固 体 中 的 超 声 波

〔美〕 J.L.罗斯 著
何存富 吴 斌 王秀彦 译
杨桂通 校

科 学 出 版 社
北 京

图字:01-2001-3926 号

内 容 简 介

超声波技术在无损探伤、医疗分析等领域得到了越来越广泛的应用。这些现代技术是从机械波的基本物理原理发展而来的。

本书介绍了波的基本物理性质及其在现代科学中的一些应用。首先是波传播的一些基本原理,然后将其和超声波作用机制以及最近发展起来的导波技术结合起来,应用于飞行器、电厂、化工厂等现役管道的检测。

本书通过力学、数学和建模建立起实际应用的框架,讨论的问题有:波在板、杆、空心圆柱体、多层介质及复合材料中的传播,波的反射与折射,表面波与次表面波以及水平剪切波。书后附录提供了超声无损检测、弹性力学、复变函数以及典型的波传播实验,并通过大量实例、实验和课后习题使课本内容得到巩固。

本书对在这一领域学习和研究的大学生、研究生、工程技术人员来说是很有价值的参考资料。

Joseph L. Rose
Ultrasonic Waves in Solid Media
© Cambridge University Press 1999.

图书在版编目(CIP)数据

固体中的超声波/(美)J. L. 罗斯著;何存富,吴斌,王秀彦译. —北京:科学出版社,2004
ISBN 7-03-011620-8

Ⅰ. 固… Ⅱ. ①罗… ②何… ③吴… ④王… Ⅲ. 固体-缺陷-超声检测 Ⅳ. O483

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 051889 号

策划编辑:匡 敏/文案编辑:邱 璐 贾瑞娜/责任校对:刘小梅
责任印制:安春生/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2004 年 3 月第 一 版 开本:787× 1092 1/16
2004 年 3 月第一次印刷 印张:23 3/4
印数:1—2 000 字数:542 000

定价:48.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

译 者 序

作为长期从事动力学、实验力学和现代测控技术研究的工作者,我们一直对如何利用应力波(声波)理论解决工程结构问题,如细杆、板、圆柱壳、多层介质等的波动响应、健康诊断及实时监控等问题颇感兴趣,而国内在这一领域的相关专著并不多。现有的专著或者过于简单以致无法应用于实际问题,或者在数学上太深奥而难于处理。近年来,利用频域分析与时域分析相结合的方法对应力波进行分析不失为一种有效的方法。这种方法最吸引我们的是如何利用相同的分析框架预测实验结果,而利用超声导波技术对诸如管道等结构进行长距离、大范围检测是其重要特征,并且这种方法可以对材料性能进行无损评估,对关键结构中的缺陷进行检测和定位,它正逐步成为某些结构质量检测与监控的有效工具。

J. L. 罗斯是美国宾夕法尼亚州立大学工程与力学系设计与制造 Paul Morrow 特聘教授。他领导的课题组,经过长期的研究工作及大量的实验,在理论和实际工程应用中都取得了令人瞩目的进展。他们的专著《固体中的超声波》正是其研究的成果总结。该书通过力学、数学和建模建立起实际应用的框架,涉及的问题有波在板、杆、空心圆柱体、多层介质、复合材料及黏弹性材料中的传播,波的反射与折射,表面波和次表面波,水平剪切波等;附录提供了无损检测、弹性力学、复变函数的基本概念,并介绍了几个典型波传播的实验。该书最大的特点是内容丰富,理论有深度,实用性强;特别是利用导波技术,对诸如缺陷等问题的大范围检测,尤其是在恶劣条件下,比如在结构被隔离或结构涂有外包层等的长距离检测提供了一种很好的解决办法。该书内容非常实用,故而很想推荐给国内的同行及有志于从事应力波理论与应用的研究生和检测工程师们,这也是我们翻译此书的初衷。

该书的整个翻译工作由我们课题组的全体成员及研究生共同完成。何存富教授、吴斌教授主持了整个翻译工作,并对初译稿进行了多次整理、校正,包括错误公式的修正和文字的顺达工作。焦敬品博士翻译了第 11 章到第 14 章,李龙涛博士翻译了第 18 章到第 20 章及附录 E,金山硕士翻译了第 7 章到第 10 章及附录 A,王智硕士翻译了第 5 章、第 6 章、第 17 章及附录 B、C,李涌硕士翻译了第 1 章到第 4 章、第 16 章及附录 D,于海群硕士做了大量的文字录入工作,王秀彦副教授做了全书稿的排版、校对及打印工作。在翻译过程中,太原理工大学应用力学研究所的杨桂通教授对全文进行了校审。在此,对他们一

并表示衷心的感谢。本书的出版得到了国家自然科学基金、北京市自然科学基金的资助,以及教育部高等学校骨干教师资助计划、北京市教委科技发展计划的基金支持,同时也得到了北京工业大学机电学院和电控学院领导及同仁的大力支持,这里也向他们表示深深的谢意。

由于时间及水平有限,译稿中的错误在所难免,请读者批评指正。

译　者

北京工业大学

前　言

作为一名从事波动力学研究30多年的工作者,我被动力学、振动,特别是波的传播等各种属性所强烈吸引。一个典型例子是对两固支点间张紧弦的打击或摩擦(如同钢琴、吉他或小提琴中的弦那样),如何揭示由于弦中张力改变而引起的波速以及声调或频率的变化。对于给定的弦长,声调升高是弦上张力增加的结果。这种现象给我们展示了弦中脉冲从弦的一端传播到另一端的变化情况和最后形成的驻波。在金属、塑料、陶瓷以及复合材料的结构中也会产生类似的传播现象。然而,由于波传播的速度非常快,我们几乎无法用肉眼观察到波的运动。

我致力于将波传播的概念用于安全评定及故障诊断方面的研究。利用波传播现象可以对材料性能进行无损评估,并对关键结构中的缺陷进行检测和定位。这方面的研究工作已取得一定进展,并研制出了相关的设备。它正逐步成为某些结构质量检测与监控的有效工具或在线检测方法。

关于超声波无损评价方面,人们早期所做的工作(1970~ 1985)除了基本的脉冲回波实验和脉冲透射实验外,主要集中在信号处理和模式识别等方面。新发展起来的层析(CT)超声成像技术则是利用其图像的一些特征对缺陷进行分类。这些技术补充或取代了标准的基于振幅的C-扫描。20世纪70年代末期,超声波研究扩展到了医学应用领域。我开发了一套应用于实时医学成像的线性相位阵列探头系统,并且进行了组织的分类工作,即从良性组织中分辨出恶性组织。

大约在1985年,出现了一种更快、更灵敏的新的超声检测方法。这一新方法的出现归功于采用斜入射波法检测黏结件的研究工作。进一步的研究揭示了导波(guided wave)(即沿着构件表面或沿着杆、管或板式结构传播的波)不仅可以产生如同斜入射时的二维质点运动速度,而且比传统的点对点实验技术更为有效。

关于导波的研究一直持续到今天。现在导波技术已经扩展到用来检测发电站的管道、化工厂的管线以及大型输油输气管道的安全性。由于其特殊的实验模态(mode),导波技术可以用于细小缺陷的检测,尤其是在恶劣条件下,在结构被隔离或结构涂有外包层等苛刻环境中的长距离检测,例如导波在商业飞机机翼覆冰探测上的应用。除了电厂和飞行器方面的开发使用外,导波未来的研究和应用方向还包括美国老化的基础设施和许多其他新的商业应用。

本书适用于从事超声无损评估工作的工程师、技术人员和学生。从事此项工作的管理人员通过对本书的学习也会了解工程师、技术人员和学生所谈论

的话题。尽管本书中的数学推导比较详细且复杂,然而我们却常常可以从“黑匣子”的角度去处理问题。关于数据采集,我们则是通过输入参数得到合理的输出结果,由此评估相速度、频散(dispersion)曲线、群速度曲线以及进行波结构分析。

总之,写这本关于波动力学的研究资料,目的在于利用导波力学的知识,为解决超声无损评估诸多问题中所需的数据采集和信号处理建立一个框架。因此,希望它能够成为从事超声波无损评估(NDE)工作的各类人员的一本参考书,能够成为大学高年级学生和研究生的一本教科书。同时,希望本书对于扩大和提高国内或国际导波技术水平有所帮助。

致　　谢

在此,我深深地感谢过去十几年中在波动力学方面付出过努力和参加过讨论并做出贡献的人士,并谨以此书缅怀在 1994 年 1 月 6 日去世的 Aleksander Pilarski 博士。“Olek”作为访问学者曾在 1986~ 1988 年和 1992~ 1994 年在 Drexel 大学和宾夕法尼亚州立大学与我两次合作。他旺盛的精力和热情的工作态度以及他在理论与实验上的贡献深深地影响了我们中的许多人。他是一位挚爱的朋友,我们永远怀念他。

