

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

噪声与振动控制技术基础

(第二版)

盛美萍 王敏庆 孙进才 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书为适应环境类专业“振动与噪声控制技术”及其相关课程的教学和实践需要而编写。

本书分为基础篇、控制篇、运用篇三大部分。基础篇利用较少的篇幅,简明扼要地介绍了振动基础和声学理论基础,以及振动与噪声控制的一般过程。本书的重点是振动控制技术和噪声控制技术,在控制篇,用五章的篇幅,详细阐述了吸振、隔振、阻尼减振、吸声、隔声等专项控制技术。在实际工程运用中,每一种专项控制技术并不是孤立的,在运用篇中,介绍了消声器与声屏障,它们是噪声控制各专项技术综合运用的典型例子。

本书可作为高等院校环境类专业和声学专业及相关专业的广大师生和工程技术人员教材和参考书。

图书在版编目(CIP)数据

噪声与振动控制技术基础/盛美萍,王敏庆,孙进才编著. —2版.

—北京:科学出版社,2007.12

(普通高等教育“十一五”国家级规划教材)

ISBN 978-7-03-020235-2

I. 噪… II. ①盛…②王…③孙… III. ①噪声控制—高等学校—教材
②振动控制—高等学校—教材 IV. TB53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 181080 号

责任编辑:杨向萍 赵晓霞 / 责任校对:张怡君

责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001年8月第一版 开本:B5(720×1000)

2007年12月第二版 印张:12 3/4

2007年12月第五次印刷 字数:234 000

印数:7 201—10 200

定价:19.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换(科印))

第二版前言

在过去几年中,我们已经看到,振动与噪声污染的危害日益受到人们的重视,社会对振动与噪声控制技术的需求也日益增长,相关图书大量面世的情况前所未有,振动与噪声控制行业正处在蓬勃发展阶段。

本书第一版教材从 2001 年出版以来,得到了广大读者的支持和厚爱,第二版有幸入选“普通高等教育‘十一五’国家级规划教材”,这是对我们的鞭策与鼓励,为此作者深表感谢!

在第二版中,我们对教材内容做了部分修正,并将全书分为基础篇、控制篇、运用篇三大部分。在基础篇里,将振动基础和声学基础加以浓缩,分别用一章的篇幅加以介绍;在控制篇里,介绍了吸振、隔振、阻尼减振、吸声、隔声等专项控制技术;在运用篇里,主要介绍了消声器与声屏障,它们是噪声控制各专项技术综合运用的典型例子。为便于读者查阅,本书附录收录了一些常用标准,并在第 1 章列出了常用符号与公式。

振动与噪声控制技术发展到今天,凝结了大量科研人员、工程技术人员的心血,为此我们向为这一技术发展做出贡献的专家学者表示由衷的感谢,向为本书第一版、第二版提供无私帮助的人们表示衷心感谢。我们由衷希望本书能够对广大学生和工程技术人员有益,同时也恳请各位读者对本书提出宝贵意见。

在时间的长河中,六年只是一瞬间;对于作者而言,这是一段值得终生回味和铭记的时光。值此教材再版之际,请允许我表达一个心愿:愿人间少一点嘈杂与喧嚣,多一分和谐与美好。

盛美萍

2007 年 11 月

第一版前言

噪声污染是严重的环境污染之一,随着现代工业化程度的不断提高,噪声污染也日益加剧,严重影响广大人民群众的身心健康,因此噪声控制已经成为环境保护的一项重要内容。大气污染、水污染属于化学污染,它们对人体和环境的影响是长期的;噪声污染属于物理污染,它的显著特点是几乎没有后效性,只要噪声停止,噪声污染随即消失,因此采用消声、吸声和隔声措施,可以有效消除噪声污染。

振动是产生噪声的主要原因,因此振动控制不仅可以保护仪器设备和人员不受振动危害,而且采用减振隔振措施也可以有效地控制噪声污染。

从事噪声污染控制的专业人员必须具备振动和声学的基础知识,而目前高校理工类专业课程中,机械或力学类专业一般都设置振动基础类课程,而声学工程专业一般只设置专业声学(如水声学、建筑声学、超声学等)或声学基础课程。本教材为适应环境噪声控制人员的需要而编写,主要包括振动基础、声学基础、声和振动相互作用、噪声和振动控制技术等基本内容。同时也为从事低噪声机械设计人员提供了声和振动的基础知识。

环境科学与工程学科是一个综合性学科,该学科不同专业的基础知识相差甚远。因此本教材的编写由浅入深、由简单到复杂,以适合于从事环境规划和环境管理的人员阅读。

本教材不仅提供了声和振动的基础知识,而且为从事噪声和振动控制的工程技术人员提供了噪声与振动控制技术和实际例子,同时还给出了有关材料的参数。因此本教材亦可作为噪声和振动控制手册使用。

编写本教材的目的就是要为环境科学与工程类理工科大学生提供这样一本教材,即通过对本教材的学习,广大大学生不但能够知其然,而且能够知其所以然;不但能够运用现有噪声与振动控制技术,而且具备发展新的噪声与振动控制技术的能。

本教材分为基础篇和应用篇两大部分。在基础篇里,将振动基础和声学基础加以浓缩,分别以一章的篇幅出现;在应用篇里,介绍了各种振动和噪声控制技术,其中大量地引用了本书作者和其他作者的论著,详细引用情况已在参考文献中列出,在此作者向他们表示衷心感谢。

作者衷心希望本教材能够对广大学生和工程技术人员有益。但由于作者水平有限及时间仓促,教材中难免存在一些差错或遗漏,恳请各位读者批评指正。最

后,作者要特别感谢武延祥教授在本教材的编写过程中给予的支持和帮助。

作 者

2001年4月

目 录

第二版前言
第一版前言

基 础 篇

第 1 章 振动基础概述	3
§ 1.1 质点振动学	3
§ 1.1.1 单自由度系统的自由振动	4
§ 1.1.2 有阻尼的自由振动	6
§ 1.1.3 质点的强迫振动	8
§ 1.2 弹性体振动基础	13
§ 1.2.1 弦振动	13
§ 1.2.2 梁的纵振动	16
§ 1.2.3 梁的横振动	19
§ 1.2.4 薄板的横振动*	25
振动基础部分常用符号与公式	29
习题	32
第 2 章 声学基础概述	33
§ 2.1 声波的基本性质	33
§ 2.1.1 理想流体介质中的声波方程	34
§ 2.1.2 平面波、球面波和柱面波	36
§ 2.1.3 声波的反射与透射	39
§ 2.2 典型声源及其声辐射	42
§ 2.2.1 脉动球源、点声源和多极子声源	42
§ 2.2.2 无限障板上活塞式辐射声场	47
§ 2.2.3 板的声辐射	50
习题	52
第 3 章 振动与噪声控制的一般过程	54
§ 3.1 倍频程分析	54
§ 3.2 振动的危害与评价	55
§ 3.2.1 振动的危害	55

§ 3.2.2 振动的评价	56
§ 3.3 振动控制过程概述	58
§ 3.4 噪声的危害与评价	60
§ 3.4.1 噪声的危害	60
§ 3.4.2 噪声的评价	61
§ 3.5 噪声控制的一般步骤	67
习题	68

控制篇

第 4 章 动力吸振	71
§ 4.1 动力吸振原理	71
§ 4.1.1 无阻尼动力吸振器	71
§ 4.1.2 无阻尼动力吸振器的使用条件	73
§ 4.1.3 阻尼动力吸振器	74
§ 4.1.4 动力吸振器设计步骤	75
§ 4.2 复式动力吸振器	76
§ 4.2.1 复式动力吸振特性	76
§ 4.2.2 复式动力吸振器最佳参数的选择	78
§ 4.3 非线性动力吸振器	79
习题	80
第 5 章 振动隔离	81
§ 5.1 隔振原理	81
§ 5.1.1 隔振的分类	81
§ 5.1.2 隔振的评价	82
§ 5.1.3 隔振原理	83
§ 5.1.4 隔振性能分析	84
§ 5.2 隔振设计与隔振器	86
§ 5.2.1 隔振设计步骤	86
§ 5.2.2 常用隔振器及其应用	88
§ 5.3 防振沟	91
习题	92
第 6 章 阻尼减振	93
§ 6.1 阻尼减振原理	93
§ 6.1.1 阻尼的定义与作用	93
§ 6.1.2 阻尼的产生机理	94

