0)Y_0,\\ \alpha_0(\omega^{\mathrm{T}}X_j-\mu^{\mathrm{T}}Y_j)\geqq 0, \quad j=1,\cdots,n,\\ \omega^{\mathrm{T}}(\alpha_0 X_0)=1,\\ \omega\geqq 0, \quad \mu\geqq 0.\end{cases}$$

由($P_{\mathrm{C^2R}}^{I}$)和($\bar{P}_{\mathrm{C^2R}}^{I}$)可知,若 ω^0, μ^0 为($P_{\mathrm{C^2R}}^{I}$)的最优解,令

$$\varpi=\frac{\omega^0}{\alpha_0}, \quad \bar{\mu}=\frac{\mu^0}{\alpha_0},$$

则 ω^0, μ^0 为($P_{\mathrm{C^2R}}^{I}$)的最优解的充分必要条件是: ϖ, $\bar{\mu}$ 为($\bar{P}_{\mathrm{C^2R}}^{I}$)的最优解; $\varpi>0$, $\bar{\mu}>0$ 的充分必要条件为: $\varpi>0$, $\bar{\mu}>0$.由弱 DEA 有效和 DEA 有效的定义,知定理结论成立.证毕.

由定理 1.1.5,当只有一种输出的时候(即 $s=1$),由表 1.1.2 给出的数据,可化为表 1.1.6 的数据形式,由此可以给出关于 DEA 有效性判别的一种几何解释(见例 1.1.3),其中 $Y_j=y_{1j}$, $j=1,\cdots,n$.

表 1.1.6

	1	2	…	j	…	n	
$1 \to$ ⋮ $m \to$	$\dfrac{X_1}{y_{11}}$	$\dfrac{X_2}{y_{12}}$	…	$\dfrac{X_j}{y_{1j}}$	…	$\dfrac{X_n}{y_{1n}}$	
	1	1	…	1	…	1	$\to s=1$

例 1.1.3　考虑由表 1.1.7 给出例子：

表 1.1.7

	1	2	3	
$1 \to$	2	6	9	
$2 \to$	6	6	3	
	2	1	3	$\to 1$

由定理 1.1.5,上面数据等价于由表 1.1.8 给出的数据(见表 1.1.6).

表 1.1.8

	1	2	3	
$1 \to$	1	6	3	
$2 \to$	3	6	1	
	1	1	1	$\to 1$

使用对偶线性规划$(D^I_{C^2R})$时,有$(1 \leqq j_0 \leqq 3)$

$$
(D^I_{C^2R})\begin{cases}
\min\ \theta, \\
\lambda_1 + 6\lambda_2 + 3\lambda_3 \leqq \theta x_{10}, \\
3\lambda_1 + 6\lambda_2 + \lambda_3 \leqq \theta x_{20}, \\
\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geqq 1, \\
\lambda_1 \geqq 0, \quad \lambda_2 \geqq 0, \quad \lambda_3 \geqq 0.
\end{cases}
$$

(i)　集合 T^1 如图 1.1.2 所示,其中

$$
T^1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{ll} \lambda_1 + 6\lambda_2 + 3\lambda_3 = x_1, & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 + \lambda_3 = x_2, & \lambda_1 \geqq 0, \lambda_2 \geqq 0, \lambda_3 \geqq 0 \end{array} \right\};
$$

(ii)　集合 T^2 如图 1.1.3 所示,其中

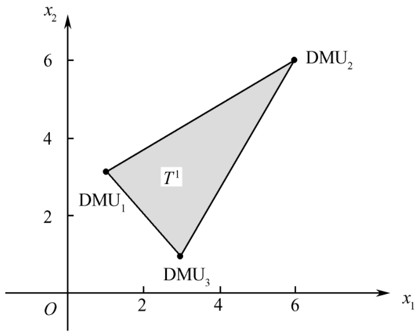


图 1.1.2

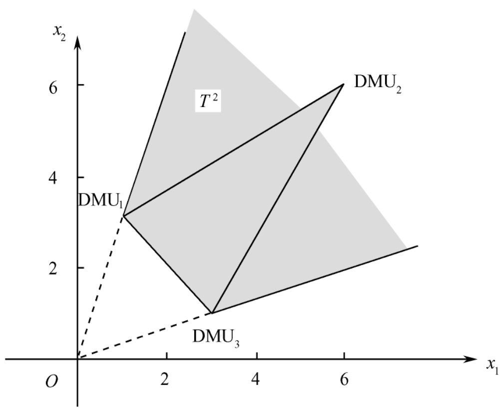


图 1.1.3

$$T^2=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\middle|\begin{array}{ll}\lambda_1+6\lambda_2+3\lambda_3=x_1, & \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\geqq 1,\\ 3\lambda_1+6\lambda_2+\lambda_3=x_2, & \lambda_1\geqq 0,\lambda_2\geqq 0,\lambda_3\geqq 0\end{array}\right\};$$