特别感谢一位优秀的博士生 John Ditri 为本书做出的贡献,尤其是他在编写本书第 13、14、15 和 19 章时付出的努力。同时还要感谢 Sam Pelts 在编写本书第 9、11、14 和 18 章时做的工作。感谢 Mike Avioli 在复变函数(附录 C)和绘图方面,Dale Jiao 在第 5 章以及 Younho Cho 在第 12 章和第 20 章中所做的工作。还要感谢 Hyeon Jae Shin、Kris Rajana、Derrick Hongerholt、Luis Soley、Jian Li、Ken Lohr、Mike Quarry 和 Jim Barshinger 等的大力支持。

对 Jaimie Rose 在编辑工作中付出的艰辛劳动、Ann Hibbert 的耐心和出色的组织才能及录入排版工作表示深深的谢意。

最后要感谢的是 28 年来在超声领域中付出努力和给予我支持的我的博士生们,他们在我们的工作中以及在有关波动力学信号处理和模式识别过程中起到了非常重要的作用。我还要感谢宾夕法尼亚州立大学和这几年所有资助我研究工作的人们,有了他们的支持,我才有可能完成此书。最后,感谢我的爸爸、妈妈、儿子 Joe、女儿 Debbie、Terry、Jaimie 和 Kristina,尤其感谢夫人 Carole 多年来对我工作的支持。

目　录

译者序
前　言
致　谢
第 1 章　绪论 …… 1
1.1　背景 …… 1
1.2　内容要览 …… 2
第 2 章　频散原理 …… 4
2.1　引言 …… 4
2.2　张紧弦中的波 …… 4
2.3　弹性基础上的弦 …… 9
2.4　黏性基础上的弦 …… 11
2.5　黏弹性基础上的弦 …… 12
2.6　频散系统的图解法 …… 12
2.7　群速度概念 …… 14
2.8　习题 …… 17
第 3 章　无界各向同性和各向异性介质 …… 19
3.1　引言 …… 19
3.2　各向同性介质 …… 19
3.3　各向异性介质的 Christoffel 方程 …… 21
3.4　关于速度、波和慢度面 …… 27
3.5　习题 …… 30
第 4 章　反射与折射 …… 32
4.1　引言 …… 32
4.2　垂直入射波的反射系数 …… 32
4.3　斜入射分析的 Snell 定律 …… 36
4.4　临界角与波型转换 …… 38
4.5　折射的慢度图和临界角分析 …… 40
4.6　习题 …… 41
第 5 章　斜入射 …… 43
5.1　背景 …… 43
5.2　两半无限介质界面处的反射和透射系数 …… 43
5.3　具有非理想边界条件的嵌于两固体间的固体层情况 …… 49
5.4　多次反射法 …… 64
5.5　习题 …… 65

第 6 章　波的散射 …… 67
6.1　背景 …… 67
6.2　实例 …… 67
6.3　其他概念 …… 71
6.4　习题 …… 72
第 7 章　表面波和次表面波 …… 73
7.1　背景 …… 73
7.2　表面波 …… 73
7.3　表面波的激发和接收 …… 77
7.4　次表面纵波 …… 79
7.5　习题 …… 80
第 8 章　板中的波 …… 82
8.1　引言 …… 82
8.2　自由板问题 …… 83
8.3　Rayleigh-Lamb 频率方程的数值解 …… 89
8.4　群速度 …… 91
8.5　波结构分析 …… 92
8.6　压缩波和弯曲波 …… 92
8.7　其他问题 …… 92
8.8　习题 …… 106
第 9 章　界面波 …… 108
9.1　引言 …… 108
9.2　Stonely 波 …… 108
9.3　Scholte 波 …… 111
9.4　习题 …… 111
第 10 章　半空间上的层结构 …… 112
10.1　引言 …… 112
10.2　半空间上的层结构 …… 112
10.3　Love 波 …… 115
10.4　习题 …… 116
第 11 章　波在杆中的传播 …… 117
11.1　背景 …… 117
11.2　纵波在细杆中的传播 …… 117
11.3　波在无限长杆中的传播 …… 118
11.4　习题 …… 124
第 12 章　波在空心圆柱体中的传播 …… 125
12.1　引言 …… 125
12.2　弹性空心圆柱体中的周向导波 …… 125
12.3　弹性空心圆柱体中的纵向导波 …… 128

12.4 纵向轴对称模态 …… 128
12.5 纵向弯曲模态 …… 132
12.6 空心圆柱体外表面受水载作用时的泄漏导波 …… 133
12.7 衰减频散曲线 …… 138
12.8 波结构分析 …… 140
12.9 讨论 …… 141
12.10 习题 …… 142
第 13 章 多层介质中的导波 …… 143
13.1 引言 …… 143
13.2 *N* 层板 …… 143
13.3 应用实例 …… 158
13.4 小结 …… 161
13.5 习题 …… 162
第 14 章 波源的影响 …… 163
14.1 引言 …… 163
14.2 表面应力自由结构中的导波 …… 163
14.3 各向异性介质中的体波 …… 182
14.4 习题 …… 195
第 15 章 水平剪切(SH)波 …… 196
15.1 引言 …… 196
15.2 频散曲线 …… 196
15.3 相速度和截止频率 …… 198
15.4 群速度 …… 199
15.5 总结 …… 200
15.6 平板中 SH 波的激发 …… 201
15.7 习题 …… 212
第 16 章 各向异性介质层中的波 …… 213
16.1 引言 …… 213
16.2 分析 …… 213
16.3 实例结果 …… 218
16.4 习题 …… 220
第 17 章 弹性常数的确定 …… 221
17.1 引言 …… 221
17.2 背景 …… 221
17.3 各向异性介质中的弹性波传播 …… 223
17.4 复合材料和等效弹性模量 …… 224
17.5 等效弹性模量的测定 …… 225
17.6 正交各向异性介质的一个实例 …… 226
17.7 常规测量方案 …… 229

17.8 习题 …… 231
第 18 章 黏弹性介质中的波 …… 233
18.1 引言 …… 233
18.2 Maxwell 模型 …… 233
18.3 Kelvin-Voight 模型 …… 234
18.4 黏弹性正交各向异性板中的 SH 波 …… 235
18.5 黏弹性层中的 Lamb 波 …… 239
18.6 习题 …… 241
第 19 章 应力的影响 …… 242
19.1 引言 …… 242
19.2 线性理论 …… 242
19.3 非线性理论 …… 244
19.4 现存结果的总结 …… 246
19.5 习题 …… 247
第 20 章 边界元模型简介 …… 248
20.1 引言 …… 248
20.2 分析 …… 249
20.3 体波问题的实例 …… 251
20.4 混合模型 …… 252
20.5 能量守恒原理 …… 256
20.6 导波散射问题的实例 …… 256
20.7 习题 …… 269
附录 A 超声无损检测原理、分析和显示技术 …… 270
A.1 一些物理原理 …… 270
A.2 波的干涉 …… 273
A.3 单点源的计算模型 …… 274
A.4 柱形单元的方向函数 …… 277
A.5 超声场的描述 …… 278
A.6 近场计算 …… 280
A.7 扩散角的计算 …… 280
A.8 超声波束的控制 …… 280
A.9 求解超声场技术中应注意的问题 …… 281
A.10 脉冲超声场效应 …… 282
A.11 成像技术介绍 …… 284
A.12 超声波波形幅度减小的原因 …… 285
A.13 分辨率和穿透原理 …… 285
A.14 习题 …… 287
附录 B 弹性理论中的基本公式和概念 …… 288
B.1 引言 …… 288

B.2 术语 …… 288
B.3 应力、应变和本构方程 …… 289
B.4 弹性常数间的关系 …… 290
B.5 矢量和张量变换 …… 291
B.6 主应力和主应变 …… 291
B.7 应变位移方程 …… 291
B.8 波动控制方程推导 …… 293
B.9 各向异性弹性常数 …… 294
附录 C 复变函数 …… 297
C.1 引言 …… 297
C.2 复数 …… 297
C.3 多值函数 …… 301
C.4 解析函数 …… 303
C.5 复变函数的积分 …… 304
C.6 幂级数 …… 308
C.7 极点与零点 …… 309
C.8 通过复变函数计算实函数积分 …… 311
C.9 留数计算的替代公式 …… 315
C.10 三角函数积分 …… 316
附录 D 云纹成像和动光弹 …… 317
D.1 讨论 …… 317
D.2 习题 …… 319
附录 E 波传播的几个主要实验 …… 320
E.1 实验 1:波速测定 …… 320
E.2 实验 2:折射与斜探头换能器 …… 323
E.3 实验 3:扭曲角测量 …… 326
E.4 实验 4:板中的波 …… 329
E.5 实验 5:杆中的波 …… 339
E.6 实验 6:管中的波 …… 341
E.7 实验 7:水平剪切波 …… 349
参考文献 …… 354