§ 6.2 阻尼材料与阻尼结构	97
§ 6.2.1 阻尼材料	97
§ 6.2.2 阻尼基本结构及其应用	102
第 7 章 吸声技术	106
§ 7.1 吸声评价方法	106
§ 7.1.1 吸声系数	106
§ 7.1.2 吸声量	107
§ 7.1.3 吸声预估与应用	107
§ 7.2 吸声材料	109
§ 7.2.1 多孔性吸声材料的吸声机理	109
§ 7.2.2 影响多孔性吸声材料吸声系数的因素	110
§ 7.2.3 常用的吸声材料的吸声特性	111
§ 7.3 吸声结构	112
§ 7.3.1 共振吸声原理	113
§ 7.3.2 常用吸声结构	113
习题	117
第 8 章 隔声技术	119
§ 8.1 隔声原理	119
§ 8.1.1 透声系数与隔声量	119
§ 8.1.2 质量定律	120
§ 8.1.3 吻合效应	121
§ 8.1.4 单层匀质墙的隔声性能	123
§ 8.1.5 双层墙的隔声性能	123
§ 8.2 隔声间	127
§ 8.3 隔声罩	129
习题	130
运 用 篇	
第 9 章 消声器	135
§ 9.1 消声器分类与性能评价	135
§ 9.1.1 消声器分类	135
§ 9.1.2 消声器性能评价	135
§ 9.2 阻性消声器	140
§ 9.2.1 单通道直管式阻性消声器	141
§ 9.2.2 片式消声器	144

§ 9.2.3	折板式、声流式、蜂窝式消声器	145
§ 9.2.4	弯头消声器	145
§ 9.2.5	迷宫式消声器	146
§ 9.2.6	气流对阻性消声器声学性能的影响	147
§ 9.2.7	气流再生噪声对消声器声学性能的影响	148
§ 9.2.8	阻性消声器的设计	149
§ 9.3	抗性消声器	151
§ 9.3.1	扩张室消声器	151
§ 9.3.2	扩张室消声器设计	158
§ 9.3.3	共振腔消声器	159
§ 9.3.4	共振腔消声器的设计	163
§ 9.4	阻抗复合式消声器	164
习题	168
第 10 章	声屏障	169
§ 10.1	声屏障声学性能评价主要参数	169
§ 10.1.1	声屏障插入损失 IL	169
§ 10.1.2	隔声量 TL	169
§ 10.1.3	吸声系数 α	169
§ 10.1.4	降噪系数 NRC	169
§ 10.2	声屏障降噪原理	169
§ 10.2.1	声屏障的绕射	170
§ 10.2.2	声屏障的透射	172
§ 10.2.3	声屏障的反射	172
§ 10.3	声屏障插入损失计算	173
§ 10.4	声屏障的结构形式	173
§ 10.5	声屏障设计	174
参考文献	177
附录	178
附录一	城市区域噪声标准 GB 3096—93	178
附录二	城市区域环境噪声测量方法 GB/T 14623—93	179
附录三	工业企业厂界噪声标准 GB 12348—90	182
附录四	工业企业厂界噪声测量方法 GB 12349—90	183
附录五	建筑施工场界噪声测量方法 GB 12524—90	186
附录六	机场周围飞机噪声环境标准 GB 9660—88	188
附录七	城市区域环境振动标准 GB 10070—88	189

基 础 篇

第 1 章 振动基础概述

声音的本质就是气体、液体、固体介质中的质点振动,声音的产生和传播都离不开介质的力学振动行为。一阵微风吹来,人们就会听到树叶运动而发出“沙沙”的响声。音乐家轻轻拨动琴弦,提琴就会发出美妙的曲调。医生将听筒的一端置于病人的心脏部位,就能从另一端听到心脏“嘭嘭”跳动的声音。这些都是振动产生和传播声音的例子。声音有有利的一面,也有有害的一面。人们把不和谐的、令人反感的声音称为噪声。要抑制噪声的发生和传播,就必须了解噪声产生的原因和传播的规律,也就必须具备振动基本知识。

在我们生活的这个世界中,振动现象是无处不在的。世界上所有的物质都处在运动中,运动的方式千姿百态,而振动就是物体运动的一种十分重要和特殊的形式。物体在振动过程中,某些物理量(如位移、速度、加速度、电流、压力等)时大时小,发生周期性变化。例如,钟摆的周期性摆动、汽轮机主轴和叶轮在周期旋转过程中由于微小的偏心而产生的振动、汽车在凹凸不平的路面上行驶受到路面不断激励所发生的振动、高层建筑在风力作用下发生摇摆振动等。

振动学的研究范围十分广泛,本章主要介绍与声学问题联系比较密切的一些力学振动基础知识。1.1 节主要介绍质点振动学,1.2 节介绍一些典型弹性体的振动。

§ 1.1 质点振动学

所谓质点振动系统,就是假定:构成振动系统的物体,不论几何尺寸大小如何,都可看作是一个物理量集中的系统。质点振动系统又称为集中参数系统。质点振动系统的最基本构成就是质量块和弹簧。在质点振动系统中,质量块的质量可认为是集中在一点上,整个弹簧的刚度是均匀的,也就是说弹性也可认为是集中在一点上,由此构成的运动系统的运动状态是均匀的。

任何物体都具有一定的几何尺寸,但是在一定的假设条件下,可以用质点振动系统来描述。判断实际振动系统是否可以简化为质点振动系统模型,就要看物体的几何尺寸相比物体中传播的振动波的波长的相对值。如果物体的几何尺度大于振动波的波长,这就意味着在某一个瞬时,物体上各个位置的振动状态是不一样的,这种情况下振动系统不能用质点振动系统来描述。如果物体的几何尺寸与振

动波的波长相比小得多,那么振动物体上各个位置的振动状态就可以看成是近似均匀的,这种情况下振动系统就可以近似为质点振动系统。需要特别强调的是:判断实际物体的振动能否作为质点振动系统来近似,并不决定于它的绝对几何尺寸大小,而要看它的几何尺寸与振动波波长的相对关系。

在质点振动系统的假设下,实际振动物体的振动分析就变得较为简单,而研究获得的振动规律也比较清晰和直观。

§ 1 1 1 单自由度系统的自由振动

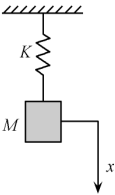


图 1.1 弹簧-质量系统

一个振动系统的自由度是指在振动过程中任何瞬时都能完全确定系统在空间的几何位置所需要的独立坐标的数目。一个振动系统究竟有多少个自由度,不仅取决于系统本身的结构特性,还要根据我们所研究的振动问题的性质、要求的精度,以及振动的实际情况等来确定。如图 1.1 所示的弹簧-质量系统,质量作为一个质点在空间有三个自由度,但是如果它只是在垂直方向作上下振动,则在振动过程中任何瞬时,系统的几何位置只需要一个独立坐标 x 就可以完全确定,这时可视其为单自由度系统。

最简单的单自由度振动系统就是一个弹簧连接一个质量块的系统。我们把质量块的质量记作 M ,把弹簧的刚度记作 K 。在没有外力扰动的情况下,质量块受到的重力与弹簧的弹力相平衡,系统处于相对静止状态。我们将静止状态下质量块的位置称为平衡位置。以平衡位置为坐标原点,假设有一个外力突然在 x 方向推动或拉动质量块,使得弹簧产生拉伸或压缩,随即释放,此后质量块在弹簧弹力的作用下,将在平衡位置附近作往复运动,也就是发生了振动。如果外力仅在初始时刻使物体产生一个初位置或初速度,而在振动过程中并无外力作用,那么这种情况下质点振动系统的振动就称为自由振动。

