线性正则变换及其应用

许天周　李炳照 著

科学出版社

线性正则变换及其应用

许天周　李炳照　著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书以现代信号处理中的数学方法为主线, 在介绍经典 Fourier 变换、现代时频分析方法以及分数阶 Fourier 变换基本理论的基础上,系统论述线性正则变换的基本数学原理及其在信号处理领域的应用. 本书共分 8 章. 第 1 章阐述现代信号处理中所需泛函分析的基本知识; 第 2 章重点介绍现有时频分析中的主要方法; 第 3 章和第 4 章系统介绍线性正则变换的基本概念、性质和基本原理等内容; 第 5 章介绍线性正则变换的离散化方法与快速算法; 第 6 章给出线性正则变换域的采样理论; 第 7 章论述线性正则变换域的时频分析思想; 第 8 章给出线性正则变换在信号处理领域的一些应用实例.

本书可作为高等院校数学专业高年级本科生、研究生和教师的教材或教学参考书, 也可供通信与信息系统、信号理论与处理、光学工程等专业的研究生和工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性正则变换及其应用/许天周, 李炳照著. —北京: 科学出版社, 2013.2

ISBN 978-7-03-037547-6

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①许… ②李… Ⅲ. ①正则变换-研究 Ⅳ. ①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 109430 号

责任编辑: 王丽平 / 责任校对: 郭瑞芝

责任印制: 赵德静 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

文林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 2 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2013 年 2 月第一次印刷 印张: 22

字数: 450 000

定价: 98.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

非平稳、非 Gauss 类信号分析与处理的方法研究是现代应用数学领域与信息处理领域的重要交叉研究热点之一. 针对经典 Fourier 变换体系下信号处理方法的局限性, 人们提出并发展了一系列新颖的数学变换与方法来分析与处理非平稳信号. 其中作为经典 Fourier 变换理论的推广, 时频分析方法与分数阶 Fourier 变换得到了突飞猛进的发展并取得了丰硕的研究成果. 分数阶 Fourier 变换可以看成是信号在时频平面的旋转, 由于其独有的特点, 它在非平稳信号分析与处理方面具有经典 Fourier 变换不可比拟的优越性.

线性正则变换是分数阶 Fourier 变换的进一步扩充与发展, 它是一种更加广泛的非平稳信号分析与处理的新颖数学变换方法, 也是近年来在非平稳信号分析与处理领域发展迅速的重要研究热点之一. 相对于分数阶 Fourier 变换在时频平面的旋转, 线性正则变换可以看成是对信号在时频平面上作仿射变换, 因此在信号的滤波、分析与处理等方面都比经典的 Fourier 变换及分数阶 Fourier 变换具有更多的灵活性和优势. 经过众多科研人员的努力, 线性正则变换的基本理论日臻完善并被应用于其他研究领域, 但是其基本数学原理、基本性质以及在信号分析与处理中的应用等方面还有许多未知因素, 而且国内外还没有一本系统介绍线性正则变换理论及应用的著作出版.

本书着重以线性正则变换的基本理论与初步应用为出发点, 系统论述线性正则变换的基本数学原理, 如采样理论、不确定性原理、数值计算方法等. 同时, 本书也介绍线性正则变换在信号分析与处理领域的初步应用, 如在瞬时频率估计、语音信号恢复以及线性正则变换域数字水印等. 本书将为应用数学领域、信号分析与处理领域研究人员提供线性正则变换理论及应用方面的参考，必将进一步推动线性正则变换的理论及应用研究, 对于推动理工交叉融合发展、信号处理中的数学方法研究具有重要的理论与实际意义.

北京理工大学数学学院信号处理中的数学方法课题组 2009 级、2010 级研究生针对线性正则变换的基本原理做了大量有意义的工作, 他们在研究生期间的成果对本书的完成起到了非常重要的作用. 同时, 本书的撰写与出版获得国家自然科学基金项目 (项目编号：60901058, 61171195, 11171022)、教育部新世纪优秀人才资助支持计划项目 (项目编号：NCET-12-0042) 以及北京市自然科学基金项目 (项目编号：1102029) 的资助.