第1章 绪 论

1.1 背 景

与传统的超声波技术相比,利用超声导波在固体介质中的传播特性来检测材料和结构的新技术具有更快捷、更灵敏、更经济的特点,是无损检测(NDT)领域中一个新近发展的重要课题。假如要检测一根附有隔离层的管子,我们可以在保证隔离材料完好的情况下,通过用导波探头在管子一点处测定出一个波形就可检测整个管道的状况,而无需去掉隔离层、用一个探头沿管子测出几千个波形来解决问题。这项技术的关键是必须掌握超声导波在固体介质中的传播规律(如在多层圆柱体中导波分析时模态和频率的选择)。

固体介质中弹性波传播问题的研究不仅仅局限于超声波无损检测领域,其研究的主要领域还包括:

1) 瞬态响应问题,包括动态冲击载荷。

2) 利用应力波研究材料的动态力学性质,如确定弹性模量和本构方程(即应力与应变或应变率之间关系的方程,该方程可以从各种波的传播实验中得到的结果求得)中的其他常数。

3) 工业、医学用超声或声发射无损检测分析。

波传播的研究同样有助于对振动分析的理解。波传播问题是一个作用时间较长的有限过程,其分析方法与振动分析中的各种方法相近似。弹性波传播理论既可解决振动中的瞬态响应问题,也可处理稳态响应特征问题。然而,振动问题的求解技术往往不能有效地解决波传播问题。

波传播问题的研究引起了力学学者们的极大兴趣,其早期的研究工作由一些著名的学者完成,如 Stokes、Poisson、Rayleigh、Navier、Hopkinson、Pochhammer、Lamb、Love、Davies、Mindlin、Viktorov、Graff、Miklowitz、Auld 和 Achenbach。Graff(1991)发表了一篇关于波传播研究史的极为有趣的文章;假如想对波传播的历史和基本概念有所了解,请参看 Achenbach(1984),Auld(1990),Beranek(1990),Eringen 与 Suhubi(1975),Ewing、Jardetsky 与 Press(1957),Fedorov(1968),Kino(1987),Kinsler 等(1982),Kolsky(1963),Miklowitz(1978),Musgrave(1970),Pollard(1977),Rayleigh(1945),Redwood(1960)以及 Viktorov(1967)等的著作。本书中也引用了许多其他非常有用的参考资料,详见书后参考文献。

由于各领域最新技术、最新成果的不断交叉、渗透与吸收,使得人们重新对波传播的问题进行研究并拓展了许多实际应用领域。计算机软件的开发与利用解决了工程应用和科学研究中遇到的许多难题。因此,超声无损检测领域在过去 30 年取得的长足进步,而有限元和边界元方法的发展,数学上对边界问题的精确处理和计算能力、效率的大大提高,体波和导波传播问题得到进一步求解。然而,纵使有无数个计算机软件包,我们也有必要

对计算结果进行人工分析、修正,这样才能将其更好地应用到实际工程中。科学家和工程师需要编写计算机程序、建立新问题的物理模型,以及利用各种技术处理波动力学和材料特性中的边值问题。

1.2 内容要览

虽然固体介质中的超声波有很多方面的应用,但本书的侧重点在于超声波的无损检测,尤其强调对材料特性的分析。我们将从第 2 章的频散原理开始讨论。当波速是关于频率或者传播方向的函数时,将会出现频散(dispersion)的概念。传统的超声波无损检测利用了非频散波传播的知识,然而,频散现象在各向异性材料和导波技术中无处不在。

第 3 章描述了波在无限大各向同性和各向异性介质中的传播。这一章里详细回顾了 Christoffel 方程,目的在于让我们了解波在各向异性介质中传播时特有的规律。此时,波速不再独立于传播方向,而随传播方向的不同有非常大的变化,会产生严重的干涉现象,导致波在各个不同方向的群速度发生变化以及波在介质中传播时产生波束扭曲效应。同时,还给出了详细的数学推导和一些典型实例。

第 4 章研究了波的反射与折射。首先介绍了各向同性介质的问题,接着介绍了 Snell 定律和波型转换。使用不同模态、边界条件处理各种结构以及各向异性介质中的传播问题,将在随后的章节中详细讨论。

第 5 章研究了斜入射时折射和反射的更普遍的问题,包括慢度面和临界角分析。第 6 章简要介绍了固体介质中波的散射原理。第 7 章介绍了表面波和次表面波,并且在介绍次表面波的同时也详细介绍了著名的 Rayleigh 表面波。这些体波具有特殊的传播特征,对无损评估有非常大的价值。另外,还给出了相应的数学描述与实用方法。

第 9 章研究了界面波,包括 Love 波、Stoneley 波和 Scholte 波。波在传播过程中遇到两种介质的交界面时,在一定的物理条件和材料性质下,可以沿界面直接传播。此部分内容从理论上探讨了波传播特征和漏波现象,以期用于无损检测中。

第 10 章介绍了波在半空间上层结构中的传播问题。它可以用来解决诸如密度梯度、性能梯度及各向异性复合材料的问题,例如可以通过表面波的频散特性来评估材料性能梯度随深度的变化。

第 8、11、12 章分别研究了板、杆和空心圆柱体中的波。这些波实际上具有频散的性质。通过假设位移导出相应的求解行列式,进而计算出相速度、群速度及衰减随频率变化曲线。文中将用大量篇幅讨论分析技巧、模态选择和如何将这些信息应用到无损检测中。

多层介质中的导波是第 13 章要研究的内容,这在无损检测中是一项非常有用的建模技术。除了介绍胶结、扩散联结或复合材料等结构的数学建模情况外,这一章还详细讨论了高阶行列式的确定和求根技巧。文中给出了许多实例结果,并就如何将这些技术应用于材料特征的无损评估作了介绍。

第 14 章研究了导波中的波源影响问题。当产生导波时,波源的影响将伴随着探头附加载荷,且可影响相速度谱和频谱的控制。这一点非常重要,但却往往被人们忽略。利用这一特性可在实验中产生高信噪比的模式。

第 15 章讨论了水平剪切波的传播。这种波的传播形式是质点振动方向与波的传播方

向相垂直。波沿着粗糙表面传播时(如穿过焊缝等)会产生一些非常有趣的现象。另外,频散曲线是由求解与该问题相关的行列式得到的,故在这一章中作了相应的物理解释。

第 16 章研究了波在各向异性介质层中的传播问题。可以看到,频散曲线随传播方向变化显著。这种现象有利于在无损评估中确定材料的特性。另外,与第 13 章一样,本章再次涉及典型问题行列式的确定和求根问题。

第 17 章介绍了在一系列波速测定的基础上如何确定弹性常数的问题。通过对不同的体波和导波相关参数的测量,反过来计算出各向异性介质的弹性常数。这项工作无论对设计工程师还是无损检测工程师都非常有用。

第 18 章研究了波在黏弹性介质中的传播问题。通过波在黏弹性介质层中传播的典型问题引出了一些基本原理。从行列式中求解复常数得到相速度、群速度谱和衰减的频散曲线,并对这些现象进行了物理描述。此时,相速度、群速度和衰减频散曲线明显地反映了黏弹性材料的影响。第 19 章研究了应力对波的传播的影响,同时也讨论了各种非线性因素可能对波在结构中的传播和材料应力状态的影响。

第 20 章介绍了边界元方法,尤其是处理导波传播问题的边界元方法。我们发现应用边界元技术的计算效率非常高,并且能很好地处理导波在结构传播中遇到各种形状缺陷时的反射和透射因子。这为超声波在无损评估中数据的采集、缺陷的探测、分类和大小的确定提供了非常有价值的手段。

本书还包括 5 个附录。附录 A 介绍了在研究波的传播问题中涉及的一些背景知识和基本概念,给出了在超声波无损评估中的一些基本素材以及在实践、分析和仪器方面的发展动态。附录 A 中还包括了诸如干涉现象、超声波场分析、近场、波束扩散、轴向和横向分辨率以及演示技术等方面的介绍。附录 B 介绍了弹性理论中的一些基本方程。建议学生在研究波传播问题之前,学一些弹性力学知识。同时,具备材料力学知识可以使我们更有效地利用附录 B 中的方程研究波在固体中的传播。附录 C 给出了复变函数中的一些基本方程,这对我们理解波在固体介质中的传播很有帮助。然而,这部分附录只是给出了复变函数的基本要点,并不能代替复变函数的教科书,学生需要时可以通过附录 A、B、C 迅速查找相关知识。