对于图 1.1 所示的单自由度自由振动系统进行受力分析,如图 1.2 所示。当质量块离开平衡位置,沿 x 轴正方向产生位移 ξ 时,弹簧也相应伸长 ξ ,这时质点就受到了弹簧的作用力。我们假设质点离开平衡位置的位移很小,以致弹簧的伸长或收缩没有超出弹性变形的限度,按照胡克定律,在弹性范围内,弹簧力的大小与变形量成正比,称为线性恢复力,并可表示为

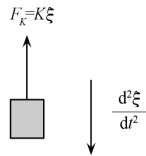


图 1.2 振子受力分析

$$F_k = - K\xi \tag{1.1.1}$$

式中,比例系数 K 就是弹簧的刚度系数,简称刚度,它等于使弹簧发生单位变形量所需要的力。有时也用其倒数来表示,刚度系数的倒数称为顺性系数,或简称力

顺,它等于单位力产生的变形量。线性恢复力的作用就是使离开平衡位置的质点趋于恢复到平衡位置,因此线性恢复力的方向与质点位移的方向刚好相反。

按照牛顿第二运动定律,质点在线性恢复力的作用下将产生加速度,有

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -K\xi \quad (1.1.2)$$

式(1.1.2)经过整理可以写成如下形式:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \omega_0^2 \xi = 0 \quad (1.1.3)$$

式中, $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$ 是引入的一个参量,称为振动圆频率。式(1.1.3)就是质点的自由振动方程。通过求解自由振动方程,就可以获得自由振动的一般规律。式(1.1.3)是对时间 t 的齐次二阶常微分方程,其解的一般形式应是两个简谐函数的线性叠加,

$$\xi = C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t) \quad (1.1.4)$$

式中, C 、 D 为两个待定常数,由运动的初始条件确定。式(1.1.4)也可写成另一种形式:

$$\xi = \xi_1 \cos(\omega_0 t - \phi_0) \quad (1.1.5)$$

式中, ξ_1 称为位移振幅; ϕ_0 为振动起始时刻的初相位。

振动问题也可以通过复数解来表示,采用复数解可以简化数学处理,式(1.1.3)的复数解为

$$\xi = Ae^{j\omega_0 t} \quad (1.1.6)$$

式中,系数 A 由初始条件确定。当然采用复数解也有一些缺点,因为复数解不能直接地描述物理问题的直观情况,在必要时还需对求解结果取实部(或虚部)。

不管采用哪一种形式的解,获得振动位移之后,由振动位移可以方便地获得振动速度 $v = \frac{d\xi}{dt}$ 和振动加速度 $a = \frac{d^2 \xi}{dt^2}$ 。

运动自 $t=0$ 时刻开始,经过 $t=T$ 时间又恢复到原来状态, T 就是振动的周期。从式(1.1.5)可以得到, $\omega_0 T = 2\pi$,即振动的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (1.1.7)$$

振动分析中我们通常采用频率的概念,频率 f 与周期 T 互为倒数,频率 $f = \frac{1}{T}$ 表示每秒振动的次数,频率的单位是赫兹,记作 Hz。频率 f 与圆频率 ω 满足如下关系:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.1.8)$$

对于上述的单自由度自由振动系统,频率 f 反映了系统振动的固有特性,因此称为固有频率,固有频率一般以符号 f_0 表示。对于我们上述分析的自由振动系

统,可以写出其固有频率为

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (1.1.9)$$

由式(1.1.9)可见:

(1) 当质点作自由振动时,其振动频率仅与系统的固有参量有关,而与振动的初始条件无关。自由振动系统的这一特性,我们在日常生活中司空见惯。例如,键盘类乐器标定后,按动某一个琴键,不管你按动的轻重如何,琴键所发出的声音的频率是一定的,按得轻或按得重仅影响声音的强弱。

(2) 对于质点振动系统,质量越大,则系统的固有频率越低;刚度越大,则系统的固有频率越高。这一规律在振动与噪声控制中具有重要意义;通过改变系统的质量或刚度,就可以改变系统的固有频率,使之落于一定的频带范围之外,从而保证在我们关心的频带范围内具有较小的振动或噪声。

§ 1 1 2 有阻尼的自由振动

在前面所述的自由振动中,我们略去了运动的阻力。因此振动过程中机械能守恒,系统保持持久的等幅振动。但实际系统振动时不可避免地存在阻力,因而在一定时间内振动逐渐衰减直至停止。阻力有多种来源,例如,两个物体之间的干摩擦阻力、气体或液体介质的阻力、有润滑剂的两个面之间的摩擦力、由于材料的黏弹性而产生的内部阻力等。在振动中这些阻力统称为阻尼。

阻尼的存在将消耗振动系统中的能量,消耗的能量转变为热能和声能传播出去。有阻尼的自由振动也称为衰减振动。

不同的阻尼具有不同的性质。两个平滑接触面之间的摩擦力 F ,与两个面之间的垂直压力 N 成正比,即我们熟知的

$$F = \alpha N \quad (1.1.10)$$

式中, α 称为摩擦系数。对于平滑接触面,摩擦系数 α 为常数;如果这两个接触面是粗糙的,则摩擦系数 α 就与速度有关,速度越快摩擦系数 α 越小。

两个接触面之间如果有润滑剂的话,摩擦力决定于润滑剂的黏性和运动速度。两个相对滑动面之间存在一层连续油膜时,阻力与润滑剂的黏性和速度成正比,与速度方向相反,即

$$F = -cv \quad (1.1.11)$$

式中, c 称为黏性阻尼系数。一个物体以低速在黏性液体中运动,或者像阻尼缓冲器那样,使液体从很狭窄的缝里通过,阻力与速度成正比,属于黏性阻尼。

黏性阻尼适合小振幅振动,如果物体以较大的速度(如 3m/s 以上)在气体或液体介质中运动,阻力将与速度的平方成正比,即

$$F = \beta v^2 \quad (1.1.12)$$

式中, β 为常数。

以上介绍了三种最基本的阻尼形式。振动分析中通常采用黏性阻尼作为基本分析模型。黏性阻尼由于与速度成正比, 因此又称线性阻尼。线性阻尼的假设使得求解过程大为简化, 所以在有阻尼振动分析中一般都以黏性阻尼为基本模型。而非黏性阻尼一般通过等效黏性阻尼来近似。

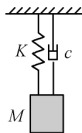


图 1.3 衰减振动系统

图 1.3 为衰减振动系统示意图, 由于阻尼的存在使得质量块在运动过程中比无阻尼自由振动系统多受一个力, 即阻力的作用, 将阻力附加到式(1.1.2)中得到有阻尼自由振动系统的衰减振动方程为

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} + c \frac{d\xi}{dt} + K\xi = 0 \quad (1.1.13)$$

式(1.1.13)可改写为

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + 2\delta \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2 \xi = 0 \quad (1.1.14)$$

式中, $\delta = \frac{c}{2M}$ 为引入的一个新参量, 称为衰减系数。振动分析中常用的另一个表征

阻尼特性的参数就是损耗因子 η , 令 $\eta = \frac{c}{\omega_0 M}$, 则损耗因子 η 与衰减系数 δ 和阻尼系数 c 之间满足如下关系:

$$c = 2M\delta = M\omega_0 \eta \quad (1.1.15)$$

衰减振动方程也是一个二阶齐次常微分方程。现在我们设其解为复数,

$$\xi = e^{j\gamma t} \quad (1.1.16)$$

式中, γ 为待定常数, 将此解代入方程(1.1.14)可得

$$(-\gamma^2 + j2\delta\gamma + \omega_0^2)e^{j\gamma t} = 0 \quad (1.1.17)$$

要使式(1.1.17)对任意时刻 t 都成立, 则必须满足

$$-\gamma^2 + j2\delta\gamma + \omega_0^2 = 0 \quad (1.1.18)$$

求解式(1.1.18)的二次代数方程可得

$$\gamma = j\delta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (1.1.19)$$

