

超常颗粒多相流体动力学

——圆柱状颗粒两相流

林建忠等 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书对圆柱状颗粒两相流场进行了系统的论述,内容包括颗粒的受力分析和取向分布;颗粒间的直接相互作用;单个和多个颗粒在流体中的沉降;含圆柱状颗粒的混合层、圆射流、边界层、槽道流、圆管流、楔形收缩流和 T 形槽道流场中颗粒的运动和取向及流场的流变特征;含圆柱状颗粒的槽道流、圆管流、边界层和 Taylor-Couette 流场的动力稳定性。

本书可供力学、工程热物理、材料、纺织、造纸、化工、医疗、环境保护及相关专业的科研人员、工程技术人员、教师及研究生和高年级本科生阅读。

图书在版编目(CIP)数据

超常颗粒多相流体动力学:圆柱状颗粒两相流/林建忠等著. —北京:科学出版社, 2008

ISBN 978-7-03-021127-9

I. 超… II. 林… III. 固体颗粒-二相流动 IV. O359

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 027246 号

责任编辑:张 静 于宏丽/责任校对:陈玉凤

责任印制:赵德静/封面设计:王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 3 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2008 年 3 月第一次印刷 印张: 20 3/4

印数: 1—2 500 字数: 387 000

定价: 58.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈科印〉)

前 言

多相流是流体力学的一个重要分支，其中流固两相流是多相流的重要组成部分。所谓流固两相流是指气体或液体中含有固体颗粒所形成的混合物的流动。流固两相流涉及流相和固相，流相一般视为连续介质，满足相应的连续性方程、运动方程、能量方程和本构方程；而固相所指的固体颗粒则包含三个重要参数：浓度、尺度和形状。固体颗粒浓度的高低决定了是否要考虑颗粒间及颗粒与流相的相互作用。固体颗粒尺度的大小决定了控制颗粒运动的作用力模式。而在一般流固两相流中，固体颗粒的形状都视为圆球。

尽管在很多的工程应用中，固体颗粒的形状近似为圆球，将颗粒视为圆球，既能使问题简化，又能满足必要的精度。但是，在自然界和工程应用中，偏离圆球形状的颗粒也极为常见。实验结果表明，圆球与非圆球颗粒在流体中运动时的阻力系数存在差异，差异的大小与偏离圆球的程度成正比，阻力系数的差异将导致颗粒运动特征的改变。因此，在这些情况下，若再采用圆球颗粒的假设，会带来大的偏差。

圆球颗粒形状的各向同性，其问题被处理起来也比较简单，非圆球颗粒一般不具备各向同性的性质。然而，在非圆球颗粒中，大量存在的是主轴上颗粒，其中最为典型的是圆柱状颗粒，很多非圆球颗粒的形状可以由圆柱来近似，因而圆柱状颗粒两相流具有广泛的应用前景。

在材料科学中，复合材料日益受到重视，而呈圆柱状的短纤维材料在复合材料中最常见。短纤维复合材料的注塑成型过程就是圆柱状颗粒两相流的流动过程，流动过程中由流动诱导的颗粒取向决定了成品的质量。对单一材料而言，玻璃制品成型时，玻璃纤维需用水进行喷淋以消除静电，消除的效果取决于水与玻璃纤维的相互作用。玻璃的易碎性来源于内部的应力集中，而应力集中则与玻璃处于熔液状态时纤维的取向有关。目前国际上一种新型的木质材料是将原木碎化成木纤维，然后对木纤维在高压下进行重组，从而形成质地坚硬的材料，这种材料可以取代现有的一些金属。在木纤维的重组过程中，气流与木纤维的相互作用起着关键的作用。

在纺织工业中，纺织品的成型与加工是呈圆柱状的短纤维分组成束、成片的过程，纤维在气流中的指向、均匀度、绕卷度、扭曲度等直接决定了成品的质地、强度和手感。在研究该两相流的流动特征及纤维运动和取向的基础上，就能对其进行控制，从而获得满足要求的纺织品。

在化学工业中，聚合物是常见的基质，液态下的聚合物应力由本构方程描述，推导该方程的主要手段是统计力学方法，该方法将聚合物视为离散的固体颗粒与流体的混合物，而圆柱状颗粒代表了一大类聚合物。颗粒在流体作用下的运动与取向、颗粒对流体的作用等决定了聚合物的宏观特性。

在造纸工业中，纸浆流动是两相流，固相是呈圆柱状的木纤维，纸张的抗拉性、厚度、质地、渗水等特性极大地依赖于纸浆在各道工序的流动过程中木纤维的浓度分布和取向分布。

在航运工业中，气力或液力输送已经成为一种主要的运输方式，而被输送介质有很多近似于圆柱状，如谷物、胶囊、木屑等。由于圆柱状颗粒的阻力系数与圆球颗粒不同，所以在系统的设计中，必须重新匹配开泵压力和给气（液）量。

流动减阻是应用流体力学研究的一个分支，在牛顿流体中添加哪怕是低浓度的圆柱状颗粒，也将改变流动的特性，颗粒取向与流体之间的耦合作用，能够起到减少流动阻力的作用。

此外，自然界中冰晶的形成及在大气中的迁移，圆柱状污染物的分布、扩散与沉降等，都说明圆柱状颗粒两相流具有普遍性。

与圆球颗粒相比，圆柱状颗粒多相流的研究难度更大，其主要原因有三：一是颗粒几何形状上的非各向同性和存在主轴的特点，使得除了确定颗粒的位置之外，还要确定颗粒的取向，这增加了描述颗粒运动的方程数量以及求解的难度；二是在相同的体积浓度下，圆柱状颗粒比圆球有更大的影响半径，因而颗粒间的相互影响以及颗粒与流体的作用更为明显；三是流体与圆柱状颗粒之间的相互作用力、混合物的应力与应变率的关系更加复杂。

对圆柱状颗粒两相流的研究涉及多相流动力学、流变学、湍流理论、流动稳定性理论、统计力学、多体动力学等多个学科分支。在圆柱状颗粒两相流的流动过程中，流体介质与颗粒相互影响，而颗粒之间也存在相互作用。颗粒的存在及运动改变了流体的特性，而颗粒在流体的作用下，也在不断地进行平移和转动。可见，圆柱状颗粒两相流构成了一个复杂的动力系统。虽然对这一流动系统的研究已取得了一定的成果，但是仍有大量问题没有得到解决。因此，对其进行研究不仅有学术价值，而且对相关的应用领域具有指导意义。

近十年来，作者与课题组成员一道对圆柱状颗粒两相流体动力学进行了系统、深入、广泛的研究，发展了 Jeffery 轨道理论，完善了圆柱颗粒沉降理论和含圆柱颗粒流场稳定性理论，建立了湍流场颗粒取向平均分布函数理论；深化了圆柱状颗粒动力学拉格朗日模型，提出了一般流场颗粒取向分布求解模型，建立了颗粒间持续接触作用模型；发现了沉降颗粒相互作用模式和最可几 T 形结构，构造了颗粒间持续接触作用综合参数，揭示了多种圆柱状颗粒两相流场中的颗粒运动规律和流变特性，确定了流动条件、颗粒参数与失稳特性的关系。本书是以

上成果的系统总结。

在本书即将出版之际，作者感谢国家杰出青年科学基金(No.19925210)、国家自然科学基金面上项目(No.10372090)、高等学校博士学科点专项科研基金(No.20030335001)及国家自然科学基金重点项目(No.10632070)的资助。感谢朱泽飞、石兴、游振江、王叶龙、张志超、张凌新、张卫峰、聂德明、周锟、万占鸿、张善亮、柴小川、沈苏华、孙科等，他们与作者一起取得了上述成果，发展了相应的理论。感谢科学出版社在本书出版过程中的全力支持与帮助。

欢迎读者对本书提出宝贵意见与批评指正。

林建忠

2007年10月于

浙 江 大 学
中国计量学院

常用基本符号说明

英文符号	量的含义
a :	颗粒半径
a_{ij} :	二阶取向张量分量
a_{ijkl} :	四阶取向张量分量
A :	面积
c :	颗粒体积分数, $c = \pi n L d^2 / 4$
C_d :	阻力系数
d :	颗粒直径, 涡核直径, 水力直径
D :	扩散系数
e :	单位矢量
f :	分布函数, 频率
F :	流体作用在颗粒上的力
\mathbf{F} :	流体作用在颗粒上的力矢量
F_i :	流体作用在颗粒上合力的张量形式
F'_i :	点力对流体的作用力
F'_i :	点力对流体作用力的张量形式
F_v :	流场体积力
G :	重力
g :	重力加速度
I :	转动惯量, 冲量
J :	角动量
k :	湍动能
\mathbf{K} :	动量
l :	颗粒半长
L :	颗粒长度, Lagrange 函数, 周长
L_c :	特征长度
m :	质量
M :	力矩
n :	单位体积内的颗粒数目