附录 D 介绍了云纹成像和动光弹的知识,包括如何使不同材料中的波实现可视化,以便演示贯穿于全书的波的传播原理。附录 E 给出了几个重要的波的传播实验。对于学生来说,这也许是本书的核心点,因为这里给出了许多基本原理和波传播实验的实例,以及进一步研究的建议。这些内容包括体波和导波速度的测量,用折射和斜探头对复合材料中波束扭曲角的测量,波在板、杆和管中的传播特征等一些实验。关于水平剪切波传播的激发和接收的实验也包括在其中。

为了加深对书中一些要点的理解并进行总结,我们在各章节及附录后都准备了相关的习题,它们对教师和学生都会有所帮助。

第 2 章　频 散 原 理

2.1　引　　言

在研究应力波在诸如固体棒、杆、板、圆柱壳或多层介质等结构中的传播问题之前，先回顾一下弦的波动和振动。本章首先介绍波在弦中传播的实质并引入频散原理，进而推广到波在其他结构中的传播问题。尽管对于各向异性介质(波速是传播方向的函数)要考虑波的频散，但在这里，我们更主要的是强调由于结构几何特征而导致的频散。为此，引入某些基本术语，如波速、波数、波长、物理频散、几何频散、相速度、群速度、衰减、截止频率、频谱以及能量传播等，这对以后的研究非常有用。另外，本章也给出了相速度和群速度曲线。更详细的内容参见 Graff(1991)。

2.2　张紧弦中的波

2.2.1　控制方程

为导出波在理想张紧弦中传播的控制方程，考虑弦的一个微分单元，如图 2.1 所示。首先分析无限长弦的情况，然后再加入特殊的边界条件进行研究。这里我们忽略由于张力 F 产生的位移，并引入如下记号

$$u_{,xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad u' = \frac{\partial u}{\partial x}$$

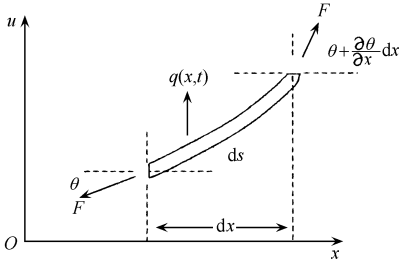


图 2.1　张紧弦的微元段示意图

u 为位移；F 为张力；$q(x,t)$为体力或单位长度上的外荷载；$\mathrm{d}s$ 为弧长

根据牛顿第二定律$\left[\sum F = ma\right]$，沿位移 u 方向的弦的运动方程为

$$-F\sin\theta + F\sin\left(\theta + \frac{\partial\theta}{\partial x}\mathrm{d}x\right) + q\mathrm{d}s = \rho\mathrm{d}s\ddot{u} \tag{2.1}$$

式中，ρ 为线密度。假设在小变形$\left[\mathrm{d}s \approx \mathrm{d}x, \sin\theta \approx \theta, \theta \cong \frac{\partial u}{\partial x}\right]$下，得

$$-F\theta+F\left(\theta+\frac{\partial\theta}{\partial x}\mathrm{d}x\right)+q\mathrm{d}x=\rho\mathrm{d}x\ddot{u}$$

化简后,得

$$F\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+q=\rho\ddot{u}\text{①} \tag{2.2}$$

此即为二阶双曲型偏微分方程。如果外力 $q=0$,则该方程是齐次的。当无外力作用时,上述方程可表示为

$$u_{,xx}=\frac{1}{c_0^2}\ddot{u} \tag{2.3}$$

式(2.3)为简单的一维、齐次波动方程。这里,c_0 为波的传播速度,$c_0=\sqrt{F/\rho}$。

2.2.2 分离变量法求解

令 $u(x,t)=X(x)T(t)$,并代入式(2.3)中,有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''T\qquad\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=XT''\text{②}\qquad TX''=\frac{1}{c_0^2}XT''$$

由于 $X=X(x)$,$T=T(t)$,故可写成如下形式

$$\frac{X''}{X}=\frac{T''}{c_0^2T}=\text{常数}=-k^2 \tag{2.4}$$

注意,为保证方程有解,式(2.4)中的常数必须等于 $-k^2$。于是有

$$X''+k^2X=0\qquad T''+k^2c_0^2T=0$$

这就是大家熟知的简谐波运动方程,相应的通解如下式

$$X(x)=A_1\sin kx+A_2\cos kx\qquad T(t)=A_3\sin kc_0t+A_4\cos kc_0t$$

通常情况下,选择 $+k^2$ 会产生双曲函数 sinh 和 cosh 的解。它常用于导波研究中。

上述结果可解释如下:首先给出波数 k,相速度 c_p,圆频率 ω 和波长 λ 之间的关系

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{c_p} \tag{2.5}$$

式中,$\omega=2\pi f$,$c_p=f\lambda$。对于特殊情况 $c_p=c_0$ 时,由于 $\omega=kc_0$,可以给出通解为

$$u(x,t)=X(x)T(t)=(A_1\sin kx+A_2\cos kx)(A_3\sin\omega t+A_4\cos\omega t)$$

重新组合相乘,得

$$\begin{aligned}u(x,t)=&A_1A_4\sin kx\cos\omega t+A_2A_3\cos kx\sin\omega t\\&+A_2A_4\cos kx\cos\omega t+A_1A_3\sin kx\sin\omega t\end{aligned} \tag{2.6}$$

考虑式(2.6)中四项中的任意一项,对比图 2.2 的描述,可知:图中波形没有移动,即产生了驻波。

利用三角恒等式 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$,式(2.6)变为

---

① 原文 $F\frac{\partial^2 u}{\mathrm{d}x^2}$ 有误。——译者注

② 原文 $\frac{\partial^2 u}{\partial T^2}=XT''$ 有误。——译者注

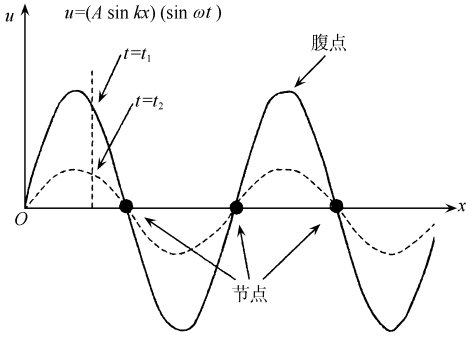


图 2.2　驻波实例

$$u(x,t) = B_1\sin(kx + \omega t) + B_2\sin(kx - \omega t) + B_3\cos(kx + \omega t) - B_4\cos(kx - \omega t) \tag{2.7}$$

考虑式(2.7)中的一典型项:$u(x,t)= A\cos(kx- \omega t)$。由于 $\omega= kc_0$,则

$$u(x,t) = A\cos k(x - c_0 t) \tag{2.8}$$

该典型项表示对于特定的波长 λ,波是沿 x 的正方向传播的。由于 $k= \frac{2\pi}{\lambda}$,因此可以绘出 $u(x)$-t的关系曲线。相位角 $= kx- \omega t= k(x- c_0 t)$,为 cos 函数的宗量。注意,当时间 t 增加时,x 也增加 $c_0\Delta t$,以便保持 为一常数。由 $x= c_0\Delta t$,有:

1) $f(x- c_0 t)$是沿 x 正方向传播的右行波。

2) $f(x+ c_0 t)$是沿 x 负方向传播的左行波。

为引入相速度 c_p,我们考虑以常相位传播的波。其物理解释如下:对于式(2.8),为了保持常相位,当 x 增加时 t 也增加。常相位波的传播速度为 c_0,如图 2.3 所示。此处 $\Delta t= t_2- t_1$。