如果 $\delta \geq \omega_0$, 则方程(1.1.14)的解为

$$\xi = A e^{-(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + B e^{-(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} \quad (1.1.20)$$

式(1.1.20)是一个非振动状态的解, 这种情况下质点仅仅是从非平衡位置恢复到平衡位置, 而不具备周期振动的特点。我们更关心的是在 $\delta < \omega_0$ 情况下, 质点的衰减振动。当 $\delta < \omega_0$ 时, 我们引入参数 $\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, 方程(1.1.14)的解为

$$\xi = A e^{-\delta t} e^{j\omega_0' t} \quad (1.1.21)$$

为了描述实际的衰减振动,应取式(1.1.21)的实部。式(1.1.21)中, A 由初始条件确定,可以是复数。在以后的分析中,凡是采用复数解形式之处不再作一一说明。

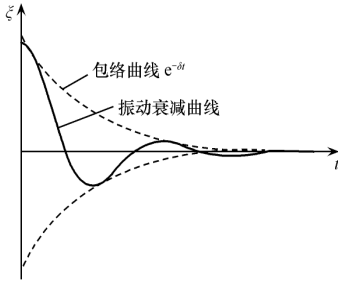


图 1.4 振动衰减曲线

比较式(1.1.21)和式(1.1.6),我们可以发现衰减振动比无阻尼自由振动多了一项指数衰减项 $e^{-\delta t}$, 这种情况下位移振幅不再是常数,而是随时间作指数衰减。衰减系数越大,振幅衰减得也就越快。为了度量衰减的快慢,引入一个新的参量 τ ,称为衰减模量, $\tau = \frac{1}{\delta}$,它表示振幅衰减到初始值的 e^{-1} 所经历的时间,单位为秒。质点衰减振动规律如图 1.4 所示。

§ 1.1.3 质点的强迫振动

由于阻尼的作用,一个自由振动系统的振动不能维持很久,它要逐渐衰减直至停止。要使振动持续不停,就需要不断地从外界获得能量,这种受到外部持续作用而产生的振动就称为强迫振动。

设有一个外力作用在一个单自由度振动系统上,如图 1.5 所示。我们一般将外力称为强迫力,假定强迫力随时间作简谐变化,即

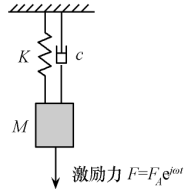


图 1.5 强迫振动系统

$$F = F_A e^{j\omega t} \tag{1.1.22}$$

式中, F_A 为强迫力的幅值; $\omega = 2\pi f$ 为强迫力的圆频率; f 为强迫力的频率。将强迫力加到质点振动系统,得到系统振动方程为

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} + c \frac{d\xi}{dt} + K\xi = F_A e^{j\omega t} \tag{1.1.23}$$

或写成

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + 2\delta \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2 \xi = H e^{j\omega t} \tag{1.1.24}$$

式中, $H = \frac{F_A}{M}$ 为作用在单位质量上的外力幅值。方程(1.1.23)和方程(1.1.24)都是质点强迫振动方程。

强迫振动方程是二阶的非齐次常微分方程,其一般解为该方程的一个特解与相应的齐次方程一般解之和。我们已经获得了对应的自由振动方程的一般解,关键就是寻找一个特解,假设特解的形式为

$$\xi_1 = \xi_r e^{j\omega t} \tag{1.1.25}$$

式中, ξ_F 为待定常数。将式(1.1.25)代入振动方程(1.1.23)得到

$$\xi_F(-M\omega^2 + j\omega c + K) = F_A \quad (1.1.26)$$

由此确定

$$\xi_F = \frac{F_A}{-M\omega^2 + j\omega c + K} \quad (1.1.27)$$

引入一个新的参量 $Z_M = \frac{F_A}{j\omega \xi_F}$, 称为系统的力阻抗。力阻抗的实部称为力阻, 虚部称为力抗。式(1.1.27)用力阻抗来表示为

$$\xi_F = \frac{F_A}{j\omega Z_M} \quad (1.1.28)$$

获得非齐次方程的特解和对应的齐次方程的通解之后, 可以得到方程(1.1.23)的一般解的形式为

$$\xi = Ae^{-\delta t} e^{j\omega_0 t} + \xi_F e^{j\omega t} \quad (1.1.29)$$

式中的第一项称为瞬态解, 它描述了系统的自由衰减振动, 仅在振动的开始阶段起作用, 当时间足够长以后, 它的影响逐渐减弱并最终消失。第二项称为稳态解, 它描述了系统在强迫力的作用下进行强制振动的状态, 因为它的幅值恒定, 因此称为稳态振动。从式(1.1.29)可以看到, 当外力施加到质点振动系统以后, 系统的振动状态比较复杂, 它是自由衰减振动和稳态振动的合成, 这种振动状态描述了强迫振动中稳态振动逐步建立的过程。当一定时间以后, 瞬态振动消失, 系统达到稳态振动。

对于大多数声学问题, 研究稳态振动状态较有意义, 下面就来重点分析一下稳态振动的规律。设时间足够长以后, 系统达到稳态, 其位移可以表示为

$$\xi = \xi_A e^{j(\omega t - \theta)} \quad (1.1.30)$$

这是一种等幅简谐振动, 这里振幅 ξ_A 是一个不随时间变化的实数, θ 表示振动位移与外力之间的相位关系, 其振动频率就是外力的频率 f 。振幅 ξ_A 与外力幅值 F_A 、外力频率 f 以及系统的固有参数 M 、 K 、 c 有关,

$$\xi_A = \frac{F_A}{\omega |Z_M|} = \frac{F_A}{\omega \sqrt{c^2 + \left[\omega M - \frac{K}{\omega}\right]^2}} \quad (1.1.31)$$

引入一个新的参量 $Q = \frac{\omega_0 M}{c}$, 称为力学品质因素, 力学品质因素 Q 与损耗因子 η 互为倒数。假设 $\xi_{A_0} = \frac{F_A}{K}$ 为 $\omega = 0$ 时的位移振幅, 作归一化处理, 引入参量

$A = \frac{\xi_A}{\xi_{A_0}}$ 。此外, 引入参数 $z = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$, 表示外力频率与系统固有频率之比。对式

(1.1.31)作适当变换后, 得到归一化的位移振幅:

$$A = \frac{\xi_1}{\xi_{1_0}} = \frac{Q}{\sqrt{z^2 + (z^2 - 1)^2 Q^2}} \quad (1.1.32)$$

归一化的位移振幅与外力幅值无关,下面讨论在不同的品质因素下,归一化的位移振幅随归一化的频率变化的规律。图 1.6 为归一化的位移频率特征曲线,也称为归一化的位移共振曲线。由图可见:在 $z \ll 1$ 的范围内曲线呈现一平坦区, A 值的极限值等于 1;在 $z=1$ 附近曲线出现峰值,说明当外力频率接近系统固有频率时位移振幅将超出静态位移,这种现象称为位移共振。如果我们稍加注意,可以发现位移共振仅在 $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时出现, Q 越大则共振现象越显著, Q 趋于无穷大时共振极为强烈。品质因素 Q 趋于无穷大的物理解释就是系统无阻尼,可见适当增大阻尼有利于抑制位移共振。对式(1.1.32)求极值,可以得到位移共振频率为

$$f_r = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (1.1.33)$$

式(1.1.33)仅在 $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 情况下成立,当 $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时不发生位移共振。