N :	颗粒总数
p :	流体压力
\boldsymbol{p} :	颗粒主轴矢量
P :	总压, 概率
\boldsymbol{P} :	流体压力矢量
$\dot{\boldsymbol{p}}$:	\boldsymbol{p} 的时间变化率, 指颗粒的转动速度
Q :	流量
(R, ϕ, z) :	柱坐标
(r, θ, ϕ) :	球坐标
r :	球半径
\boldsymbol{r} :	位置矢量
R :	圆柱半径
t :	时间
S :	球面
T :	温度
T_c :	特征时间
u, v, w :	笛卡儿速度分量
u_i :	速度的张量形式
U :	速度
U_c :	特征速度
\boldsymbol{u} :	流体速度矢量
\boldsymbol{u}_p :	颗粒速度矢量
v_R, v_ϕ, v_z :	柱坐标速度分量
v_r, v_θ, v_ϕ :	球坐标速度分量
v_i :	速度的张量形式
V :	体积
V_∞ :	均匀来流速度
\boldsymbol{W} :	流体涡度张量, $\boldsymbol{W} = (\nabla\boldsymbol{u} - \nabla\boldsymbol{u}^T) / 2$
x, y, z :	笛卡儿坐标
x_1, x_2, x_3 :	坐标分量
$\langle \boldsymbol{pp} \rangle$:	颗粒二阶取向张量
$\langle \boldsymbol{pppp} \rangle$:	颗粒四阶取向张量

希腊字母

量的含义

β : 颗粒长径比, 扰动频率

$\epsilon:$	湍流耗散率
$\epsilon:$	流体应变率张量, $\epsilon = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)/2$
$\phi:$	颗粒体积分数
$\dot{\gamma}:$	剪切率
$\theta:$	动量厚度
$\lambda:$	颗粒长径比参数, 等于 $(a^2 - 1)/(a^2 + 1)$
$\mu:$	流体动力黏度
$\mu_p:$	颗粒附加黏度
$\mu:$	涡黏度
$\bar{\mu}:$	悬浮流有效黏度系数
$\nu:$	流体运动黏度
$\rho:$	比重
$\sigma:$	扰动增长率
$\sigma:$	悬浮流总应力张量
$\sigma_p:$	颗粒附加应力
$\tau:$	弛豫时间, 剪切应力
$\omega:$	频率
$\omega:$	旋转角速度
$\dot{\omega}:$	旋转角加速度
$\Omega:$	碰撞算子
$\varphi:$	流函数
$\psi(\mathbf{p}):$	颗粒取向分布函数, 流函数
$\Psi:$	密度分布函数
$\zeta:$	球状系数

量纲为一的参数

$Kn:$	克努森 (Knudsen) 数
$Pe:$	佩克莱 (Peclet) 数, $Pe = \dot{\gamma} \sqrt{ \Delta } / D$
$Re:$	雷诺 (Reynolds) 数
Sr	施特鲁哈尔 (Strouhal) 数
$St:$	斯托克斯 (Stokes) 数

下角符号

	含义
p:	颗粒
b:	基本流

a:	平均
上角符号	含义
—:	平均
' :	脉动量

目 录

前言

常用基本符号说明

第一章 圆柱状颗粒在流场中的受力分析	1
1.1 研究概述	1
1.2 Stokes 力	1
1.2.1 Stokes 方程	2
1.2.2 点力	3
1.2.3 点力法	5
1.3 细长体理论	6
1.3.1 细长体引起的流场扰动速度及流体对细长体的合力	6
1.3.2 细长体理论的意义及其局限性	10
1.4 阻力系数	11
1.4.1 与长径比无关的阻力系数	11
1.4.2 以圆球情形为参考的阻力系数	11
1.5 压力梯度力	12
1.5.1 颗粒主轴沿流动方向	12
1.5.2 颗粒主轴垂直于流动方向	12
1.6 Magnus 力	13
1.6.1 颗粒主轴垂直于流动方向	13
1.6.2 颗粒主轴处于流场主流平面	14
1.7 Saffman 力	15
1.7.1 流场速度垂直于颗粒主轴的情形	16
1.7.2 流场速度平行于颗粒主轴的情形	17
1.8 Basset 力	18
1.9 附加质量力	19
1.10 阻力、升力与力矩的实验研究	19
1.10.1 实验装置和步骤	19
1.10.2 实验结果及分析	20
1.11 各种力的大小比较	22
1.11.1 计算参数和步骤	22

1.11.2 计算结果及分析	22
参考文献	25
第二章 圆柱状颗粒在流场中的取向分析	27
2.1 研究概述	27
2.2 圆柱颗粒的旋转与取向	28
2.2.1 Jeffery 轨道及其延拓	28
2.2.2 圆柱颗粒端点的轨迹	30
2.2.3 大量颗粒的取向分布	32
2.2.4 颗粒取向分布统计方法的改进	34
2.3 忽略取向扩散时颗粒的取向分布	38
2.3.1 Liouville 方程及其求解	38
2.3.2 双 Lagrange 法	39
2.3.3 颗粒在典型流场中的取向分布	41
2.4 弱取向扩散时颗粒的取向分布	48
2.4.1 求解方法	48
2.4.2 颗粒取向分布	50
2.5 强取向扩散时颗粒的取向分布	53
2.5.1 基本方程	53
2.5.2 求解方法	54
2.5.3 取向分布的数值计算结果	59
参考文献	60
第三章 圆柱状颗粒间的直接相互作用	63
3.1 研究概述	63
3.2 两颗粒的接触作用	64
3.2.1 物理模型	64
3.2.2 数学模型	65
3.2.3 下落颗粒的运动	66
3.2.4 润滑力的考虑	69
3.2.5 计算结果及讨论	70
3.2.6 体现两颗粒相互作用过程的综合参数	83
3.3 三颗粒的接触作用	84
3.3.1 数学方程	85
3.3.2 结果及其分析	85
3.4 颗粒间有相互碰撞作用的多颗粒运动模型	87
3.4.1 颗粒碰撞的确定	87

3.4.2	颗粒运动方程	91
3.4.3	Stokes 力	92
3.4.4	颗粒碰撞时的受力	93
3.4.5	润滑力	94
3.4.6	求解步骤	94
3.5	简单剪切流场中颗粒间有相互碰撞作用的多颗粒运动	94
3.5.1	流场及基本假设	94
3.5.2	计算模型	95
3.5.3	计算结果及讨论	98
	参考文献	102
第四章	圆柱状颗粒在流体中的沉降	104
4.1	研究概述	104
4.2	格子 Boltzmann 方法	106
4.2.1	方法简介	106
4.2.2	格子 Boltzmann 方法的基本原理	107
4.2.3	格子速度矢量分类	109
4.2.4	边界条件	110
4.3	无碰撞作用下圆柱状颗粒的沉降	111
4.3.1	单个颗粒的沉降	111
4.3.2	两个颗粒的沉降	118
4.4	有碰撞作用下圆柱状颗粒的沉降	127
4.4.1	颗粒碰撞作用模型	127
4.4.2	方法与模型的验证	128
4.4.3	单个颗粒在方管中的沉降	128
4.4.4	两个颗粒在方管中的沉降	132
4.4.5	两个颗粒在方管中沉降的实验结果	137
4.4.6	多个颗粒在方管中的沉降	137
4.5	考虑随机振荡因素的颗粒沉降	141
4.5.1	物理模型与方程	141
4.5.2	颗粒沉降运动方程的修正	143
4.5.3	计算结果与分析	145
	参考文献	147
第五章	含圆柱状颗粒的外部流动	150
5.1	研究概述	150
5.2	圆柱颗粒在混合层流场中的运动	152