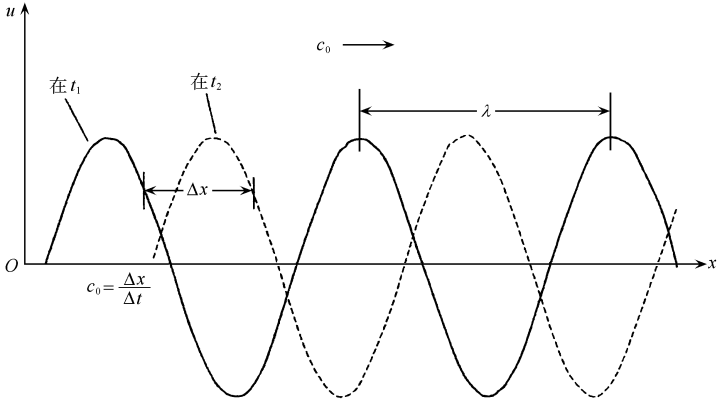


图 2.3　以固定相速度传播的扰动

可将式(2.6)表达为指数形式,即

$$u = A_1 e^{i(kx+\omega t)} + B_1 e^{-i(kx-\omega t)}$$

上式可简化为 $u=(A_1e^{ikx}+B_1e^{-ikx})e^{i\omega t}$。此式是利用欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$(附录 C)推导的。

2.2.3 D′Alembert解

现讨论式(2.3)的另外一种解法。一维波动方程的 D′Alembert 解(早在 1750 年就已发表)为

$$u(x,t)=f(x-ct)+g(x+ct) \tag{2.9}$$

只要满足一定的初始条件和边界条件,对于任意函数 f 和 g,式(2.9)都能满足式(2.3)。另外,令 $\xi=x-ct$,$\eta=x+ct$,则方程(2.3)变为 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$。两者具有相同的解,而且这些波在传播过程中没有畸变,如图 2.4 所示。

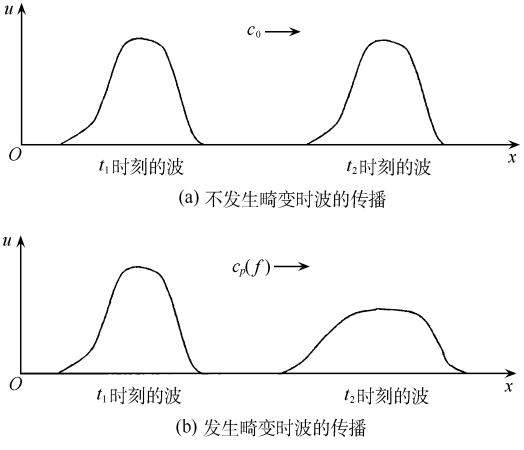


图 2.4 可能的波动形式

2.2.4 初值条件

现在考虑下列初值问题

$$u(x,0)=U(x)\qquad u(x,0)=V(x)$$

将上面两式代入 D′Alembert 解式(2.9),得

$$f(x)+g(x)=U(x)\qquad(\text{当 } t=0 \text{ 时})$$

$$-c_0f'(x)+c_0g'(x)=V(x)$$

由 $u(x,t)=f(x-c_0t)+g(x+c_0t)$可得到 f 和 g 的表达式。

现在讨论弦有初始位移的传播情况。这里 $u(x,0)=U(x)=+1(-a<x<a)$,$U(x)=0\ (x>a)$。其解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}U(x-c_0t)+\frac{1}{2}U(x+c_0t)$$

结果如图 2.5 所示。

图 2.6 描绘了有限长弦初值问题的例子。其边界条件为 $u=0(x=0,x=l;t\geqslant 0)$,弦在 $x=0$ 和 $x=l$ 处被固定。利用 Fourier 级数可求得式(2.6)。在给定 $\omega=kc_0$ 时,其通解为

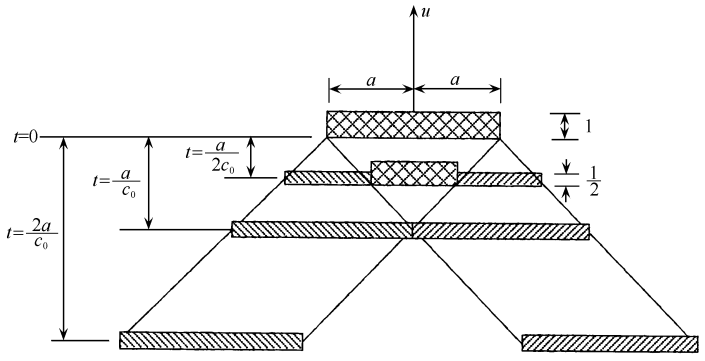


图 2.5　有初值位移条件下弦中波的传播

注:由于 $x=c_0t$,到达 $x=a/2$ 时对应的时间为 $t=a/2c_0$

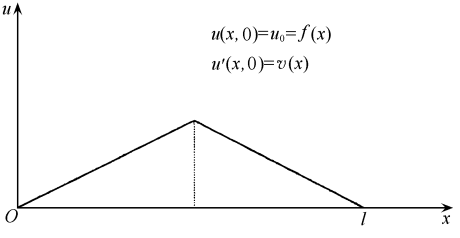


图 2.6　初值问题

$$u(x,t)=(A_1\sin kx+A_2\cos kx)(A_3\sin\omega t+A_4\cos\omega t)$$

当 $t=0$ 时,$u(x,0)=(A_1\sin kx+A_2\cos kx)A_4$。再由边界条件知 $A_2=0,\sin kl=0$,则 $k=n\pi/l(n=0,1,2,\cdots)$,即

$$\omega=kc_0=\frac{n\pi}{l}c_0$$

由初始条件 $\dot{u}(x,0)=0$,得 $A_3=0$。

最后,所求解可以表示成如下形式

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi c_0t}{l}$$

由位移初始条件 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}=f(x)$,我们可以解出 a_n。由 Fourier 级数知,系数 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$。至此,$u(x,t)$全部解出。

2.2.5　特征线概念

考虑到 $\xi=x-c_0t$ 是在(x,t)平面内的一条直线,且沿该直线有 $f(x-c_0t)=f(\xi)=$ 常数。类似地,$\eta=x+c_0t$ 也是该平面内的一条直线,只是斜率相反,$g(x+c_0t)$亦为常数,这

些线称为特征线。特征线概念在研究固体中波的传播的很多领域中非常有用,而这里引入本概念的目的是想使读者对波在结构中的传播过程有大致的感性认识。

特征线是双曲型偏微分方程的特征之一,其通常情况为曲线。在图 2.7 中,我们仅考虑特征线为直线的情况。由直线的斜率以及直线与 y 轴的截距可确定直线的方程。

现在我们将目光移向另一类问题(这里仍旧使用特征线)。设想一个物体冲击另外一个物体时考虑波在两物体内的来回传播(图 2.7)。在每一界面上的冲击都将产生新的反射和透射波。在(x,t)平面上波前传播示意图如图 2.8 所示。

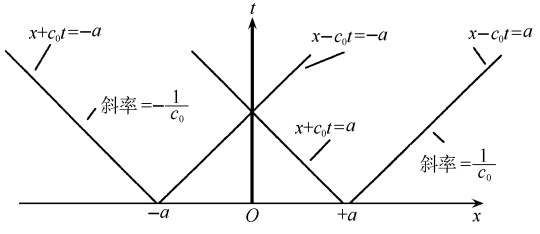


图 2.7　(x,t)平面上波前传播示意图

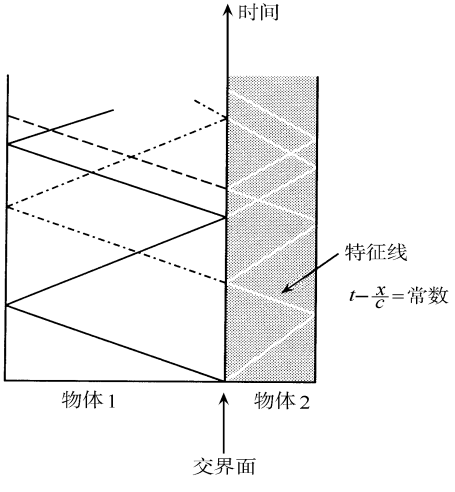


图 2.8　当一物体冲击另一物体时波传播的特征线
(只考虑一种类型的波,无波型转换)

2.3　弹性基础上的弦

以下考虑另一类涉及波形畸变的问题:弹性基础上的弦,如图 2.9 所示。力和位移的关系为

$$q(x,t) = -Ku(x,t) \tag{2.10}$$

将式(2.10)代入式(2.2)中,得

$$T u_{,xx} - K u = \rho \ddot{u}$$ ①

或①

$$u_{,xx} - \frac{K}{T} u = \frac{1}{c_0^2} \ddot{u} \tag{2.11}$$

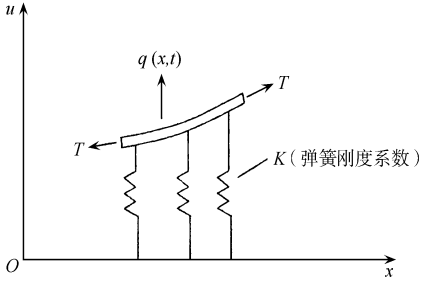


图 2.9　弹性基础上弦的微元段示意图

式中 $c_0 = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ ②。比较式(2.11)和式(2.3)发现：① 式(2.11)比式(2.3)多一项。② $f(x - c_0 t)$形式的解可能不适用。③ 波在传播过程中存在畸变现象。