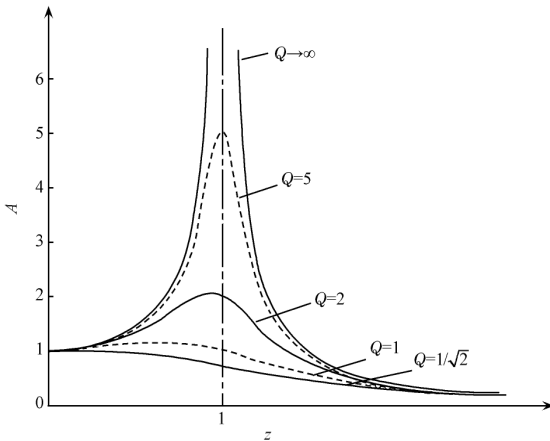


图 1.6 归一化的位移共振曲线

振动和噪声控制中,除了对位移共振进行控制之外,有时还需对振动系统的速度共振或加速度共振进行控制,下面简单介绍速度共振和加速度共振。

式(1.1.30)对时间求导,得到速度响应为

$$v = \omega \xi_1 e^{j(\omega t - \theta + \frac{\pi}{2})} \quad (1.1.34)$$

由此得到速度振幅为

$$v_A = \omega \xi_A = \frac{F_A}{\sqrt{c^2 + \left[\omega M - \frac{K}{\omega} \right]^2}} \quad (1.1.35)$$

同样地,我们引入一个常数 $\frac{F_A}{\omega_0 M}$ 对速度振幅进行归一化处理,并用参量 B 来描述:

$$B = \frac{v_A}{\frac{F_A}{\omega_0 M}} = \frac{zQ}{\sqrt{z^2 + (z^2 - 1)^2 Q^2}} \quad (1.1.36)$$

归一化的速度振幅与外力幅值无关,图 1.7 为归一化的速度共振曲线。由图可见:出现速度共振的条件是 $z=1$,即外力频率恰好等于系统的固有频率, $f_r = f_0$;发生速度共振时归一化的速度振幅恰好就等于系统的品质因素,即

$$B_r = Q$$

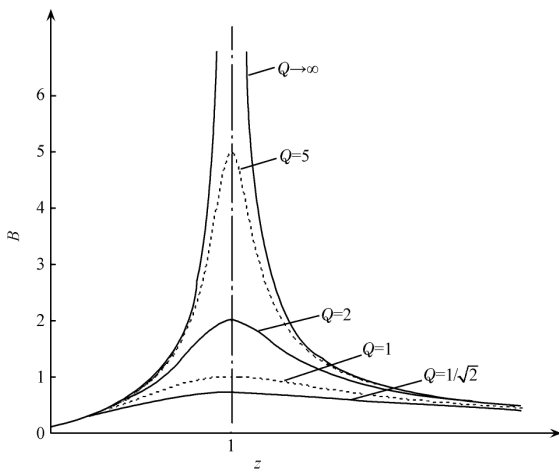


图 1.7 归一化的速度共振曲线

由速度共振曲线可以方便地获得振动系统的损耗因子,具体做法就是:在共振峰左右两侧找到速度振幅为共振峰值 $\frac{1}{2}$ 的两个归一化频率 $z_1 = \frac{f_1}{f_0}$ 和 $z_2 = \frac{f_2}{f_0}$,它们的相对差值为 $z_2 - z_1 = \frac{\Delta f}{f_0}$ 。频带宽度 Δf 、品质因素 Q 和损耗因子 η 之间满足如下关系:

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \eta = \frac{1}{Q} \quad (1.1.37)$$

同样地,将速度响应对时间求导,可以得到系统的加速度响应:

$$a = \omega^2 \xi_A e^{j(\omega t - \theta + \pi)} \quad (1.1.38)$$

引入一个常数 $\frac{F_A}{M}$ 对系统的加速度幅值 $a_A = \omega^2 \xi_A$ 进行归一化处理,并用参量

C 来描述, $\frac{F_A}{M}$ 表示外力频率趋于无限大时的加速度极值:

$$C = \frac{a_A}{\frac{F_A}{M}} = \frac{z^2 Q}{\sqrt{z^2 + (z^2 - 1)^2 Q^2}} \quad (1.1.39)$$

图 1.8 为归一化的加速度共振曲线。由图 1.8 可见:当 $z \gg 1$ 时曲线呈现一平坦区,其极限值为 1;在 $z=1$ 附近出现加速度共振,对式(1.1.39)求极值可以得到发生加速度共振的频率为

$$f_r = f_0 \sqrt{\frac{2Q^2}{2Q^2 - 1}} \quad (1.1.40)$$

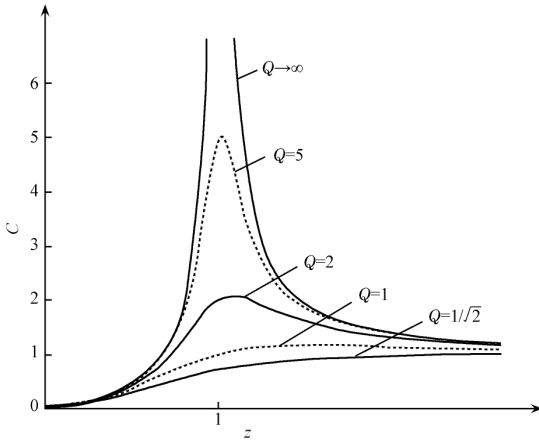


图 1.8 归一化的加速度共振曲线

可以看出,只有当 $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时才发生加速度共振;当 $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时加速度共振现象消失。从图 1.8 可以发现:如果我们希望加速度共振曲线较为平坦,就应当将品质因素 Q 控制在 1 附近。

以上简单介绍了位移共振、速度共振和加速度共振现象,并引入了一个重要参量——品质因素。无论对于哪一类共振曲线,品质因素越大则共振峰就越高越尖锐,品质因素越小则共振峰就越低越平坦。品质因素是质点振动系统的一个重要参量,表示质点振动系统的力学品质。

§ 1.2 弹性体振动基础

在 1.1 节中曾假设振动系统的质量集中在一点,弹簧的压缩与伸长均匀,描述系统性质的固有参量与空间位置无关,这类系统称为集中参数系统。集中参数系统的运动只要一个时间变量 t 就可以完全描述。然而在实际问题中,物体总是有一定的几何尺寸的,物体的质量、刚度和阻尼在空间连续分布,并且物体的几何尺寸大于物体中传播的波长。这种情况下,质点的假设已不再适用。这样的振动系统,被称为分布参数系统,或称为弹性体。实际物体通常具有比较复杂的结构形式,因此其振动也是极其复杂的。人们从大量复杂的实际物体中归纳和简化提取出一些结构形式比较简单的典型结构,如弦、梁、膜、板及其组合结构,对这些典型结构的振动特性已有深入的研究。本节简单介绍几种典型的弹性体结构的振动基础。

§ 1.2.1 弦振动

理想振动弦是最简单的弹性体之一。所谓理想振动弦,就是指它具有一定的长度、弹性及以一定方式张紧的均匀细线,理想弦振动依靠张力作为弹性恢复力。

图 1.9 所示为一根两端固定、用张力 T_0 拉紧的弦。在静止状态下弦处于平衡位置,假定某时刻有一瞬时的外力干扰作用于弦,于是弦的各部分就在张力作用下开始垂直于弦长方向的振动,而振动的传播方向是沿着弦长方向,因此弦的这种振动方式称为横振动。