(iii)　集合 T^3 如图 1.1.4 所示,其中

$$T^3=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\middle|\begin{array}{ll}\lambda_1+6\lambda_2+3\lambda_3\leqq x_1, & \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\geqq 1,\\ 3\lambda_1+6\lambda_2+\lambda_3\leqq x_2, & \lambda_1\geqq 0,\lambda_2\geqq 0,\lambda_3\geqq 0\end{array}\right\}.$$

现在取 $j_0=2$,即 $x_{12}=6$, $x_{22}=6$,对应的线性规划($D^I_{C^2R}$)可表为(θ^0 为($D^I_{C^2R}$)的最优值)

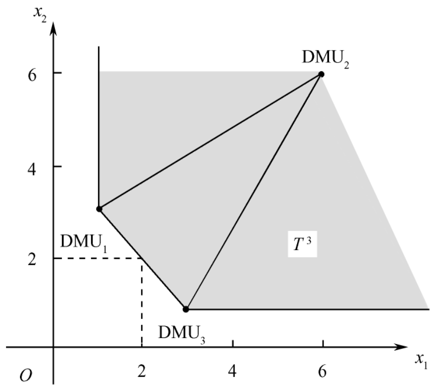


图 1.1.4

$$\begin{cases} \min \ \theta = \theta^0, \\ \theta \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \in T^3. \end{cases}$$

由图 1.1.4 可知效率指数

$$V_{C^2R}^I = \theta^0 = \frac{1}{3} < 1,$$

故 DMU_2 不为弱 DEA 有效;类似地,DMU_1 和 DMU_3 相应的效率指数 $V_{C^2R}^I = \theta^0 = 1$(实际上,$DMU_1$ 和 DMU_3 均为 DEA 有效).

以上讨论的都是具有输入倾向的 C^2R 模型(称为 Input-DEA 模型),这由对偶规划($D_{C^2R}^I$)可以看出,决策者追求的倾向是输入的减少,即求 θ 的最小.如果我们将分式规划$(C^2R)^I$ 改写成下面的形式:

$$(C^2R)^0 \begin{cases} \min \dfrac{v^T X_0}{u^T Y_0} = V_P^0, \\ \dfrac{v^T X_j}{u^T Y_j} \geqq 1, \quad j = 1,2,\cdots,n, \\ v \geqslant 0, \quad u \geqslant 0. \end{cases}$$

现在使用 C^2 变换

$$t = \frac{1}{u^T Y_0}, \quad \omega = tv, \quad \mu = tu.$$

则可化为如下的等价的线性规划:

$$
(P_{C^2R}^{0})\begin{cases}\min\ \omega^{T}X_0=V_{C^2R}^{0}\\ \omega^{T}X_j-\mu^{T}Y_j\geqq 0,\quad j=1,\cdots,n,\\ \mu^{T}Y_0=1,\\ \omega\geqq 0,\quad \mu\geqq 0,\end{cases}
$$

以及它的对偶规划

$$
(D_{C^2R}^{0})\begin{cases}\max\ z=V_{C^2R}^{0}\\ \sum\limits_{j=1}^{n}X_j\lambda_j\leqq X_0,\\ \sum\limits_{j=1}^{n}Y_j\lambda_j\geqq zY_0,\\ \lambda_j\geqslant 0,\quad j=1,\cdots,n.\end{cases}
$$

此时的目标函数值大于或等于 1.可以看出,决策者追求的是输出的增大,即求 z 的最大.与 Input-DEA 模型对称地,称($P_{C^2R}^{0}$)和($D_{C^2R}^{0}$)为 Output-DEA 模型(输出倾向的 C^2R 模型,简称输出 C^2R 模型).不难看出,对于输出 C^2R 模型,也有类似于输入 C^2R 模型的一些性质.特别值得指出的是:输出 DEA 模型在评估决策单元的规模收益状况(returns to scale)和“拥挤现象”(congestion)时是非常有用的(见文献[29],[30]).