考察一个简谐波在传播过程中可能出现的情况。假设

$$u(x,t) = A e^{i(kx - \omega t)} \tag{2.12}$$

将式(2.12)代入式(2.11)中，有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A e^{i(kx - \omega t)}(ik) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A e^{i(kx - \omega t)}(ik)(ik) = - A e^{i(kx - \omega t)} k^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A e^{i(kx - \omega t)}(- i\omega) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A e^{i(kx - \omega t)}(- i\omega)(- i\omega) = - A e^{i(kx - \omega t)} \omega^2$$

将上述各项代入式(2.11)，有

$$\left.\begin{aligned} - A e^{i(kx - \omega t)} k^2 - \frac{K}{T} A e^{i(kx - \omega t)} &= \frac{1}{c_0^2}(- A e^{i(kx - \omega t)} \omega^2) \\ - k^2 e^{i(kx - \omega t)} - \frac{K}{T} e^{i(kx - \omega t)} &= \frac{- \omega^2}{c_0^2} e^{i(kx - \omega t)} \\ \left(- k^2 - \frac{K}{T} + \frac{\omega^2}{c_0^2} \right) e^{i(kx - \omega t)} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

此表达式称为特征方程(亦称为频散方程、频率方程)。对于一般的非平凡解，相应的频散(dispersion)方程为

$$\left(- k^2 - \frac{K}{T} + \frac{\omega^2}{c_0^2} \right) = 0$$

上式有多种表示方法，如可以写成

$$\omega^2 = c_0^2 \left(k^2 + \frac{K}{T} \right), \qquad \text{其中 } \omega = \omega(k) \tag{2.14}$$

或

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{K}{T}, \qquad \text{其中 } k = k(\omega) \tag{2.15}$$

注意到，在张紧弦的例子中，$c_p \neq c_0$。因此，给定 $\omega = k c_p$，由式(2.14)有

$$c_p^2 = c_0^2 \left(1 + \frac{K}{T k^2} \right) \tag{2.16}$$

当 $k \to \infty$ 时

① 原文 $u_{,xx} - K u = \rho \ddot{u}$ 有误。——译者注

② 原文式中符号与原图 2.9 不一致。——译者注

$$\omega = c_0 k \sqrt{1 + \frac{K}{T k^2}} \to c_0 k \tag{2.17}$$

在式(2.14)中,当$K = 0$时可以得到同样的结果,而此时$c_p = c_0$[式(2.16)]。因此,$c = c(k)$或$k = k(c)$时,由式(2.16)有

$$k^2 = \frac{K/T}{(c^2/c_0^2) - 1}$$

这将得到3个重要结论:

1) 波速是频率的函数。因此,从Fourier谐波分析观点考虑,一定会发生脉冲畸变。

2) 式(2.15)有两个实根

$$k = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{K}{T}}$$

如果$\omega^2/c_0^2 > K/T$,则波的传播方向可能向左,也可能向右,此时$u = A e^{-i(\pm kx + \omega t)}$;另一种情况,如果$\omega^2/c_0^2 < K/T$,$k$为虚数,则表示一个不能传播的扰动,此类情况不作考虑。若使$k^2 = -k^2$,则$u(x,t) = A(e^{\pm kx})(e^{-i\omega t})$,此时将产生驻波。

3) 对于$k = 0$的特殊情况,由式(2.15)得$\omega^2/c_0^2 = K/T$。利用$k = 2\pi/\lambda$,我们可以得到:当$\lambda \to \infty$(长波长极限)时,$u = A e^{-i\omega_0 t}$,并由式(2.14)知,这是一种匀速振动,且截止频率为$\omega_0 = c_0\sqrt{K/T}$。

因$c_p = \omega/k$,故当k值减小时,c_p增大;当k值趋近于零时,c_p趋近于无穷大。

2.4 黏性基础上的弦

图2.10是一根在黏性基础上的弦。这是一个高度频散和衰减系统,令$q(x,t) = -Cu(x,t)$。如果考虑波动控制方程及可能的解时,有

$$T u_{,xx} - C u = \rho \ddot{u} \tag{2.18}$$

假设

$$u = A e^{i(kx - \omega t)} \tag{2.19}$$

将式(2.19)代入式(2.18),得①

$$k^2 = i\frac{C\omega}{T} + \frac{\omega^2}{c_0^2}$$

由于k为复数,所以不可能存在波的自由传播。

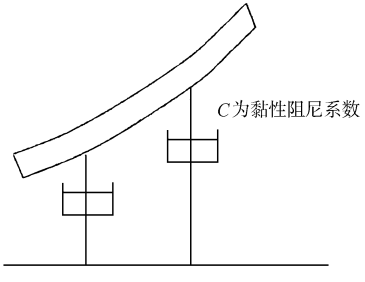


图2.10 黏性基础上弦的模型

利用更为传统的标记法,我们考虑下列表达式,即将波数写成一个实部k_r和一个虚部的形式②

$$k = k_r + i\alpha$$

将其代入式(2.19)和式(2.18),得$u = A e^{[i(k_r + i\alpha)x - \omega t]}$,简化为如下形式:

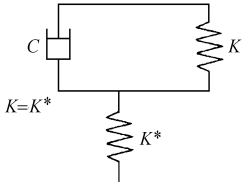
① 原文$k^2 = i\frac{C\omega}{F} + \frac{\omega^2}{c_0^2}$有误。——译者注

② 原文$k = k_r + i\alpha$有误。——译者注

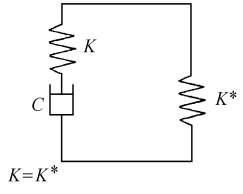
$$u = \underbrace{A e^{(-\alpha x)}}_{\text{表示衰减部分}} \cdot \underbrace{e^{i(k_r x - \omega t)}}_{\text{波动形式}}$$

2.5 黏弹性基础上的弦

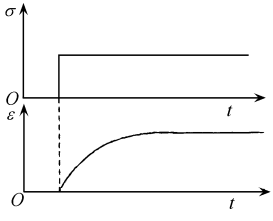
现在,我们考虑黏弹性基础上的弦。首先介绍在材料频散情况下黏弹性模型分析时的一些基本概念。在频散系统中,相速度 c_p 是频率的函数。图 2.11(a)和图 2.11(b)给出了黏弹性系统的模型。在 Kelvin 和 Maxwell 的经典模型中,衰减作为频率的函数出现,这无论在理论上还是实验中都很难处理。图 2.11(c)和图 2.11(d)给出了试件应力、应变曲线和与之对应的相速度曲线、衰减曲线(相速度和衰减均为频率的函数)。这个问题将在第 18 章中更完整地讨论。



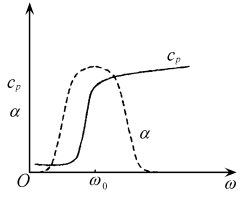
(a) Kelvin Voigt模型



(b) Maxwell模型
(黏弹性模型)



(c) 应力应变响变



(d) 典型的相速度和衰减随频率的变化关系

图 2.11 黏弹性模型及响应函数

2.6 频散系统的图解法

为了研究频散系统的一些基本概念,我们给出弹性基础上弦的结果的图解法。描述频散特征的两种方法是频谱图和频散曲线。先来看频谱图。

想像一个弹性基础上的弹簧,由式(2.14)有

$$\omega^2 = c_0^2\left(k^2 + \frac{K}{T}\right)$$

如果 $k=0$,则 ω 为截止频率,$\omega=\omega_0=c_0\sqrt{K/T}$;当 $k\to\infty$ 时,$\omega=c_0 k$ 是一条直线(渐进线)。现在考虑 k_{Re}、k_{Im} 与 ω_0 的关系。由式(2.15)得

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{K}{T}$$

由于 $\omega_0 = c_0\sqrt{K/T}$，有 $\omega_0^2 = c_0^2(K/T)$ 或 $K/T = \omega_0^2/c_0^2$，则有

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{\omega_0^2}{c_0^2} \qquad k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{\omega_0^2}{c_0^2}}$$

当 $\omega < \omega_0$ 时，k_{Im} 存在。当 $\omega > \omega_0$ 时，k_{Re} 存在。在频谱图中，我们研究的是频率和波数的关系，而在频散曲线中，研究的是相速度和波数的关系。