如图 1.10 所示,在弦上 x 处取一个微段 dx ,由于弦的密度为 ρ 而横截面积为 S ,因此微段的质量为 $dm = \rho S dx$ 。任意瞬时作用在弦两端的张力大小相等而方向不同。假设张力与坐标系横轴之间的夹角为 θ ,则微段两端张力在纵轴方向的合力为

$$dF_x = \frac{\partial (T_0 \sin \theta)_x}{\partial x} dx.$$



图 1.9 理想弦示意图

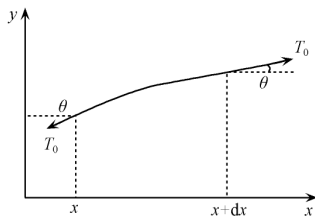


图 1.10 弦微段受力分析

令 x 处弦离开平衡位置的垂直位移为 ξ ,根据牛顿运动定律,得到

$$dF_x = dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (1.2.1)$$

我们假设 ξ 很小, 所以相应的夹角 θ 也很小, 因此近似关系 $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$ 成立, 而 $\tan\theta = \frac{\partial \xi}{\partial x}$, 所以 dF_x 可以近似简化为 $dF_x \approx \frac{\partial \left[T_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \right]}{\partial x} dx = T_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$, 代入式 (1.2.1) 就可得到弦振动的运动方程为

$$T_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (1.2.2)$$

引入参量 $c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho S}}$, 它表示波沿弦的长度方向传播的速度, 则波动方程又可写为如下形式:

$$c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (1.2.3)$$

在前面的集中参数系统振动分析我们已经知道, 系统具有一定的、与时间无关的振动方式, 连续系统也同样具有这种特性。下面讨论弦的振动方式。

我们采用分离变量法, 假设式 (1.2.3) 解的形式为 $\xi(t, x) = T(t) X(x)$, 代入方程 (1.2.3) 可以得到

$$\frac{c^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (1.2.4)$$

式 (1.2.4) 的左边只与 x 有关, 而右边只与 t 有关, 而 x 和 t 都是独立变量, 因此式 (1.2.4) 必然等于一个与 x 和 t 都无关的常数, 不妨令这个常数为 $-\omega^2$, 代入式 (1.2.4) 就得到两个独立的方程:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \left[\frac{\omega}{c} \right]^2 X = 0 \quad (1.2.5)$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \quad (1.2.6)$$

上述方程解的形式我们已经遇到过, 如果用三角函数的形式表达就是

$$X = A_x \cos \frac{\omega x}{c} + B_x \sin \frac{\omega x}{c} \quad (1.2.7)$$

$$T = A_t \cos \omega t + B_t \sin \omega t \quad (1.2.8)$$

式中, 系数 A_x 、 B_x 、 A_t 、 B_t 为待定系数。式 (1.2.7) 称为振型函数, 它描绘了弦以固有频率 ω 做简谐振动时的振动形态, 即主振型。根据式 (1.2.7) 和式 (1.2.8) 得到方程 (1.2.3) 的解的一般形式为

$$\xi(t, x) = X(x) T(t) = \left[A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c} \right] \cos(\omega t - \phi) \quad (1.2.9)$$

式中, 系数 A 、 B 和常数 ϕ 仍为待定参数, 分别由边界条件和初始条件确定。对于

两端固定的弦,固定端的位移为零,即边界条件为

$$\xi_{x=0} = \xi_{x=l} = 0 \quad (1.2.10)$$

根据边界条件我们得到 $A=0$ 和 $B\sin\frac{\omega l}{c}=0$,如果 $B=0$ 就意味着弦不做振动,因此唯一的可能就是

$$\sin\frac{\omega l}{c} = 0 \quad (1.2.11)$$

式(1.2.11)就是弦振动的频率方程,由频率方程可以求得无限多阶固有频率:

$$\frac{\omega l}{c} = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.2.12)$$

式(1.2.12)表明:有一系列的 ω 满足方程的解,我们将对应 $n=1, 2, 3, \dots$ 的一系列的 ω 记作 ω_n ,则有 $\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$,引入一个新的参量 $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$,则式(1.2.12)改写为

$$f_n = \frac{nc}{2l} \quad (1.2.13)$$

显然, f_n 代表了弦的振动频率,它只与弦本身的力学参量有关,因此称为弦的固有频率。弦的固有频率有无穷个。由于弦的固有频率是以1倍、2倍、3倍、……的关系离散变化的,因此我们将第一阶频率称为弦的基频,而其他各阶固有频率称为谐频。由于弦的固有频率都为谐频,因此弦乐器的声音听起来是和谐的。钢琴、月琴、大扬琴等弦乐器就是根据弦的横振动原理设计的。

将每一个固有频率 f_n 代入式(1.2.7),就得到一个振型函数,我们将固有频率对应的振型函数称为主振型。各阶主振型均为如下形式的三角函数:

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{2\pi f_n x}{c} \quad (1.2.14)$$

式中, B_n 由初始条件确定。式(1.2.14)表明:当弦作基频振动时,在弦的两端振幅为零,而在 $x = \frac{l}{2}$ 处振幅最大,我们将振幅为零的位置称为波节,而将振幅最大的位置称为波腹。对于二阶振型,对应地出现3个波节和2个波腹,以此类推, n 阶振型对应地出现 $n+1$ 个波节和 n 个波腹。弦振动的前几阶振型参见图1.11。由于弦的每一阶振型对应的波节和波腹的位置是固定的,因此将这种振动方式称为驻波方式。

由三角函数族的正交性,不难证明弦振动中不同主振型之间具有正交性,即对于 $m \neq n$ 的两个主振型 $X_m(x)$ 和 $X_n(x)$ 之间满足如下关系:

$$\int_{x=0}^l X_m(x) X_n(x) dx = 0 \quad (1.2.15)$$

一般情况下,弦的自由振动为无限多阶固有振动的叠加,引入新的参量 $k_n = \frac{\omega_n}{c}$,它表示第 n 阶主振型对应的波数,则弦的总位移为

$$\xi(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t - \phi_n) \quad (1.2.16)$$

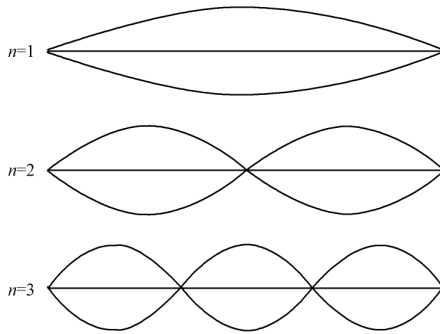


图 1.11 弦的前几阶振动方式

现在来考虑初始条件对弦振动的影响。不失一般性,我们假设初始时刻弦的位移和速度分别为 $\xi(0, x)$ 和 $v(0, x)$, 它们均为 x 的函数。将初始条件代入式(1.2.16)得到

$$\xi(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(k_n x) \cos(\phi_n) \quad (1.2.17)$$

$$v(0, x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n \sin(k_n x) \sin(\phi_n) \quad (1.2.18)$$

利用弦的主振型的正交性,对式(1.2.17)和式(1.2.18)等号两边分别乘以 $\sin(k_n x) dx$, 并从 $0 \sim l$ 积分,得到

$$\begin{cases} B_n \cos \phi_n = \frac{2}{l} \int_{x=0}^l \xi(0, x) \sin(k_n x) dx \\ B_n \sin \phi_n = - \frac{2}{l \omega_n} \int_{x=0}^l v(0, x) \sin(k_n x) dx \end{cases} \quad (1.2.19)$$

由此可以确定 B_n 和 ϕ_n , 则弦的振动位移就可以完全确定。

§ 1 2 2 梁的纵振动

与弦振动不同的是,弹性梁依靠自身的劲度产生弹性恢复力。我们讨论的梁为横截面均匀的、细长的弹性梁,梁的横截面积为 S , 密度为 ρ , 梁长度为 l , 梁材料的弹性模量为 E , 弹性模量表示了材料劲度的大小。根据弹性体的胡克定律,在讨论单向拉伸或压缩时,在弹性范围内应力 σ 和应变 ϵ 满足 $\sigma = E\epsilon$, 其中 σ 为压应力, 而 ϵ 为单位长度压缩变形量。

如图 1.12 所示的弹性梁,假设在其一端施加一个力,在这个力的作用下,梁上各点将发生纵向振动,假设振动位移为 $\xi(t, x)$ 。取梁上 x 处的一个微段,微段长度为 dx ,则任意时刻微段两端的位移分别为 $\xi(t, x)$ 和 $\xi(t, x+dx)$,微段总的压缩