5.2.1	流场物理模型与数学方法	152
5.2.2	颗粒运动方程	154
5.2.3	计算结果及讨论	154
5.2.4	实验研究	163
5.2.5	颗粒取向的连续介质模型描述	166
5.2.6	流场的附加应力	168
5.3	圆柱颗粒在圆射流场中的运动	172
5.3.1	流场物理模型与数学方法	172
5.3.2	计算结果及分析	175
5.3.3	颗粒对流场的反作用	177
5.4	圆柱颗粒在边界层流场中的运动	180
5.4.1	基本方程	180
5.4.2	计算结果及讨论	184
	参考文献	190
第六章	含圆柱状颗粒的内部流动	192
6.1	研究概述	192
6.2	圆柱颗粒在槽道流场中的运动	194
6.2.1	圆柱颗粒在层流中的运动	195
6.2.2	圆柱颗粒在湍流中的运动	200
6.2.3	圆柱颗粒在湍流场中的取向分布函数和流变特性	202
6.2.4	圆柱颗粒对槽流场的影响	209
6.2.5	下平面固定上平面运动情况下的颗粒取向	212
6.2.6	下平面固定上平面运动情况下的有效黏度	216
6.3	圆柱颗粒在圆管流场中的运动	220
6.3.1	圆柱颗粒在层流场中的运动	220
6.3.2	圆柱颗粒在湍流场中的运动	226
6.4	圆柱颗粒在楔形收缩流场中的运动	230
6.4.1	圆柱颗粒在层流场中的运动	231
6.4.2	圆柱颗粒在湍流场中的运动	239
6.5	圆柱颗粒在 T 形槽道流场中的运动	248
6.5.1	圆柱颗粒在层流场中的运动	248
6.5.2	圆柱颗粒在湍流场中的运动	251
	参考文献	258
第七章	含圆柱状颗粒流场的稳定性	262
7.1	研究概述	262

7.2 含圆柱颗粒槽道流场的稳定性	263
7.2.1 悬浮流基本方程	263
7.2.2 颗粒取向分布函数	263
7.2.3 颗粒附加应力	264
7.2.4 时间模式稳定性	265
7.2.5 空间模式稳定性	270
7.2.6 与流动稳定性相关的因素分析	275
7.2.7 实验研究	281
7.2.8 失稳阶段的颗粒减阻	283
7.3 含圆柱颗粒圆管流场的稳定性	286
7.3.1 流场描述	286
7.3.2 演化后的动量方程	286
7.3.3 稳定性方程	287
7.3.4 计算结果及分析	288
7.4 含圆柱颗粒边界层流场的稳定性	291
7.4.1 流场和基本方程	291
7.4.2 方程的化简	291
7.4.3 修正的 Orr-Sommerfeld 方程的推导	292
7.4.4 数值求解	293
7.4.5 计算结果及讨论	296
7.5 含圆柱颗粒 Taylor-Couette 流场的稳定性	299
7.5.1 模型与方程	299
7.5.2 计算方法	302
7.5.3 计算结果及讨论	303
7.5.4 流场中扰动能量分析	312
参考文献	314

第一章 圆柱状颗粒在流场中的受力分析

在圆柱状颗粒两相流中,经常把颗粒视为离散体,颗粒在流场中的运动轨迹、空间分布及取向分布取决于作用于颗粒上的力和力矩,可见流场作用在颗粒上的受力分析非常重要。由于一般的颗粒尺度比较小,而且绕颗粒的流动具有多样化的特征,所以颗粒在流场中的受力比较复杂。本章在对颗粒的受力分析中,假设颗粒为没有变形的刚性体。

1.1 研究概述

以往的研究在考虑颗粒受力时,往往忽略难以解析描述的外力,大多数研究只考虑了颗粒与流体间的拖曳力,少数考虑了附加质量力和 Basset 力,而 Saffman 力、Magnus 力、压力梯度力、热泳力及高频振荡效应等则很少考虑。

最早进行非圆球粒子受力研究的是 Jeffery^[1],他在速度梯度不变的低雷诺数 Stokes 流场中,计算了流场作用在椭球颗粒上的合力和力矩,得到了简单剪切流中椭球粒子的运动公式。Cox^[2]发展了 Jeffery 理论,在低雷诺数 Stokes 流场中,用一个级数来表示沿颗粒长度流体对颗粒作用力的分布,说明当以颗粒直径为特征长度的雷诺数趋向于零时,作用在颗粒单位长度上的力正比于流体和颗粒的相对速度。

Youngren 和 Acrives^[3]数值模拟了绕圆柱状颗粒的 Stokes 流场,得到了 Stokes 阻力。Loewenberg^[4]用边界积分方法,计算了长径比在 0.01~100 的颗粒在低频和高频振荡下,朝平行于和垂直于颗粒主轴的方向运动时的 Stokes 力、附加质量力和 Bessert 力,其中后两个力是首次得到,说明这些力与相同长径比下的椭球所受到的力不同。Zhu 等^[5,6]推导得到了圆柱状颗粒朝平行于和垂直于颗粒主轴的方向运动时受到的压力梯度力、Magnus 力、Saffman 力、热泳力和静电力。

圆柱状颗粒在流体中运动时,其主轴与流体运动方向的夹角直接影响到流体作用在颗粒上的力,而夹角的变化与颗粒受力的关系研究得较少。

1.2 Stokes 力

两相流场中一般都存在颗粒与流体的相对运动,由于颗粒的几何尺度一般都较小,且颗粒与流体的相对速度也较小,所以流体绕颗粒运动的流场雷诺数也较

小,于是流体的惯性力和黏性力相比可以忽略。1851年,英国力学家 Stokes 对于圆球在流体中缓慢运动时产生的流场,推导出了忽略惯性力情况下的精确解,因而就有了所谓的 Stokes 流动。要得到圆柱状颗粒在流体中缓慢运动的解,有必要先了解 Stokes 流动。

1.2.1 Stokes 方程

不可压缩牛顿流体满足的连续性方程和运动方程分别为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{F}_v - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.2.2)$$

式(1.2.2)左边第一项为流场局部速度随时间的变化,称非定常项;第二项为非均匀流场中因流体微团迁移而引起的流体惯性作用;右边三项分别表示质量力、压力和黏性力的作用。将式中的非定常项、惯性力项以及黏性力项进行比较,用特征时间 T_c 、特征长度 L_c 和特征速度 U_c 将这些项化为量纲为一的量,并用带“'”的量表示,于是有

$$\frac{\text{非定常力}}{\text{黏性力}} \propto \frac{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}}{\nu \nabla^2 \mathbf{u}} = \frac{\frac{U_c}{T_c} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'}}{\frac{\nu U_c}{L_c^2} \nabla'^2 \mathbf{u}'} \propto \frac{L_c^2}{\nu T_c} = St \quad (1.2.3)$$

$$\frac{\text{惯性力}}{\text{黏性力}} \propto \frac{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}}{\nu \nabla^2 \mathbf{u}} = \frac{\frac{U_c^2}{L_c} (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}'}{\frac{\nu U_c}{L_c^2} \nabla'^2 \mathbf{u}'} \propto \frac{U_c L_c}{\nu} = Re \quad (1.2.4)$$

式(1.2.4)当 Re 很小时,意味着惯性力远小于黏性力而可以忽略,于是式(1.2.2)可以简化为

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{F}_v - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.2.5)$$

定义宏观流动的特征时间 L_c/U_c 与非定常的特征时间 T_c 之比为施特鲁哈尔(Strouhal)数 Sr ,于是根据式(1.2.3)和式(1.2.4)有

$$\frac{L_c}{U_c T_c} = \frac{St}{Re} = Sr$$

由上式可知,若 Sr 为一有限值,则当 Re 趋向于 0 时, St 也应当趋向于 0,即可以忽略非定常项,于是式(1.2.5)可以进一步简化为

$$\nabla p = \rho \mathbf{F}_v + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.2.6)$$

该方程称为 Stokes 方程,满足该方程的流动称为 Stokes 流动。

1.2.2 点力

对无界区域中的 Stokes 流动,在忽略质量力的情况下,Stokes 方程(1.2.6)可以简化为

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.2.7)$$

根据 Stokes 流的唯一性定理,对无界区域,无穷远处的速度应当趋向于零,即

$$r \rightarrow \infty, |\mathbf{u}(\mathbf{r})| = O\left[\frac{1}{r}\right] \quad (1.2.8)$$

对于不可压缩流体,将方程(1.2.7)两边取散度得

$$\nabla \cdot \nabla p = \nabla^2 p = \nabla \cdot \mu \nabla^2 \mathbf{u} = \mu \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

即

$$\nabla^2 p = 0 \quad (1.2.9)$$

可见在忽略质量力且不可压缩的 Stokes 流动中,压力 p 满足 Laplace 方程。

在无穷远处的 p 趋于零时,由数理方程理论可以得到 Laplace 方程(1.2.9)的一般解为

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^{n+1}} P_n^m(\cos\theta) [C_{nm} \cos m\phi + D_{nm} \sin m\phi] \quad (1.2.10)$$