对于 C^2R 模型,Input-DEA 模型($P_{C^2R}^{I}$),($D_{C^2R}^{I}$)和 Output-DEA 模型($P_{C^2R}^{0}$),($D_{C^2R}^{0}$)的最优解之间有如下的关系定理.

定理 1.1.6 考虑 C^2R 的输入模型($P_{C^2R}^{I}$)和输出模型($P_{C^2R}^{0}$):

$$
(P_{C^2R}^{I})\begin{cases}\max\ \mu^{T}Y_0=V_{C^2R}^{I},\\ \omega^{T}X_j-\mu^{T}Y_j\geqq 0,\quad j=1,\cdots,n,\\ \omega^{T}X_0=1,\\ \omega\geqq 0,\quad \mu\geqq 0\end{cases}
$$

和

$$
(P_{C^2R}^{0})\begin{cases}\min\ \omega^{T}X_0=V_{C^2R}^{0},\\ \omega^{T}X_j-\mu^{T}Y_j\geqq 0,\quad j=1,\cdots,n,\\ \mu^{T}Y_0=1,\\ \omega\geqq 0,\quad \mu\geqq 0,\end{cases}
$$

则有

(i) ($P_{C^2R}^{I}$)的($P_{C^2R}^{0}$)的最优值满足 $V_{C^2R}^{I}=\dfrac{1}{V_{C^2R}^{0}}$;

(ii) ω^{0},μ^{0} 为($P_{C^2R}^{I}$)的最优解,且 $\mu^{0T}Y_0=1$(即 DMU_{j_0} 为弱 DEA 有效)的

充分必要条件是：ω^0, μ^0 也为($P^0_{C^2R}$)的最优解，且 $\omega^{0T} X_0 = 1$.

证　与($P^I_{C^2R}$)等价的分式规划为

$$
(C^2R)^I \begin{cases} \max \dfrac{u^T Y_0}{v^T X_0} = V^I_P, \\ \dfrac{u^T Y_j}{v^T X_j} \leqq 1, \quad j = 1, \cdots, n, \\ u \geqslant 0, \quad v \geqslant 0. \end{cases}
$$

而与($P^0_{C^2R}$)等价的分式规划为

$$
(C^2R)^0 \begin{cases} \min \dfrac{v^T X_0}{u^T Y_0} = V^0_P, \\ \dfrac{v^T X_j}{u^T Y_j} \geqq 1, \quad j = 1, \cdots, n, \\ u \geqslant 0, \quad v \geqslant 0. \end{cases}
$$

不难看出有

$$
V^0_{C^2R} = V^0_P = \frac{1}{V_{P^I}} = \frac{1}{V^I_{C^2R}}.
$$

结论(i)证毕.

对于结论(ii)，当 DMU_{j_0} 为弱 DEA 有效时，有

$$
V^I_{C^2R} = \mu^{0T} Y_0 = 1,
$$

由结论(i)，

$$
\omega^{0T} X_0 = V^0_{C^2R} = \frac{1}{V^I_{C^2R}} = 1.
$$

此时，ω^0, μ^0 满足

$$
\begin{aligned}
&\omega^{0T} X_j - \mu^{0T} Y_j \geqq 0, \quad j = 1, \cdots, n, \\
&\omega^{0T} X_0 = \mu^{0T} Y_0 = 1, \\
&\omega^0 \geqq 0, \quad \mu^0 \geqq 0.
\end{aligned}
$$

即 ω^0, μ^0 也为($P^0_{C^2R}$)的最优解.反之，若 ω^0, μ^0 为($P^0_{C^2R}$)的最优解，且 $\omega^{0T} X_0 = 1$，类似可证明 ω^0, μ^0 也为($P^I_{C^2R}$)的最优解，且 $\mu^{0T} Y_0 = 1$.证毕.

定理 1.1.7　考虑 C^2R 的对偶输入模型和对偶输出模型：

$$
(D_{C^2R}^I)\begin{cases}\min\ \theta = V_{C^2R}^I, \\ \sum_{j=1}^n X_j\lambda_j \leqq \theta X_0, \\ \sum_{j=1}^n Y_j\lambda_j \geqq Y_0, \\ \lambda_j \geqq 0, \quad j=1,\cdots,n\end{cases}
$$

和

$$
(D_{C^2R}^0)\begin{cases}\max\ z = V_{C^2R}^0, \\ \sum_{j=1}^n X_j\lambda_j \leqq X_0, \\ \sum_{j=1}^n Y_j\lambda_j \geqq zY_0, \\ \lambda_j \geqq 0, \quad j=1,\cdots,n.\end{cases}
$$

则 λ^0,θ^0 为$(D_{C^2R}^I)$的最优解的充分必要条件是：$\frac{\lambda^0}{\theta^0}, z^0=\frac{1}{\theta^0}$为$(D_{C^2R}^0)$的最优解.