由于作者学识水平的限制, 书中疏漏与不妥之处在所难免, 敬请广大专家、读者批评指正.

作　者

2012 年 12 月

目　录

前言
第 1 章　泛函分析基本知识 ····· 1
1.1　Banach 空间 ····· 1
1.2　Hilbert 空间 ····· 4
1.3　线性算子 ····· 7
1.4　算子空间与对偶空间 ····· 8
1.5　对偶算子与紧算子 ····· 10
1.6　算子的特征值与特征向量 ····· 12
1.7　基本定理 ····· 13
1.8　再生核 Hilbert 空间 (RKHS) ····· 15
1.8.1　Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D})$ ····· 18
1.8.2　[0, 1] 上的 Sobolev 空间 ····· 18
1.8.3　Bergman 空间 ····· 19
1.8.4　加权 Hardy 空间 H^2_β ····· 19
第 2 章　时频分布与变换基础 ····· 21
2.1　信号与系统 ····· 21
2.1.1　信号 ····· 21
2.1.2　系统 ····· 26
2.2　Fourier 变换 ····· 29
2.2.1　$L^1(\mathbb{R})$ 上的 Fourier 变换 ····· 29
2.2.2　$L^2(\mathbb{R})$ 上的 Fourier 变换 ····· 30
2.2.3　$\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ 上的 Fourier 变换 ····· 31
2.3　分数阶 Fourier 变换 (FrFT) ····· 34
2.4　Gabor 变换 ····· 35
2.5　小波变换 ····· 37
2.6　Hilbert 变换 ····· 39
2.7　Wigner-Ville 分布与模糊函数 ····· 43
2.7.1　相关函数 ····· 43
2.7.2　Wigner-Ville 分布 ····· 43
2.7.3　模糊函数 ····· 46

2.8 Radon 变换 ····· 48
2.9 Cohen 类时频分布 ····· 51
第 3 章 线性正则变换的定义与性质 ····· 53
3.1 实线性正则变换 ····· 53
3.2 线性正则变换的性质 ····· 57
3.3 对 Wigner-Ville 分布及模糊函数的影响 ····· 60
3.4 线性正则变换的特殊形式 ····· 62
3.5 线性正则变换的分解 ····· 63
3.6 二维及高维线性正则变换 ····· 65
3.7 复线性正则变换 ····· 66
3.8 常见函数的线性正则变换 ····· 68
第 4 章 线性正则变换的基本原理 ····· 73
4.1 引言 ····· 73
4.2 线性正则变换域的带限信号 ····· 73
4.3 线性正则变换级数 ····· 75
4.4 线性正则变换域的卷积与相关 ····· 77
4.4.1 卷积理论的直接结果 ····· 77
4.4.2 更简洁的卷积与相关理论 ····· 80
4.4.3 补偿线性正则变换域的卷积与相关 ····· 85
4.5 线性正则变换的矩 ····· 89
4.6 不确定性原理 ····· 92
4.6.1 经典 Heisenberg 不确定性原理 ····· 92
4.6.2 线性正则变换域的不确定性原理 ····· 92
4.6.3 其他形式的不确定性原理 ····· 97
4.7 线性正则变换的特征值与特征函数 ····· 99
4.7.1 一维线性正则变换的特征值与特征函数 ····· 100
4.7.2 高维不可分离线性正则变换的特征值 ····· 110
4.8 线性正则变换域的 Poisson 求和公式 ····· 116
4.9 线性正则变换域的框架理论 ····· 121
4.10 线性正则变换域的 Hilbert 变换 ····· 124
4.10.1 一维 Hilbert 变换 ····· 124
4.10.2 二维 Hilbert 变换 ····· 130
第 5 章 线性正则变换的数值计算 ····· 135
5.1 引言 ····· 135
5.2 离散化方法 ····· 136