式中 r, θ, ϕ 是图 1.2.1 所示坐标系的三个坐标, P_n^m 是第一类连带 Legendre 多项式, C_{nm}, D_{nm} 是任意常数。

若取 $n=0$,则式(1.2.10)为

$$p = \frac{1}{r} P_0^0(\cos\theta) C_{00}$$

将其代入式(1.2.7)可知,当 $r \rightarrow \infty$ 时, $|\mathbf{u}(\mathbf{r})| = O(\ln r)$,不满足式(1.2.8)的唯一性条件。

若取 $n=1$,则可以得到满足式(1.2.8)的速度 $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ 。

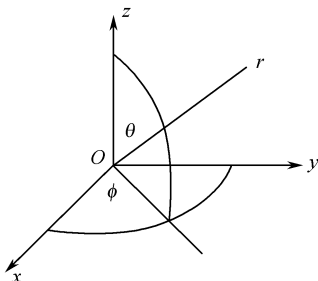


图 1.2.1 球坐标系

1. $n=1, m=0$ 的情形

在式(1.2.10)中取 $n=1, m=0$,可得

$$p = \frac{1}{r} P_1^0(\cos\theta) C_{10} \quad (1.2.11a)$$

根据图 1.2.1 的坐标系,式中 Legendre 多项式 $P_1^0(\cos\theta) = \cos\theta = z/r$,将常系数 C_{10} 记作 $2\mu C$,则式(1.2.11a)为

$$p = \frac{\cos\theta}{r} C_{10} = 2\mu C \frac{z}{r} \quad (1.2.11b)$$

将式(1.2.11b)代入式(1.2.7),用 u 、 v 、 w 表示沿 x 、 y 、 z 三个方向的速度分量,可得

$$\nabla^2 u = -6C \frac{xz}{r^5}, \quad \nabla^2 v = -6C \frac{yz}{r^5}, \quad \nabla^2 w = C \left[\frac{2}{r^3} - 6 \frac{z^2}{r^5} \right]$$

以上方程的一个特解是^[7]

$$u = C \frac{xz}{r^3}, \quad v = C \frac{yz}{r^3}, \quad w = C \frac{z^2}{r^3}$$

或用矢量表示为

$$\mathbf{u} = C \frac{z}{r^2} \mathbf{e}_r$$

但该特解不满足不可压流体的连续性条件 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ 。因此,为寻求既满足连续性条件又满足 Stokes 方程(1.2.7)的解,可设

$$\mathbf{u} = C \frac{z}{r} \mathbf{e}_r + \mathbf{u}' \quad (1.2.12)$$

于是只要 \mathbf{u}' 满足 $\nabla \cdot \mathbf{u}' = -Cz/r^3$ 和 $\nabla^2 \mathbf{u}' = 0$, \mathbf{u} 就满足连续性条件和方程(1.2.7)。可以证明,当 $\mathbf{u}' = -C\mathbf{e}_z/r$ 时能够满足以上两个条件,将其代入式(1.2.12)得

$$\mathbf{u} = C \left[\frac{z}{r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \mathbf{e}_z \right] \quad (1.2.13)$$

式(1.2.11b)和(1.2.13)构成了 Stokes 流动的一个特解,该解在原点 $r=0$ 处有一个奇点。以原点为中心, r 为半径做一个球,球面为 S ,球内的奇点对周围流体的作用力 \mathbf{F}' 与球面 S 外侧所受的流体合力平衡,即

$$\mathbf{F}' = - \oint_S \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{P} dS \quad (1.2.14)$$

根据球面 S 上流体的压力分布特征和球坐标与柱坐标的关系,式(1.2.14)可化为^[7]

$$\mathbf{F}' = - \oint_S \left[-p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \right] \mathbf{e}_r dS = 8\pi C\mu \mathbf{e}_z \quad (1.2.15)$$

可见 $n=1, m=0$ 的特解对应于一个点力,该力的指向与图 1.2.1 的 z 轴相同,因而又称为 z 方向的 Stokes 流子。用相同的方法可以证明, $r=0$ 处的奇点对周围流体作用的力矩为 0。

2. $n=1, m=1$ 的情形

在式(1.2.10)中取 $n=1, m=1$ 有

$$p = \frac{1}{r} P_1^1(\cos\theta) [C_{11} \cos\phi + D_{11} \sin\phi] \quad (1.2.16)$$

该式由两项组成,采用与前面相同的方法,可知这两项分别对应于指向为 x 方向和 y 方向的点力^[7]。

将式(1.2.15)中的 C 用 \mathbf{F}' 表示,即 $C = \mathbf{F}'/8\pi\mu\mathbf{e}_z$,然后将其代入式(1.2.13),就可以得到指向为 z 方向的点力所产生的速度和压力表达式(1.2.17a)。类似地,指向为 x 方向和 y 方向的点力所产生的速度和压力的表达式(1.2.17b)、(1.2.17c)也可以得到^[7]

$$\mathbf{u} = \frac{F'_z}{8\pi\mu} \left[\frac{z}{r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \mathbf{e}_z \right]; \quad p = \frac{F'_z}{4\pi} \frac{z}{r^3} \quad (1.2.17a)$$

$$\mathbf{u} = \frac{F'_x}{8\pi\mu} \left[\frac{x}{r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \mathbf{e}_x \right]; \quad p = \frac{F'_x}{4\pi} \frac{x}{r^3} \quad (1.2.17b)$$

$$\mathbf{u} = \frac{F'_y}{8\pi\mu} \left[\frac{y}{r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \mathbf{e}_y \right]; \quad p = \frac{F'_y}{4\pi} \frac{y}{r^3} \quad (1.2.17c)$$

式中 F'_x 、 F'_y 、 F'_z 分别表示 \mathbf{F}' 沿 x 、 y 、 z 方向的分量,式(1.2.17a)~(1.2.17c)的张量形式为

$$v_i = \frac{F'_j}{8\pi\mu} \left[\frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{x_i x_j}{r^3} \right]; \quad p = \frac{F'_j}{4\pi} \frac{x_j}{r^3} \quad (1.2.18)$$

1.2.3 点力法

点力法是计算圆球颗粒在无界的 Stokes 流场中受力的一种近似方法。当一个圆球在流场中运动或流体绕过一个静止的圆球时,圆球对流场会产生扰动,从而引起流场速度和压力分布的变化,这种扰动可以用一个位于圆球球心的点力的扰动来代替,通过圆球球面的边界条件便可以确定点力的大小。

点力法最初由 Burgers^[8] 提出,半径为 a 的圆球位于无界的流场中,均匀来流的速度为 \mathbf{V}_∞ ,方向与 z 方向相同,假设在圆球的球心有一个大小待定的点力 \mathbf{F}' ,该力产生的扰动速度 \mathbf{u} 由式(1.2.17)表示,则流场的实际总速度为 $\mathbf{u} = \mathbf{V}_\infty + \mathbf{u}$ 。然而,不管点力 \mathbf{F}' 如何取值,都不可能使球面上每一点的速度 \mathbf{u} 满足无滑移条件。因此,为了使得点力扰动能够更逼近圆球的真实扰动,Burgers 提出在球面上 \mathbf{u} 的平均值应满足如下无滑移条件

$$\int_{r=a} \mathbf{u}_i dS = \int_{r=a} (\mathbf{V}_\infty + \mathbf{u}) dS = 0$$

由上式可以求得式(1.2.17a)~(1.2.17c)中的 $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, $F'_z = -6\pi\mu V_\infty a$ 。由于 \mathbf{F}' 是表示点力对流体的作用力,那么其反作用力就是周围流体对圆球的合力

$$\mathbf{F} = 6\pi\mu \mathbf{V}_\infty a \quad (1.2.19)$$

该式与解析解给出的 Stokes 阻力公式相同。

1.3 细长体理论

在圆柱状颗粒两相流中, 流场通常也属于 1.2 节中所描述的 Stokes 流动, 即流体的惯性力与黏性力相比可以忽略, 但 1.2 节中描述的是圆球颗粒的运动。为了描述圆柱状颗粒的运动, 首先将颗粒视为如图 1.3.1 所示的细长体。所谓细长体指的是与主轴垂直的截面尺度远小于长度的物体, 圆柱状颗粒通常可以视为细长体。一个细长体在流场中运动或流体绕过一个静止的细长体时, 流场的速度和压力分布将发生变化。