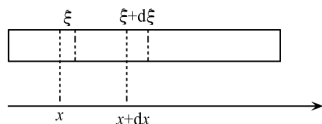


图 1.12 弹性梁的纵振动

变形量为 $\xi(t, x) - \xi(t, x+dx) = -\frac{\partial \xi(t, x)}{\partial x} dx$, 对应的相对变形量即应变为 $-\frac{\partial \xi(t, x)}{\partial x}$, 微段的伸缩变形将对相邻段产生力的作用。同样,由于梁的劲度,相邻段对微段产生纵向的弹性力,假设相邻段对该微段端部的作用力为 F_x ,则在微段端部产生的单位面积上的压应力为 $-\frac{F_x}{S}$, 负号表示压应力方向与相邻段在微段上的作用力方向相反。根据胡克定律得到

$$F_x = ES \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial x} \quad (1.2.20)$$

微段受到的沿 x 方向的合力为 $dF_x = F_{x+dx} - F_x = \frac{\partial F_x}{\partial x} dx$, 而微段沿 x 轴正方向的加速度则为 $\frac{\partial^2 \xi(t, x)}{\partial t^2}$, 根据牛顿运动定律得到

$$ES \frac{\partial^2 \xi(t, x)}{\partial x^2} dx = \rho S dx \frac{\partial^2 \xi(t, x)}{\partial t^2} \quad (1.2.21)$$

引入参数 $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, 它表示梁的纵振动传播速度,梁的纵波速只与材料有关而与其他参数无关,它代表了材料的固有特性。式(1.2.21)经整理得到

$$\frac{\partial^2 \xi(t, x)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi(t, x)}{\partial t^2} \quad (1.2.22)$$

这就是梁的纵振动方程。这个方程在结构形式上与弦振动方程完全一致,可以通过分离变量法求解,解的一般形式为

$$\xi(t, x) = [A \cos(kx) + B \sin(kx)] \cos(\omega t - \phi) \quad (1.2.23)$$

式中, $k = \frac{\omega}{c}$ 称为波数。梁的纵振动的定解条件就是它的边界条件和初始条件。下面讨论边界条件对梁振型的影响。

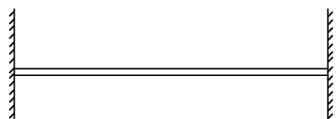


图 1.13 两端固定弹性梁

如图 1.13 所示,对于两端固定的梁,其边界条件是两端的位移为零,即

$$\xi(t, 0) = \xi(t, l) = 0 \quad (1.2.24)$$

将边界条件代入式(1.2.23)可以得到 $A=0$ 和 $\sin(kl)=0$, 由此得到梁纵振动的固有频率为

$$f_n = \frac{nc}{2l} \quad (1.2.25)$$

式中, f_1 称为基频, $f_n (n > 1)$ 与 f_1 成整数倍, 称为谐频。

如图 1.14 所示, 对于两端自由的梁, 两端不受应力作用, 因此边界条件为

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (1.2.26)$$

经类似分析, 发现它的固有频率与两端固定的梁的固有频率完全相同。

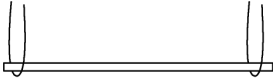


图 1.14 两端自由弹性梁

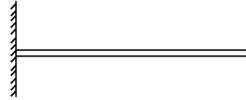


图 1.15 悬臂梁

对于如图 1.15 所示的悬臂梁, 梁的一端满足固定边界条件, 而另一端满足自由边界条件:

$$\begin{cases} \xi|_{x=0} = 0 \\ \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (1.2.27)$$

将边界条件代入式(1.2.23)可以得到 $A=0$ 和 $\cos(kl)=0$, 则悬臂梁的固有频率为

$$f_n = \frac{2n-1}{4} \times \frac{c}{l} \quad (1.2.28)$$

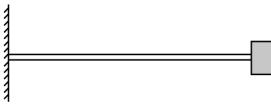


图 1.16 有质量负载的悬臂梁

很多情况下, 梁的一端既非自由又非固定, 而有一定的力学负载, 比如质量负载。如图 1.16 所示, 梁的一端满足固定边界条件, 而另一端有一质量负载 M , 梁的负载端满足牛顿力学定律:

$$-ES \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=l} = M \left. \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right|_{x=l} \quad (1.2.29)$$

结合固定端的边界条件, 并代入式(1.2.23)得到一端固定一端有质量负载的梁的频率方程为

$$\tan(kl) = \frac{ESk}{M\omega^2} \quad (1.2.30)$$

梁的纵振动满足 $E=\rho c^2$, 而梁的总质量为 $m=\rho lS$, 因此式(1.2.30)可改写为

$$\frac{\cot(kl)}{kl} = \frac{M}{m} \quad (1.2.31)$$

要直接获得这个方程的解析解十分困难, 下面分几种情况分别讨论:

(1) 负载质量远小于梁的质量, 即 $M \ll m$ 的情况下, 有近似关系 $\cot(kl) \approx 0$,

等价于 $\cos(kl)=0$, 这与悬臂梁的纵振动频率方程一致。此时, 其振动状态近似于悬臂梁。

(2) 负载质量远大于梁的质量, 即 $M \gg m$ 的情况下, 有近似关系 $\tan(kl) \approx 0$, 等价于 $\sin(kl)=0$, 这与两端固定的梁的频率方程一致。此时, 其振动状态近似于两端固定的梁的纵振动。

(3) 在梁的质量和负载的质量可以相比拟的情况下, 用图解法可以得到方程的近似解。我们假设 $x=kl$, 作一条直线 $y=\frac{M}{m}x$ 与一系列的曲线 $y=\cot(x)$ 相交, 如图 1.17 所示。每一个交点 x_n 对应一个 k_n , 由此可以获得一系列的固有频率 $f_n = \frac{k_n c}{2\pi}$ 。当 $f_n (n > 1)$ 与基频 f_1 不成整数倍关系时, 则称 f_n 为泛频, 此时梁的纵振动发出的声音不再和谐。

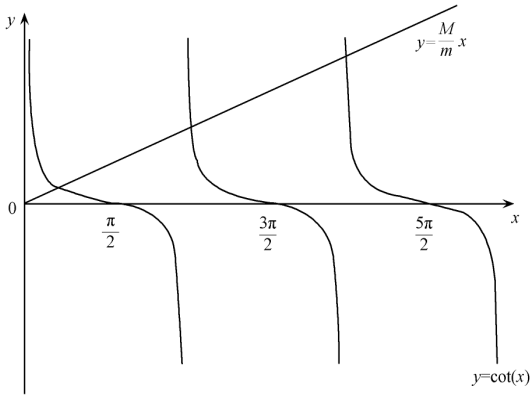


图 1.17 有质量负载的悬臂梁纵振动的固有频率图解法

§ 1.2.3 梁的横振动

弹性梁除了纵振动方式之外, 还可能产生弯曲振动。假设梁受到一个垂直于梁轴方向的力的作用, 梁发生弯曲变形, 由于梁自身劲度的作用这种弯曲变形要恢复平衡状态, 由此引起垂直于梁轴方向的振动。由于弯曲振动中波的传播方向垂直于振动方向, 因此弯曲振动又称为横振动。