证　若 λ^0,θ^0 为$(D_{C^2R}^I)$的最优解,故必有 $\theta^0>0$,且

$$
\begin{cases}\sum_{j=1}^n X_j\lambda_j^0 \leqq \theta^0 X_0, \\ \sum_{j=1}^n Y_j\lambda_j^0 \geqq Y_0, \\ \lambda_j^0 \geqq 0, \quad j=1,2,\cdots,n,\end{cases}
$$

也即

$$
\begin{cases}\sum_{j=1}^n X_j\left(\frac{\lambda_j^0}{\theta^0}\right) \leqq X_0, \\ \sum_{j=1}^n Y_j\left(\frac{\lambda_j^0}{\theta^0}\right) \geqq \frac{1}{\theta^0} Y_0, \\ \left(\frac{\lambda_j^0}{\theta^0}\right) \geqq 0, \quad j=1,\cdots,n.\end{cases}
$$

可知$\frac{\lambda^0}{\theta^0}, z^0=\frac{1}{\theta^0}$为$(D_{C^2R}^0)$的可行解.

设 λ, z 为$(D_{C^2R}^0)$的任意可行解,不妨设 $z>0$(因为$(D_{C^2R}^0)$的最优值 $V_D^0\geqq 1>0$). 不难看出$\frac{\lambda}{z}, \theta=\frac{1}{z}$为$(D_{C^2R}^I)$的可行解,因 θ^0 为$(D_{C^2R}^I)$的最优值,故 $\theta^0\leqq\theta$,也即有

$$z^0 = \frac{1}{\theta^0} \geqq \frac{1}{\theta} = z.$$

因此$\frac{\lambda^0}{\theta^0}$, $z^0=\frac{1}{\theta^0}$为($D^0_{C^2R}$)的最优解.

类似地可证:若$\frac{\lambda^0}{\theta^0}$, $z^0=\frac{1}{\theta^0}$为($D^0_{C^2R}$)的最优解,则 λ^0, θ^0 为($D^I_{C^2R}$)的最优解.证毕.

第二节　具有非阿基米德无穷小的 C²R 模型

在评价决策单元是否为 DEA 有效时,如果利用原规划($P^I_{C^2R}$)

$$(P^I_{C^2R})\begin{cases}\max\ \mu^{\mathrm{T}} Y_0 = V^I_{C^2R},\\ \omega^{\mathrm{T}} X_j - \mu^{\mathrm{T}} Y_j \geqq 0, \quad j=1,\cdots,n,\\ \omega^{\mathrm{T}} X_0 = 1,\\ \omega \geqq 0, \quad \mu \geqq 0,\end{cases}$$

根据定义 1.1.2,需要判断是否存在最优解 ω^0, μ^0 满足

$$\omega^0 > 0,\ \mu^0 > 0,\ V^I_{C^2R} = \mu^{0\mathrm{T}} Y_0 = 1.$$

我们注意到($P^I_{C^2R}$)的对偶规划可以写为下面的形式

$$(D^I_{C^2R})\begin{cases}\min\ \theta,\\ \sum\limits_{j=1}^{n} X_j\lambda_j + S^- = \theta X_0,\\ \sum\limits_{j=1}^{n} Y_j\lambda_j - S^+ = Y_0,\\ \lambda_j \geqq 0, \quad j=1,\cdots,n,\\ S^- \geqq 0, \quad S^+ \geqq 0.\end{cases}$$

根据线性规划对偶理论中的“紧松定理”(实际上是线性规划“松紧定理”的逆定理,有的教课书中也称其为严格的互补条件.见附录 B.),需要判断($D^I_{C^2R}$)所有的最优解 λ^0, S^{-0}, S^{+0}, θ^0 都满足

$$\theta^0 = 1, \quad S^{-0} = 0, \quad S^{+0} = 0.$$

无论利用线性规划($P^I_{C^2R}$),还是利用线性规划($D^I_{C^2R}$),直接判断 DEA 有效性都是不容易的.

早在 1952 年,Charnes 在研究线性规划的“退化”情况时(见文献[31]),以及在 Charnes 和 Cooper 的书中(见文献[32]),通过引进非阿基米德无穷小的概念,成功地解决了计算上和技术上的困难.