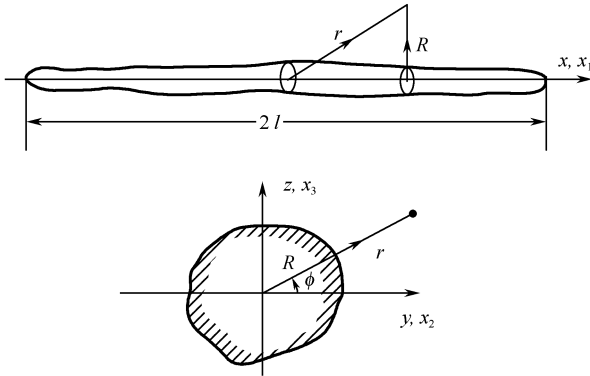


图 1.3.1 细长体示意图

1.3.1 细长体引起的流场扰动速度及流体对细长体的合力

Batchelor^[9]于 1970 年提出了细长体理论, 即在无界区域中流体绕细长体运动或细长体在无界区域中运动时, 细长体对流场的扰动可以用沿细长体长度适当分布的点力所引起的流体运动来近似, 而点力及其点力法已在 1.2.2 节和 1.2.3 节中叙述。

如图 1.3.1 所示, 细长体的长度为 $2l$, 其主轴方向为 x (定义为 x_1) 方向, 坐标原点位于细长体的几何中心点, 细长体沿主轴方向的坐标区域为 $-l \leq x \leq l$ 。细长体与主轴垂直的截面可以是任意形状, 截面上的任意一点由 (ϕ, R) 描述, 其中 $R = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$, 细长体表面上的任意一点表示为

$$R = R_0(\phi, x) \quad (1.3.1)$$

考虑细长体以速度 $\mathbf{u}_p = u_{p,i} \mathbf{e}_i$ 平移的情形, 把坐标轴固定在细长体上, 此时来流速度就为 $-\mathbf{u}_p$ 。根据式(1.2.17), 位于原点的点力在无界区域流场中引起的流场的扰动速度为

$$v_i = \frac{F'_j}{8\pi\mu} \left[\frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{x_i x_j}{r^3} \right] \quad (1.3.2)$$

那么在整个细长体 $-l \leq x \leq l$ 上, 密度分布为 $F'_j(\mathbf{x}')$ 的点力所引起的流场的扰动速度为^[9]

$$v_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi\mu} \int_{-l}^l \left\{ \frac{F'_i(\mathbf{x}')}{[(x-x')^2 + R^2]^{1/2}} + \frac{(x_i-x'_i)(x_j-x'_j)F'_j(\mathbf{x}')}{[(x-x')^2 + R^2]^{3/2}} \right\} dx' \quad (1.3.3)$$

根据图 1.3.1 的坐标系, 式中 $x'_1 = x'$, $x'_2 = 0$, $x'_3 = 0$ 。为了满足流体沿细长体表面的无滑移条件, 必须适当选择未知函数 $F'_j(\mathbf{x}')$, 使得在物面上满足

$$v_i + (-u_{pi}) = 0 \quad (1.3.4)$$

当 $F'_j(\mathbf{x}')$ 确定后, 就可以通过式(1.3.3)求解由细长体引起的流场的扰动速度。

1. $F'_j(\mathbf{x}')$ 为常数的情形

Batchelor 证明, 若式(1.3.3)中的 $F'_j(\mathbf{x}')$ 取常数, 可以得到近似满足边界条件(1.3.4)的扰动速度 $v_i(\mathbf{x})$ 。首先, 当 $F'_j(\mathbf{x}')$ 为常数时, 式(1.3.3)可以化为

$$v_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi\mu} \left\{ F'_i \int_{-l}^l \frac{dx'}{[(x-x')^2 + R^2]^{1/2}} + F'_1 \int_{-l}^l \frac{(x_i-x'_i)(x_1-x'_1)dx'}{[(x-x')^2 + R^2]^{3/2}} \right. \\ \left. + F'_2 \int_{-l}^l \frac{(x_i-x'_i)(x_2-x'_2)dx'}{[(x-x')^2 + R^2]^{3/2}} + F'_3 \int_{-l}^l \frac{(x_i-x'_i)(x_3-x'_3)dx'}{[(x-x')^2 + R^2]^{3/2}} \right\} \quad (1.3.5)$$

为了积分式(1.3.5), Batchelor 提出了渐进求解方法^[9], 即对于积分

$$I = \int_{-l}^l \frac{dx'}{[(x-x')^2 + R^2]^{1/2}}, \quad I'_n = \int_{-l}^l \frac{R^{2-n}(x-x')^n dx'}{[(x-x')^2 + R^2]^{3/2}} \quad (n = 0, 1, 2) \quad (1.3.6)$$

当 $R/l \ll 1$, 且在不靠近细长体两端的区域有

$$\left. \begin{aligned} I &\approx 2 \ln \frac{2l}{R^*} + 2 \ln \frac{(1-x^2/l^2)^{1/2}}{R/R^*} \\ I'_0 &\approx 2, \quad I'_1 \approx 0, \quad I'_2 \approx I - 2 \end{aligned} \right\} \quad (1.3.7)$$

式中 R^* 是表征细长体截面的一个当量半径, I, I'_0, I'_2 的误差为 R^2/l^2 阶, 而 I'_1 的误差为 R/l 阶。

将式(1.3.6)的第一式代入式(1.3.5), 考虑到 $x'_1 = x'$, $x'_2 = 0$, $x'_3 = 0$, 且式(1.3.5)右边第二项中 x_i 的 i 取 2 和 3 时有 $I'_i = 0$, 那么式(1.3.5)可化为

$$v_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi\mu} \left\{ IF'_i + F'_1 \int_{-l}^l \frac{(x_1-x')^2 dx'}{[(x-x')^2 + R^2]^{3/2}} \right.$$

$$+ F_2' \int_{-l}^l \frac{(x_i - x_i') x_2 dx'}{[(x - x')^2 + R^2]^{3/2}} + F_3' \int_{-l}^l \frac{(x_i - x_i') x_3 dx'}{[(x - x')^2 + R^2]^{3/2}} \left\} \quad (1.3.8)$$

根据式(1.3.6)的第二式以及式(1.3.7),式(1.3.8)右边第二项对应 $l_2' \approx n-2$, 右边后两项中 x_i 的 i 取 1 时为 $F_1' = 0$, 因此 i 只剩下取 2 和 3, 而 $x_2' = x_3' = 0$, 令 $R_i = \delta_{i2} x_2 + \delta_{i3} x_3$, 则式(1.3.8)可化为

$$\begin{aligned} v_i(\mathbf{x}) &= \frac{1}{8\pi\mu} \left\{ IF_i' + \delta_{i1} F_1'(I-2) + F_2' \int_{-l}^l \frac{R_i x_2 dx'}{[(x - x')^2 + R^2]^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. + F_3' \int_{-l}^l \frac{R_i x_3 dx'}{[(x - x')^2 + R^2]^{3/2}} \right\} \\ &= \frac{1}{8\pi\mu} \left\{ IF_i' + \delta_{i1} F_1'(I-2) + F_2' \frac{R_i x_2}{R^2} \int_{-l}^l \frac{R^2 dx'}{[(x - x')^2 + R^2]^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. + F_3' \frac{R_i x_3}{R^2} \int_{-l}^l \frac{R^2 dx'}{[(x - x')^2 + R^2]^{3/2}} \right\} \\ &= \frac{1}{8\pi\mu} \left[IF_i' + \delta_{i1} F_1'(I-2) + 2 \frac{R_i x_2}{R^2} F_2' + 2 \frac{R_i x_3}{R^2} F_3' \right] \\ &= \frac{1}{8\pi\mu} \left[IF_i' + \delta_{i1} F_1'(I-2) + 2 \frac{R_i R_j}{R^2} F_j' \right] \\ &= \frac{1}{8\pi\mu} \left[I(F_i' + \delta_{i1} F_1') - 2\delta_{i1} F_1' + 2 \frac{R_i R_j}{R^2} F_j' \right] \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Batchelor 定义了一个特征小量

$$\epsilon = \left[\ln \frac{2l}{R^*} \right]^{-1} \quad (1.3.10)$$

于是,将式(1.3.7)和式(1.3.10)代入式(1.3.9)得^[9]

$$v_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\mu} \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{(1 - x^2/l^2)^{1/2}}{R/R^*} \right] (F_i' + \delta_{i1} F_1') - \delta_{i1} F_1' + \frac{R_i R_j}{R^2} F_j' \right\} \quad j = 2, 3 \quad (1.3.11)$$