图 2.12 给出了频谱图的图解形式。为了得到频散曲线，可以从频谱图中求出相速度信息。利用 $\tan\theta = \omega/k = c_P$ 可从频谱图中推出相速度。由图 2.13 可以看出，当 $k \to 0$ 时，$c_P \to \infty$。

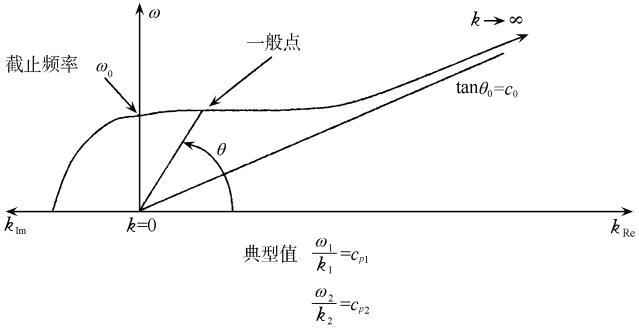


图 2.12　在弹性基础上的弦的典型频谱图

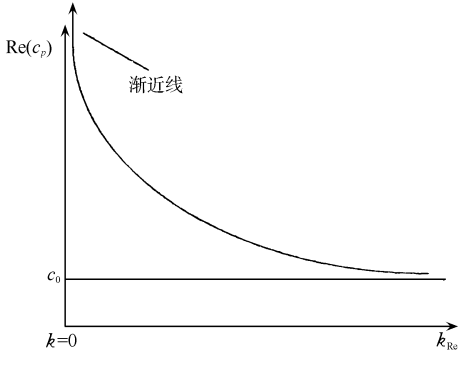


图 2.13　典型相速度随波数变化的频散曲线

对于小波数 k 和长波长 λ，其截止频率为 ω_0（这里 $c_P \to \infty$）时，产生均匀振动。当 $k \gg 1$ 和 $\lambda \ll 1$ 时，基础的影响达到最小，而有些波（如 Lamb 波）则具有多模态（mode）特征。图 2.14给出了应用于超声波评价的多模态频散曲线。为将频散曲线应用于板、棒、多层介质和其他结构中，将在本书的后续章节中求得这些曲线。

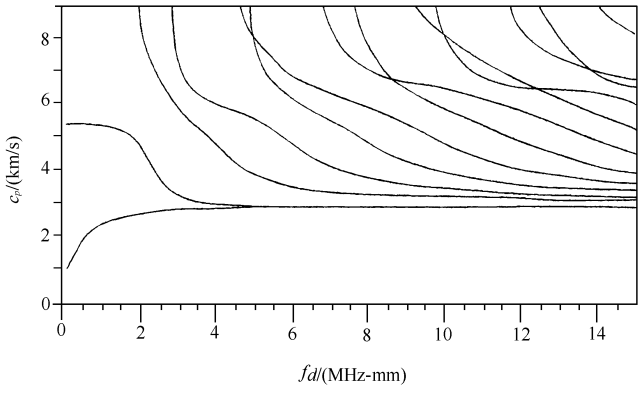


图 2.14　c_L = 6.3km/s 和 c_T = 3.1km/s 时铝板中的相速度频散曲线

2.7　群速度概念

群速度是关于一族频率相近的波的传播速度。Lord Rayleigh 曾说过:“群速度的概念常用下面这个例子说明,即当一族波列到达一个静止水面时,波群的速度比它所包含的每一个子波的速度都要小;这些子波仿佛通过波群前进,当达到其内部极限时而消失。”(1945,卷 I,p475)。Heisenberg 在波动力学中,用到了这样一个术语“波包的速度”(Serway　1990)。

最简单的分析法(Stokes　1876)是考虑两个振幅相同,频率 ω_1 和 ω_2 略有差异的谐波的传播问题,有

$$u = A\cos(k_1 x - \omega_1 t) + A\cos(k_2 x - \omega_2 t) \tag{2.20}$$

式中,$k_1 = \omega_1 / c_1$;$k_2 = \omega_2 / c_2$。利用三角恒等式

$$A(\cos\alpha + \cos\beta) = 2A\left[\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]$$

可以将式(2.20)改写为

$$u = 2A\cos\left\{\frac{1}{2}(k_2 - k_1)x - \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t\right\}\cos\left\{\frac{1}{2}(k_2 + k_1)x - \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)t\right\} \tag{2.21}$$

注意到余弦函数是一个偶函数,我们做如下代换

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \qquad \Delta k = k_2 - k_1$$

$$\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1) = \omega_{AV} \qquad \frac{1}{2}(k_2 + k_1) = k_{AV}$$

$$c_{AV} = \frac{\omega_{AV}}{k_{AV}}$$

则

$$u = \underbrace{2A\cos\left(\frac{1}{2}\Delta k x - \frac{1}{2}\Delta\omega t\right)}_{\text{低频项}}\underbrace{\cos(k_{AV}x - \omega_{AV}t)}_{\text{高频项}} \tag{2.22}$$

注意到低频项有一传播速度,群速度定义为

$$c_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

取极限为 $c_g = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$。高频项同样有一传播速度,$c_p = \omega/k$。

现在用另外一种方式定义群速度。对一个时间增量 $t = t_0 + \mathrm{d}t$,我们将任一波分量的相位变化表示成如下形式①

$$\mathrm{d}P_i = [k_i(x_0 + \mathrm{d}x) - \omega_i(t_0 + \mathrm{d}t)] - (k_i x_0 - \omega_i t_0) = k_i \mathrm{d}x - \omega_i \mathrm{d}t$$

为保持群速度不变,所有分量的相位变化应该相同,即 $\mathrm{d}P_j - \mathrm{d}P_i = 0$。关于相位角 $kx - \omega t$,有

$$\underset{\mathrm{d}k}{(k_j - k_i)}\mathrm{d}x - \underset{\mathrm{d}\omega}{(\omega_j - \omega_i)}\mathrm{d}t = 0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c_g \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \tag{2.23}$$

这就是群速度的经典定义。

进一步比较 $c_p = \omega/k$ 和 $c_g = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$,有如下形式

$$c_g = \frac{\mathrm{d}(kc_p)}{\mathrm{d}k} = c_p + k\frac{\mathrm{d}c_p}{\mathrm{d}k} \tag{2.24}$$

式中,$c_p = c_p(k)$。在 ω-k 的频谱图中可以绘出 $c_g > 0$、$c_g = 0$ 或 $c_g < 0$ 三种情况。

频率相近的一族波的叠加导致了图 2.15 中的典型结果。不同的谐波以不同的相速度 c_p 传播,但叠加起来之后的波群以群速度 c_g 传播。实际上,我们遇到的往往是许多波的叠加而不仅仅是前面提到的两个波的叠加。因此

$$u = \sum_{i=1}^{n} A_i \cos(k_i x - \omega_i t) \tag{2.25}$$

式中,k_i 和 ω_i 只略有差异。

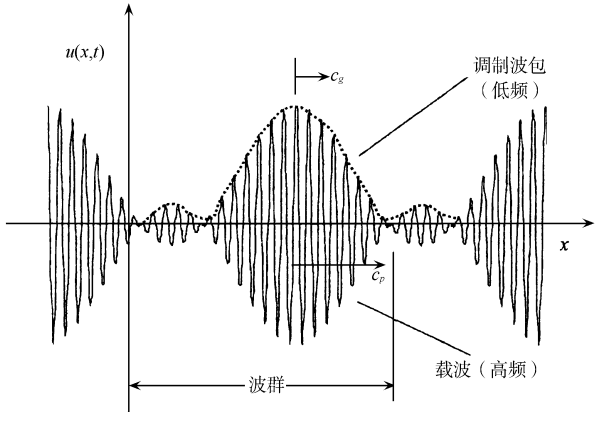


图 2.15　群速度实例

① 原式 $\mathrm{d}P_i = [k_i(x_0 + \mathrm{d}x) - \omega_i(t_0 + \mathrm{d}t)] - (k_i x_0 - \omega_0 t)$有误,否则得不到 $k_i\mathrm{d}x - \omega_i\mathrm{d}t$。——译者注

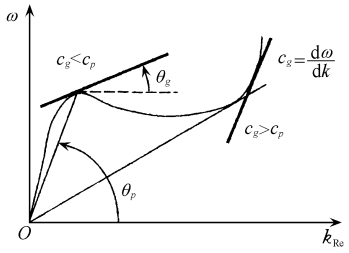


图 2.16　群速度随相速度变化曲线

现在我们从频谱的观点研究相速度和群速度。如图 2.16 所示,群速度作为频谱曲线上各点处的斜率标在图上。现分三种情况讨论:

1) $c_p > c_g$——经典(正常)频散,如 Rayleigh 例子一样,起源于波群后面,向前移行,直至消失。

2) $c_p = c_g$——无频散。

3) $c_p < c_g$——异常频散,发生在波群前面,向后移行,而后消失。从 c_g 的表达式中也可以说明上述三种情况。由式(2.24)得

$$c_g = \frac{\mathrm{d}(kc_p)}{\mathrm{d}k} = c_p + k\frac{\mathrm{d}c_p}{\mathrm{d}k}$$

注意到 $\lambda = 2\pi/k = 2\pi k^{-1}$,则

$$c_g = c_p + k\frac{\mathrm{d}c_p}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}k} = c_p + \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\mathrm{d}c_p}{\mathrm{d}\lambda}(-2\pi k^{-2}) = c_p + \frac{2\pi}{\lambda}\frac{-2\pi}{(2\pi)^2}\lambda^2\frac{\mathrm{d}c_p}{\mathrm{d}\lambda} = c_p - \lambda\frac{\mathrm{d}c_p}{\mathrm{d}\lambda}$$

因此

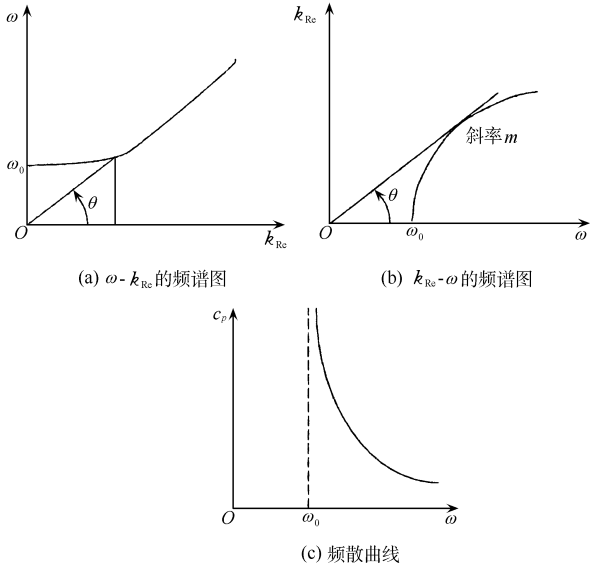
$$c_g = c_p - \lambda\frac{\mathrm{d}c_p}{\mathrm{d}\lambda} \tag{2.26}$$

下面,我们研究群速度和能量传递的问题。考虑一个简单波群

$$u = 2A\cos\left(\frac{1}{2}\Delta k x - \frac{1}{2}\Delta\omega t\right)\cos(kx - \omega t)$$

定义能量密度为

$$\hat{E} = \rho u^2 = 4\rho\omega^2 A^2\cos^2\left(\frac{1}{2}\Delta k x - \frac{1}{2}\Delta\omega t\right)\sin^2(kx - \omega t) + \cdots$$



(a) ω-k_{Re}的频谱图　　(b) k_{Re}-ω的频谱图

(c) 频散曲线

图 2.17　由频谱转化为频散曲线过程

在几个周期 T 内,对于上式进行时间平均(在此期间,调制不会有很大变化),对于无损介质,引用 Miklowitz(1978),得

$$\langle \hat{E} \rangle \cong 2\rho\omega^2 A^2 \cos^2\left[\frac{1}{2}\Delta k x - \frac{1}{2}\Delta\omega t\right]$$

这意味着时间平均的能量密度的传播速度为

$$c_E = c_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \tag{2.27}$$

即群速度就是能量传播的速度。

现在我们来看由频谱图转绘为工程中更为常见的频散曲线 $c_P(\omega)$,如图 2.17 所示。欲绘制 c_P-f 图,很容易将 ω-k 的频谱图改为 k-ω 图[如图 2.17(a)和(b)所示]。利用 $c_P = \omega/k$,可以由图 2.17(b)通过点对点的方式来绘制曲线[图 2.17(c)]。图 2.18 给出了由相速度频散曲线来绘制群速度频散曲线的过程。

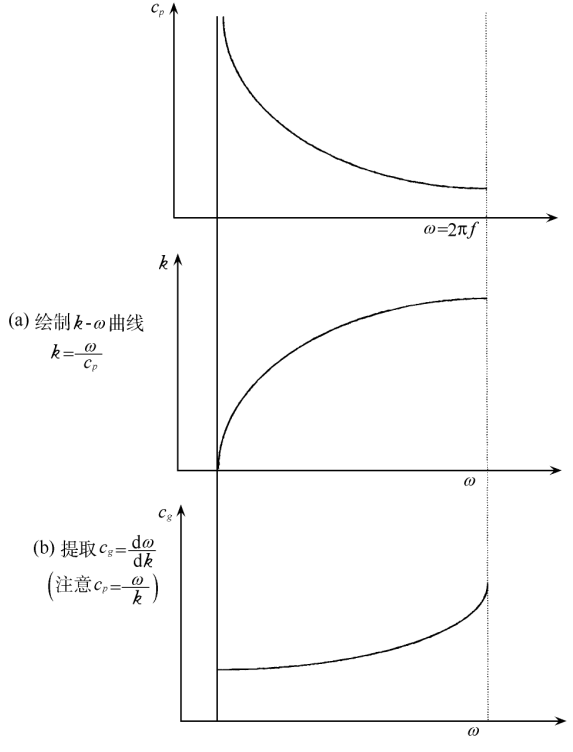


图 2.18　由相速度频散曲线求群速度频散曲线的过程图

2.8　习　　题

1.(a)长为 L 的吉他弦,欲使其频率增加一倍,求弦中张力增加的百分比。(b)欲使频率加倍,则弦的横截面直径有何变化?

2.(a)在上题中,如果张力增加一倍,求波速的改变;(b)确定弦中波速的最大值。

3. 推导黏弹性基础上的波动方程。

4. 给定一特殊频谱。由频谱图导出频散曲线,同时确定群速度曲线。

5. 给定边界条件为 $u(0,t)=u(l,t)=0$,初始条件为 $u(x,0)=f(x)$,$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=0$,求解弦中波的传播问题。

6. 试推导群速度作为相速度和频率函数时的表达式。

7. 在图 2.19 给定的模态下,估计 A 点的群速度值和曲线所示的截止频率。

8. 求解如图 2.20 所示的初值问题。弦在 $x=0$ 和 $x=10$ 两点处固定。图 2.20 为 $t=0$ 时的位移函数。

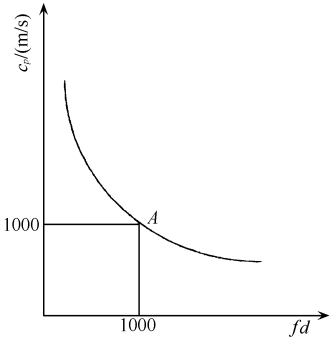


图 2.19　习题 7

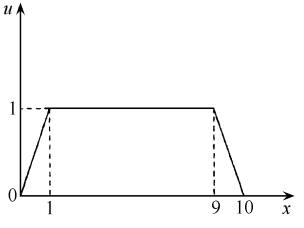


图 2.20　习题 8

9. 确定图 2.7 中的直线方程。

10. 给定图 2.8 中的特征线,画出钢撞击在已知厚度的有机玻璃上时的简图。

11. 推导黏弹性基础上的弦的特征方程,并给出图解法。

12. 已知一频谱图 $\omega(k)$,绘出 $c_p(k)$图。

13. 已知一频谱图 $\omega(k)$,绘出 $c_g(k)$图。

14. 已知频散曲线 $c_p(\omega)$,绘出 $c_g(\omega)$群速度频散曲线。

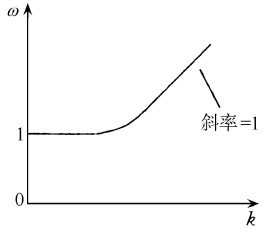


图 2.21　习题 18

15. 对于负的群速度,$k(\omega)$或 $\omega(k)$曲线会出现何种情况?

16. 对于负的群速度,$c_p(f)$曲线会出现何种情况?

17. 利用张力、密度、弹簧刚度的实际值,绘出类似于图 2.12 的频谱图。

18. 根据如图 2.21 所示的 ω-k 的频谱曲线,试绘出相速度和群速度与波数 k 的关系曲线。(描绘出 $k=0$、k 为较大值时的两个点,然后指出两点间的大致走向)