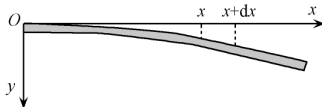


图 1.18 弹性梁的弯曲振动

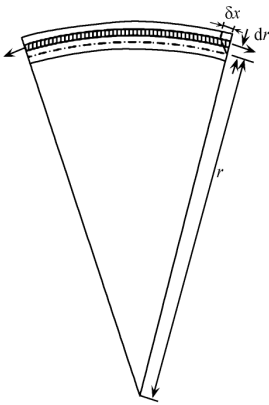


图 1.19 弹性梁微段弯曲变形分析

我们还是选取一长为 l 、横截面积为 S 的均匀弹性梁,假设梁受到一垂直作用力。如图 1.18 所示在梁上 x 处取一微段,微段长度为 dx ,由于梁的弯曲将产生一弯矩。如图 1.19 所示,弯曲的微段上部被拉长,而下部被压缩,中间存在一个既不拉长也不压缩的中性面,我们将中性面在 (x, y) 平面上的投影称为中线,中线的长度就是 dx 。我们在距中线上方 dr 处选取一薄层,薄层的伸长量为 δx 。假设微段中线的曲率半径为 r ,则根据几何相似关系得到

$$\frac{\delta x}{dx} = \frac{dr}{r} \quad (1.2.32)$$

假设薄层的截面积为 dS ,根据弹性体的胡克定律,作用在 dS 面上的纵向力(x 方向的力)为 $dF_x = -E \frac{dr}{r} dS$ 。在中线以上 dr 为正,因此产生的是拉力;在中线以下 dr 为负,因此产生的是压力。纵向力 dF_x 对中线的弯矩为 $dM_x = dr dF_x = -\frac{E}{r} (dr)^2 dS$,因此整个 x 截面上的总弯矩为

$$M_x = \int_s dM_x = -\frac{E}{r} \int_s (dr)^2 dS = -\frac{EI}{r} \quad (1.2.33)$$

式中,积分 $I = \int_s (dr)^2 dS$ 称为轴惯性矩,惯性矩只与横截面形状和大小有关,如横截面高度为 H 、宽度为 B 的矩形梁的惯性矩为 $I = \frac{BH^3}{12}$;而与之等高等宽的工字形梁的惯性矩则为 $I = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$,这里 h 为工字梁的肋高,工字梁横截面肋宽为 $B - b$ 。半径为 a 的圆形截面的惯性矩为 $I = \frac{\pi a^4}{4}$;而外径为 a 、内外径之比为 b 的空心圆形截面的惯性矩为 $I = \frac{\pi a^4 (1 - b^4)}{4}$ 。

下面分析曲率半径 r 与梁上各点的位移 $\xi(t, x)$ 之间的关系。由高等数学知识

得到 $r = \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}$,在弯曲变形比较小的情况下, $\frac{\partial \xi}{\partial x} \ll 1$,因此可以略去二阶以上小量,得到曲率半径的近似式为

$$r \approx \frac{1}{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}} \quad (1.2.34)$$

结合式(1.2.33)得到弯矩为

$$M_x = -EI \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (1.2.35)$$

微段的两端受到的弯矩方向相反,如图 1.20 所示,设微段左边的邻段作用于 x 端的弯矩为逆时针方向 M_x ,微段右边的邻段作用于 $x+dx$ 端的弯矩为顺时针方向 $-M_{x+dx}$,则微段受到的总的弯矩为

$$M_x - M_{x+dx} = -\frac{\partial M_x}{\partial x} dx \quad (1.2.36)$$

弯曲变形除了引起弯矩之外,在每一个截面上还产生剪切力,剪切力的方向垂直于 x 轴。设微段的左边邻段作用于 x 端的剪切力向上为 $F_y|_x$,而微段的右边邻段作用于 $x+dx$ 端的剪切力向下为 $-F_y|_{x+dx}$ 。根据动量守恒定律,由纵向力引起的弯矩与由切向力产生的力矩相平衡,即

$$F_y dx = -\frac{\partial M_x}{\partial x} dx \quad (1.2.37)$$

结合式(1.2.35),得到

$$F_y = -\frac{\partial M_x}{\partial x} = EI \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} \quad (1.2.38)$$

式(1.2.38)表明:横截面上的剪切力是 x 的函数,在两端的剪切力的综合作用下, $dF_y = F_y|_x - F_y|_{x+dx} = -\frac{\partial F_y}{\partial x} dx = -EI \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} dx$,微段产生加速度,根据牛顿第二运动定律得到:

$$dF_y = \rho S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (1.2.39)$$

将式(1.2.38)代入式(1.2.39)得到梁的横振动方程为

$$-EI \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} = \rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (1.2.40)$$

梁的横振动比纵振动具有更复杂的特性,我们仍然采用分离变量法来求解,令 $\xi(t, x) = T(t)Y(x)$ 代入式(1.2.40),得到

$$-\frac{EI}{\rho SY} \frac{d^4 Y}{dx^4} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (1.2.41)$$

式(1.2.41)左边是 x 的函数,而右边是 t 的函数,由两边相等即可推断它们等于恒

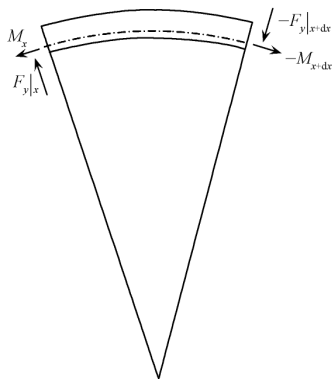


图 1.20 梁弯曲振动微段力矩与弯矩平衡分析

定的常数,假设这一常数为 $-\omega^2$,并引入一个中间变量 $\alpha^4 = \omega^2 \frac{\rho S}{EI}$,则得到两个独立的微分方程:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \tag{1.2.42}$$

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} - \alpha^4 Y = 0 \tag{1.2.43}$$

方程(1.2.42)我们已经十分熟悉。下面分析方程(1.2.43)的一般解,我们假设其解具有 $Y(x) = e^{\gamma x}$ 的形式,代入式(1.2.43)得到 $Y(x)$ 的四个特解 $e^{\alpha x}$ 、 $e^{-\alpha x}$ 、 $e^{j\alpha x}$ 、 $e^{-j\alpha x}$ 。这四个特解经组合后可以得到三角函数与双曲函数如下:

$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}, \cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \sinh \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}, \cosh \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$$

因此方程(1.2.43)的解的一般形式就可以表示成

$$Y(x) = A_x \cosh(\alpha x) + B_x \sinh(\alpha x) + C_x \cos(\alpha x) + D_x \sin(\alpha x) \tag{1.2.44}$$

考虑时间项,则梁横振动的一般解为

$$\xi(t, x) = [A \cosh(\alpha x) + B \sinh(\alpha x) + C \cos(\alpha x) + D \sin(\alpha x)] \cos(\omega t - \phi) \tag{1.2.45}$$

式中,参数 A 、 B 、 C 、 D 由边界条件确定,下面对几种常见的边界条件进行讨论。

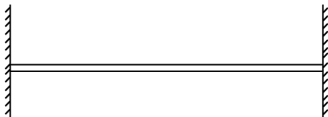


图 1.21 两端固定弹性梁

如图 1.21 所示,对于两端固定的梁,其固定边界处位移为零,同时位移曲线在边界处的斜率也为零,因此:

$$\begin{cases} \xi |_{x=0, x=l} = 0 \\ \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=0, x=l} = 0 \end{cases} \tag{1.2.46}$$

由此可以方便地确定 $C = -A$ 和 $D = -B$,以及

$$\begin{cases} A[\cosh(\alpha l) - \cos(\alpha l)] + B[\sinh(\alpha l) - \sin(\alpha l)] = 0 \\ A[\sinh(\alpha l) + \sin(\alpha l)] + B[\cosh(\alpha l) - \cos(\alpha l)] = 0 \end{cases} \tag{1.2.47}$$

要使式(1.2.47)成立且满足 A 、 B 为非零解的条件,就必须使其系数行列式等于零,即

$$\begin{vmatrix} \cosh(\alpha l) - \cos(\alpha l) & \sinh(\alpha l) - \sin(\alpha l) \\ \sinh(\alpha l) + \sin(\alpha l) & \cosh(\alpha l) - \cos(\alpha l) \end{vmatrix} = 0 \tag{1.2.48}$$

式(1.2.48)可进一步简化为

$$\cosh(\alpha l) \cos(\alpha l) = 1 \tag{1.2.49}$$

要直接获得这个频率方程的解析解是比较困难的,可用图解法求解获得一系