2. $F_j'(\mathbf{x}')$ 为 x 的线性函数的情形

当 $F_j'(\mathbf{x}')$ 为 x 的线性函数时,与 $F_j'(\mathbf{x}')$ 为常数类似,对于积分

$$J = \int_{-l}^l \frac{x' dx'}{[(x - x')^2 + R^2]^{1/2}}, \quad J_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \frac{R^{2-n} (x - x')^n x' dx'}{[(x - x')^2 + R^2]^{3/2}} \quad (n = 0, 1, 2) \quad (1.3.12)$$

当 $R/l \ll 1$ 且不靠近细长体两端时,可以得到^[9]

$$J \approx \frac{x}{l} \left[2 \ln \frac{2l}{R^*} + 2 \ln \frac{(1 - x^2/l^2)^{1/2}}{R/R^*} - 2 \right] \quad (1.3.13)$$

$$J'_0 \approx 2x/l \quad J'_1 \approx 0, \quad J'_2 \approx J - (2x/l)$$

式中 J 、 J'_0 、 J'_2 的误差为 R^2/l^2 阶, 而 J'_1 的误差为 R/l 阶。

由于 $F'_j(\mathbf{x}')$ 为 x 的线性函数, 式(1.3.3)的右边第一项可写为

$$\int_{-l}^l \frac{F'_i(\mathbf{x}') dx'}{[(x-x')^2 + R^2]^{1/2}} = F'_i(x) I + \int_{-l}^l \frac{F'_i(\mathbf{x}') - F'_i(x)}{[(x-x')^2 + R^2]^{1/2}} dx' \quad (1.3.14)$$

式中的 I 见式(1.3.6)和式(1.3.7)。Tuck^[10]发现, 当 $R/l \ll 1$ 时, 可以近似地将式(1.3.14)右边第二项分母中的 R^2 去掉, 于是将式(1.3.7)代入式(1.3.14)得

$$\int_{-l}^l \frac{F'_i(\mathbf{x}') dx'}{[(x-x')^2 + R^2]^{1/2}} \approx F'_i(x) \left[\frac{2}{\epsilon} + 2 \ln \frac{(1 - x^2/l^2)^{1/2}}{R/R^*} \right] + \int_{-l}^l \frac{F'_i(\mathbf{x}') - F'_i(x)}{|x-x'|} dx' \quad (1.3.15)$$

与 $F'_j(\mathbf{x}')$ 为常数的情形类似, 式(1.3.3)右边第二项的积分可写为

$$\int_{-l}^l \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j) F'_j(\mathbf{x}')}{[(x-x')^2 + R^2]^{3/2}} dx'$$

$$= \int_{-l}^l \frac{(x_i - x'_i)(x_1 - x'_1) F'_1(\mathbf{x}')}{[(x-x')^2 + R^2]^{3/2}} dx' + \int_{-l}^l \frac{(x_i - x'_i)(x_2 - x'_2) F'_2(\mathbf{x}')}{[(x-x')^2 + R^2]^{3/2}} dx'$$

$$+ \int_{-l}^l \frac{(x_i - x'_i)(x_3 - x'_3) F'_3(\mathbf{x}')}{[(x-x')^2 + R^2]^{3/2}} dx'$$

因为 $x'_1 = x'$, $x'_2 = 0$, $x'_3 = 0$, 且 $F'_j(\mathbf{x}') \sim x'$, 上式右边第一项中 x_i 的 i 取 2 和 3 时为 $J'_1 = 0$, 右边后两项中 x_i 的 i 取 1 时为 $J'_1 = 0$, 这样 i 只剩下取 2 和 3, 令 $R_i = \delta_{i2} x_2 + \delta_{i3} x_3$, 则上式可化为

$$\int_{-l}^l \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j) F'_j(\mathbf{x}')}{[(x-x')^2 + R^2]^{3/2}} dx'$$

$$= \int_{-l}^l \frac{(x_i - x'_i)^2 x'}{[(x-x')^2 + R^2]^{3/2}} dx' + \int_{-l}^l \frac{r_i x_2 x'}{[(x-x')^2 + R^2]^{3/2}} dx'$$

$$+ \int_{-l}^l \frac{r_i x_3 x'}{[(x-x')^2 + R^2]^{3/2}} dx'$$

由式(1.3.12)和式(1.3.13), 再结合式(1.3.15), 上式化为^[9]

$$\int_{-l}^l \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j) F'_j(\mathbf{x}')}{[(x-x')^2 + R^2]^{3/2}} dx'$$

$$= \delta_{i1} I J'_2 + \frac{R_i x_2}{R^2} \int_{-l}^l \frac{R^2 x'}{[(x-x')^2 + R^2]^{3/2}} dx' + \frac{R_i x_3}{R^2} \int_{-l}^l \frac{R^2 x'}{[(x-x')^2 + R^2]^{3/2}} dx'$$

$$\begin{aligned}
&= \delta_{i1} (lJ - 2x) + \delta_{i2} \frac{R_i x_2}{R^2} lJ'_0 + \delta_{i3} \frac{R_i x_3}{R^2} lJ'_0 \\
&= \delta_{i1} lJ - 2x\delta_{i1} + \delta_{i2} \frac{R_i x_2}{R^2} 2x + \delta_{i3} \frac{R_i x_3}{R^2} 2x \\
&= \delta_{i1} \int_{-l}^l \frac{F'_1(x') dx'}{\{(x-x')^2 + R^2\}^{1/2}} - 2\delta_{i1} F'_1(x) + 2 \frac{R_i R_j}{R^2} F'_j(x) \\
&= \delta_{i1} F'_1(x) \left[\frac{2}{\epsilon} + 2 \ln \frac{(1-x^2/l^2)^{1/2}}{R/R^*} \right] \\
&\quad + \delta_{i1} \int_{-l}^l \frac{F'_1(x') - F'_1(x)}{|x-x'|} dx' - 2\delta_{i1} F'_1(x) + 2 \frac{R_i R_j}{R^2} F'_j(x) \quad (1.3.16)
\end{aligned}$$

将式(1.3.15)和式(1.3.16)代入式(1.3.3)得

$$\begin{aligned}
v_i(\mathbf{x}) &= \frac{1}{8\pi\mu} \left\{ F'_i(x) \left[\frac{2}{\epsilon} + 2 \ln \frac{(1-x^2/l^2)^{1/2}}{R/R^*} \right] + \int_{-l}^l \frac{F'_i(x') - F'_i(x)}{|x-x'|} dx' \right. \\
&\quad + \delta_{i1} F'_1(x) \left[\frac{2}{\epsilon} + 2 \ln \frac{(1-x^2/l^2)^{1/2}}{R/R^*} \right] \\
&\quad \left. + \delta_{i1} \int_{-l}^l \frac{F'_1(x') - F'_1(x)}{|x-x'|} dx' - 2\delta_{i1} F'_1(x) + 2 \frac{R_i R_j}{R^2} F'_j(x) \right\} \\
&= \frac{1}{4\pi\mu} \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{(1-x^2/l^2)^{1/2}}{R/R^*} \right] [F'_i(x) + \delta_{i1} F'_1(x)] - \delta_{i1} F'_1(x) + \frac{R_i R_j}{R^2} F'_j(x) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{8\pi\mu} \left[\int_{-l}^l \frac{F'_i(x') - F'_i(x)}{|x-x'|} dx' + \delta_{i1} \int_{-l}^l \frac{F'_1(x') - F'_1(x)}{|x-x'|} dx' \right] \\
&= \frac{1}{4\pi\mu} \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{(1-x^2/l^2)^{1/2}}{R/R^*} \right] [F'_i(x) + \delta_{i1} F'_1(x)] - \delta_{i1} F'_1(x) + \frac{R_i R_j}{R^2} F'_j(x) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{8\pi\mu} (\delta_{ij} + \delta_{i1} \delta_{j1}) \int_{-l}^l \frac{F'_j(x') - F'_j(x)}{|x-x'|} dx' \quad (1.3.17)
\end{aligned}$$

由式(1.3.11)或式(1.3.17),再根据细长体表面上的边界条件(1.3.4),就可以确定 F_j , 由于 F_j 取代的是细长体的点力对流体的作用力, 所以其反作用力就是细长体周围流体对细长体的合力。

1.3.2 细长体理论的意义及其局限性

细长体理论的建立对圆柱状颗粒两相流的研究具有重要意义, 主要体现在以下几个方面。

1) 减少了计算量

一般而言, 在圆柱状颗粒两相流中, 颗粒的尺度远小于流场的特征尺度, 如果要直接计算流场和颗粒的运动, 计算网格势必要很细, 就算采用自适应的无结构网

格,如果要模拟实际的流场,计算量也难以接受。细长体理论的建立使得在颗粒雷诺数很小以及可以忽略流体惯性项的前提下,能对颗粒的运动进行直接模拟。

2) 为建立圆柱状颗粒两相流的本构方程打下了基础

如果把圆柱状颗粒两相流视为一种单一连续介质,则必须要建立合适的本构方程。细长体理论为圆柱状颗粒两相流本构方程的建立奠定了基础。

同时,细长体理论也有如下局限性。

1) 无限长假设

细长体理论的基本假设是颗粒为无限长,尽管经过修正后也可以用于有限长的情形,但在细长体端部附近流场得到的结果误差会大一些,而且圆柱状颗粒的这种端部效应比椭球形颗粒更为明显。

2) 极低雷诺数假设

该假设使得细长体理论不适用于颗粒尾流影响较大以及流体惯性影响不能忽略的情况。

3) 难以准确描述颗粒间的相互作用

当两个颗粒靠得很近时,可以通过引入润滑力,使由细长体理论得到的颗粒受力情况趋于合理,同时也保证颗粒之间不会穿透,但润滑力的引入使得颗粒周围的流场结构难以较好地描述。

1.4 阻力系数

1.3 节中叙述了圆柱状颗粒在 Stokes 流场中运动时流体作用在颗粒上的力。在实际应用中,往往也通过确定阻力系数来得到流体作用在颗粒上的力,其中最常见的是对圆球的阻力系数进行修正,从而得到圆柱状颗粒的阻力系数。

1.4.1 与长径比无关的阻力系数

圆柱状颗粒在流体中运动的阻力系数一般是雷诺数和颗粒长径比 L/d 的函数,但是当长径比远小于 1 时,阻力系数与长径比无关^[11]。Unnikrishnana 和 Chhabra^[12] 认为,在 $0.0513 < L/d < 2$ 的范围内,阻力系数与长径比无关且表示为

$$C_{d\infty} = \frac{17.5}{Re_{\infty}} (1 + 0.68 Re_{\infty}^{0.43}) \quad (1.4.1)$$

式中 $C_{d\infty}$ 、 Re_{∞} 分别是圆柱颗粒在无界流场运动时的阻力系数和雷诺数。

1.4.2 以圆球情形为参考的阻力系数

圆柱状颗粒在流体中运动的阻力系数还可用圆柱颗粒与圆球颗粒在相同环境下稳态沉降速度的比值来表示,即引进一个球状系数 ζ ,它表示与圆柱颗粒相同体

积的圆球表面积与实际圆柱颗粒的表面积之比

$$\zeta = \frac{d_c^2}{\left[dl + \frac{d^2}{2} \right]} \quad (1.4.2)$$

式中 d_c 是与圆柱颗粒相同体积的圆球的直径。圆柱颗粒运动时有一个迎风面积,即颗粒在与运动方向垂直面上的投影面积,用 d_n 表示与这一投影面积相同的圆面积的直径,则圆柱颗粒与直径为 d_c 的圆球颗粒的稳态沉降速度之比为

$$K = a + b \frac{d_c}{d_n} \zeta^{0.5} + c \left[\frac{d_c}{d_n} \right]^2 \zeta \quad (1.4.3)$$

式中 a, b, c 为待定常数, Unnikrishnana 和 Chhabra^[12] 通过实验发现,在 $0.68 \leq d_c/d_n \leq 1.44$ 范围内,这些待定常数为

$$a = 0.459 \pm 0.031; \quad b = 0.468 \pm 0.027; \quad c = 0.0084 \pm 0.00093$$

Fuchs^[13] 引进动力形状因子的概念,将形状因子乘上圆球的 Stokes 阻力系数,得到与圆球具有相同体积的圆柱颗粒的阻力系数,而形状因子可以由下式确定^[14]

$$K = \frac{v_{sc}}{v_{sc}} \quad (1.4.4)$$

式中 v_{sc} 是与圆柱颗粒相同体积的圆球颗粒的稳态沉降速度, v_{sc} 是圆柱颗粒的稳态沉降速度。

1.5 压力梯度力

根据颗粒主轴方向与流动方向的关系,压力梯度力可以分为两种情况考虑。

1.5.1 颗粒主轴沿流动方向

假设长度为 $2l$ 、半径为 a 的颗粒在压力梯度为 $\partial p/\partial x$ 的流场中运动,并且认为在颗粒的周围 $\partial p/\partial x$ 为常数。设颗粒一端所在位置的压强为 p_0 ,则另一端的压强为 $p_0 + 2l \partial p/\partial x$,于是流场作用在颗粒上的压力为

$$F_p = \pi a^2 p_0 - \pi a^2 \left[p_0 + 2l \frac{\partial p}{\partial x} \right] = -2\pi a^2 l \frac{\partial p}{\partial x} = -V_p \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.5.1)$$

式中 V_p 是颗粒的体积,负号表示压力梯度力的方向与压力梯度相反。

1.5.2 颗粒主轴垂直于流动方向

同样假设 $\partial p/\partial x$ 为常数,以颗粒中心为原点位置,颗粒的主轴为 y 方向,流动为 x 方向,建立直角坐标系 $Oxyz$,且设原点处的压强为 p_0 ,则由于压力梯度引起的颗粒表面的压力分布为

$$p = p_0 + a \cos \theta \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.5.2)$$

式中 θ 为颗粒表面任意点与 x 轴的夹角, a 为颗粒半径。注意到颗粒表面沿平行于 y 方向的母线上的压力 p 相同, 所以可以取微元 $2lad\theta$, 于是作用于微元上的力在 x 方向的分力为^[5]

$$dF_p = \left[p_0 + a \cos \theta \frac{\partial p}{\partial x} \right] 2al \cos \theta d\theta$$

那么作用在颗粒上的压力梯度力为

$$F_p = 2 \int_0^\pi \left[p_0 + a \cos \theta \frac{\partial p}{\partial x} \right] 2al \cos \theta d\theta = -2\pi a^2 l \frac{\partial p}{\partial x} = -V_p \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.5.3)$$

该式与式(1.5.1)相同, 说明压力梯度力与颗粒在流场中所处的方位无关, 而仅仅与颗粒所处位置的流场压力梯度值以及颗粒的运动速度线性相关, 该力的方向为压力梯度的反方向。

1.6 Magnus 力

颗粒在流场中转动时, 将产生一个与流动方向垂直的 Magnus 升力。根据 Kutta-Joukowski 定理, Magnus 升力为

$$F_M = \rho (v_i - v_{pi}) \Gamma \quad (1.6.1)$$

式中 v_i 和 v_{pi} 分别是流体与颗粒的速度, Γ 是沿颗粒表面的速度环量。

Magnus 升力可以分两种情况讨论。

1.6.1 颗粒主轴垂直于流动方向

这种情形如图 1.6.1 所示, 设颗粒绕其主轴以角速度 ω 旋转, 颗粒主轴沿 z 方向, 颗粒与流体的速度差 $(v_i - v_{pi})$ 的反方向为 x 方向, 颗粒表面上任意点的矢径与 x 轴的夹角为 θ , 则颗粒表面上的流场速度为

$$v_{is} = a\omega + (v_i - v_{pi}) \sin \theta \quad (1.6.2)$$

这样, 绕颗粒的环量为

$$\begin{aligned} \Gamma &= 2l \cdot \oint v_{is} ds = 2l \cdot \int_0^{2\pi} [a\omega + (v_i - v_{pi}) \sin \theta] a d\theta \\ &= 4\pi a^2 l \omega \end{aligned}$$

故 Magnus 升力为

$$F_{M\perp} = 4\pi a^2 l \rho \omega (v_i - v_{pi}) \quad (1.6.3)$$

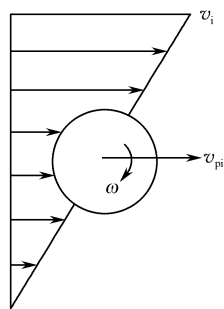


图 1.6.1 颗粒主轴垂直于流动方向的情形

1.6.2 颗粒主轴处于流场主流平面

对于图 1.6.2 所示的一般情形,颗粒表面的流场速度矢径 \mathbf{u} 在 xOy 平面内,颗粒主轴与流动方向的夹角为 θ_0 。如图所示,将流场分成 4 个区域,不同区域中 xOy 平面内矢径的模 r_0 、 $Oxyz$ 坐标中矢径的模 r 、颗粒表面的微元 dS 、 dS 对应的极角 ϕ 、 dS 处流场速度沿颗粒表面方向的分量 v_{is} 也不同。

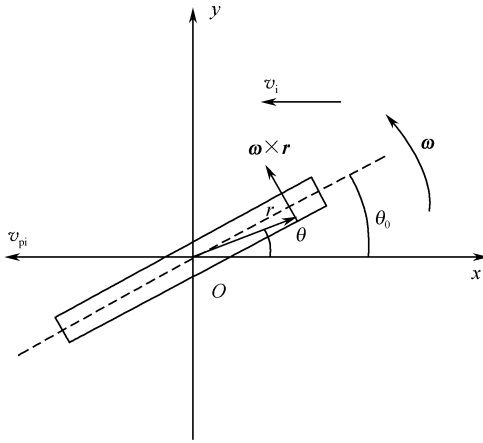


图 1.6.2 颗粒主轴处于流场主流平面的情形

$$1. \left[\pi - \theta_0 - \arctan \frac{a}{l} \right] \leq \theta \leq \theta_0 - \arctan \frac{a}{l} \text{ 区域}$$

$$r_0 = \frac{a}{\sin(\theta_0 - \theta)}; \quad r = \sqrt{[r_0 \cos(\theta_0 - \theta)]^2 + a^2 - z^2} = \sqrt{a^2 \cot^2(\theta_0 - \theta) + a^2 - z^2}$$

$$\phi = \theta_0 - \arctan \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{r_0 \cos(\theta_0 - \theta)} = \theta_0 - \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{r}$$

$$dS = rd\theta dz \sin(\theta_0 - \phi) = \sqrt{a^2 - z^2} d\theta dz$$

$$v_{is} = \omega r \sin(\theta_0 - \phi) - (v_i - v_{pi}) \cos \theta_0 = \omega \sqrt{a^2 - z^2} - (v_i - v_{pi}) \cos \theta_0$$

$$2. \theta_0 - \arctan \frac{a}{l} < \theta < \theta_0 + \arctan \frac{a}{l} \text{ 区域}$$

$$r_0 = \frac{a}{\cos(\theta_0 - \theta)}; \quad r = r_0; \quad \phi = \theta; \quad dS = rd\theta dz \cos(\theta_0 - \phi) = ld\theta dz$$

$$v_{is} = \omega r \cos(\theta_0 - \phi) + (v_i - v_{pi}) \sin \theta_0 = \omega l + (v_i - v_{pi}) \sin \theta_0$$

$$3. \theta_0 + \arctan \frac{a}{l} \leq \theta \leq \pi + \theta_0 - \arctan \frac{a}{l} \text{ 区域}$$

$$r_0 = \frac{a}{\sin(\theta_0 - \theta)}; \quad r = \sqrt{[r_0 \cos(\theta_0 - \theta)]^2 + a^2 - z^2} = \sqrt{a^2 \cot^2(\theta_0 - \theta) + a^2 - z^2}$$

$$\phi = \theta_0 - \arctan \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{r_0 \cos(\theta_0 - \theta)} = \theta_0 + \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{r}$$

$$dS = rd\theta dz \sin(\phi - \theta_0) = \sqrt{a^2 - z^2} d\theta dz$$

$$v_{is} = \omega r \sin(\phi - \theta_0) + (v_i - v_{pi}) \cos \theta_0 = \omega \sqrt{a^2 - z^2} + (v_i - v_{pi}) \cos \theta_0$$

4. $\pi + \theta_0 - \arctan \frac{a}{l} < \theta < \pi + \theta_0 + \arctan \frac{a}{l}$ 区域

$$r_0 = \frac{a}{\cos(\pi + \theta_0 - \theta)}; \quad r = r_0; \quad \phi = \theta;$$

$$dS = rd\theta dz \cos(\pi + \theta_0 - \phi) = ld\theta dz$$

$$v_{is} = \omega r \cos(\pi + \theta_0 - \phi) - (v_i - v_{pi}) \sin \theta_0 = \omega l - (v_i - v_{pi}) \sin \theta_0$$

式中 a 是颗粒的半径, 将 4 个区域的沿颗粒表面方向的流场速度分量 v_{is} 代入速度环量公式可得

$$\Gamma = \frac{1}{24} \pi \omega a^3 - \frac{1}{12} \omega a^3 \arctan \frac{a}{l} + 8 \omega a l^2 \arctan \frac{a}{l} \quad (1.6.4)$$

于是 Magnus 升力为

$$\begin{aligned} F_{M//} &= \rho (v_i - v_{pi}) \Gamma \\ &= \rho (v_i - v_{pi}) \left[\frac{1}{24} \pi \omega a^3 - \frac{1}{12} \omega a^3 \arctan \frac{a}{l} + 8 \omega a l^2 \arctan \frac{a}{l} \right] \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

对于大长径比颗粒的情形 ($l/a \geq 10$), 式(1.6.5)可近似为

$$F_{M//} = \rho (v_i - v_{pi}) 8 \omega a l^2 \frac{a}{l} = 8 a^2 l \omega \rho (v_i - v_{pi}) \quad (1.6.6)$$

将式(1.6.6)与式(1.6.3)比较可知: $F_{M//} / F_{M\perp} = 2/\pi$, 可见颗粒平行于流场方向和垂直于流场方向时受到的 Magnus 力的大小为同一量级, 故式(1.6.6)和式(1.6.3)可合并为

$$F_M = k \pi l a^2 \omega \rho (v_i - v_{pi}) = k V_p \omega \rho (v_i - v_{pi}) \quad (1.6.7)$$

式中 V_p 是颗粒的体积, k 为常系数。

圆柱颗粒在流场中由于旋转而产生的 Magnus 升力, 无论是绕主轴旋转还是绕垂直于主轴的某轴线旋转, 均与旋转角速度、流体密度和流体与颗粒的速度差成正比, 而且力的大小相差不大, 但力的方向则不同。因此, 当颗粒绕垂直于主轴的某轴线旋转时, 颗粒对流场的反作用远远大于绕主轴旋转时的情形。

1.7 Saffman 力

圆柱颗粒在有速度梯度的流场中运动时, 由于颗粒上下部分的流体速度不同,

颗粒将会受到一个沿垂直方向的作用力,当颗粒上部的速度大于颗粒下部的速度时,该力为向上的升力。

假设流场定常、颗粒静止不动,流场来流速度为 $\mathbf{V}_\infty = (ky + v_0)\mathbf{e}$, k 为速度梯度, v_0 是颗粒质心处流场的速度,则忽略质量力、不可压缩流场的连续性方程和运动方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1.7.1}$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \tag{1.7.2}$$

可以从以下两种情况来考虑 Saffman 力。

1.7.1 流场速度垂直于颗粒主轴的情形

采用图 1.7.1 所示的柱坐标系,则式(1.7.1)和(1.7.2)在该坐标系下的形式为

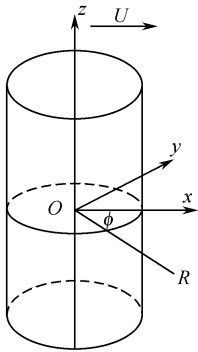


图 1.7.1 流场速度垂直于颗粒主轴的情形

$$\frac{\partial v_R}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_R}{R} = 0 \tag{1.7.3}$$

$$\begin{aligned} & v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} + \frac{v_\phi}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \phi} - \frac{v_\phi^2}{R} + v_z \frac{\partial v_R}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} + \left\{ \frac{\partial^2 v_R}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_R}{\partial R} - \frac{v_R}{R^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v_R}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 v_R}{\partial z^2} \right\} \end{aligned} \tag{1.7.4}$$

$$\begin{aligned} & v_R \frac{\partial v_\phi}{\partial R} + \frac{v_\phi}{R} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_R}{R} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{\rho R} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \left\{ \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_\phi}{\partial R} - \frac{v_\phi}{R^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial v_R}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2} \right\} \end{aligned} \tag{1.7.5}$$

$$v_R \frac{\partial v_z}{\partial R} + \frac{v_\phi}{R} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \left\{ \frac{\partial^2 v_z}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_z}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right\} \tag{1.7.6}$$

假设流场沿 z 方向保持不变,且 $v_z=0$,则式(1.7.3)~(1.7.5)化为

$$\frac{\partial v_R}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_R}{R} = 0 \tag{1.7.7}$$

$$v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} + \frac{v_\phi}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \phi} - \frac{v_\phi^2}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} + \left\{ \frac{\partial^2 v_R}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_R}{\partial R} - \frac{v_R}{R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v_R}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right\} \tag{1.7.8}$$