5.2.1 直接离散化方法 ····· 136
5.2.2 Pei 方法 ····· 138
5.2.3 Healy 方法 ····· 142
5.2.4 Oktem 方法 ····· 143
5.3 快速算法 ····· 145
5.3.1 Koc 采样型的计算方法 ····· 145
5.3.2 Pei 基于可扩张 Hermite 函数的方法 ····· 149
5.3.3 Hennelly 快速算法 ····· 152
5.4 其他数值计算方法 ····· 160
5.4.1 基于特征值分解的方法 ····· 160
5.4.2 Campos 基于 Hermite 函数的方法 ····· 165
5.5 高维及复线性正则变换的数值计算 ····· 169
5.5.1 复线性正则变换的计算 ····· 169
5.5.2 高维线性正则变换的计算 ····· 171
第 6 章 线性正则变换域的采样理论 ····· 174
6.1 引言 ····· 174
6.2 线性正则变换域的均匀采样 ····· 175
6.2.1 一维信号的均匀采样理论 ····· 176
6.2.2 基于有限个点的采样理论 ····· 179
6.2.3 高维信号采样 ····· 181
6.2.4 数值仿真实验 ····· 185
6.3 线性正则变换域的周期非均匀采样 ····· 186
6.3.1 周期非均匀采样信号模型 ····· 187
6.3.2 线性正则变换域周期非均匀采样信号的频谱分析 ····· 189
6.3.3 线性正则变换域周期非均匀采样信号的频谱重构 ····· 193
6.3.4 数值仿真实验 ····· 200
6.4 几种典型的非均匀采样 ····· 202
6.4.1 一般非均匀采样模型 ····· 202
6.4.2 有限个点平移后所得到的非均匀采样 ····· 203
6.4.3 N 阶周期非均匀采样信号 ····· 204
6.4.4 基于变换的非均匀采样模型 ····· 205
6.4.5 基于有限个非均匀采样点的模型 ····· 205
6.4.6 仿真实验 ····· 207
6.5 线性正则变换域采样率降低的采样 ····· 208
6.5.1 带限信号的采样率降低 ····· 208

6.5.2 带通信号的采样率降低 ····· 210
6.5.3 数值仿真实验 ····· 214
6.6 线性正则变换域多抽样率信号处理 ····· 215
6.6.1 时域抽取的离散时间线性正则变换 ····· 216
6.6.2 时域插值的离散时间线性正则变换 ····· 217
6.6.3 时域抽取和插值的等价关系 ····· 218
6.6.4 时域抽取与插值的离散线性正则变换 ····· 221
6.6.5 线性正则变换域采样率转换 ····· 224
6.6.6 数值仿真实验 ····· 227
6.7 线性正则变换域多通道采样 ····· 229
6.7.1 线性正则变换的混叠采样 ····· 229
6.7.2 线性正则变换的多通道采样 ····· 233
6.7.3 数值仿真实验 ····· 236
6.8 线性正则变换域多通道滤波器组 ····· 237
6.8.1 二通道仿酉滤波器组 ····· 239
6.8.2 多通道信号采样滤波器组 ····· 242
6.9 再生核 Hilbert 空间中的采样理论 ····· 244
6.9.1 由再生核描述采样过程 ····· 244
6.9.2 基于有限采样点的采样理论 ····· 245
6.9.3 基于再生核 Hilbert 空间的采样理论 ····· 247
第 7 章 线性正则变换域的时频分析 ····· 253
7.1 基于线性正则变换域的 Wigner-Ville 分布 ····· 253
7.1.1 信号线性正则变换后的 Wigner-Ville 分布 ····· 253
7.1.2 线性正则变换域的 Wigner-Ville 分布 ····· 253
7.1.3 WDL 分布对 LFM 信号的检测 ····· 256
7.2 基于线性正则变换的模糊函数 ····· 259
7.2.1 信号线性正则变换后的模糊函数 ····· 259
7.2.2 线性正则变换域的模糊函数 (AFL) ····· 261
7.2.3 AFL 对线性调频信号的检测与估计 ····· 267
7.3 线性正则变换域 Wigner-Ville 分布的矩 ····· 276
7.3.1 一维情况 ····· 276
7.3.2 二维情况 ····· 278
7.4 短时线性正则变换 ····· 280
7.4.1 短时线性正则变换的定义 ····· 280
7.4.2 短时线性正则变换的基本性质 ····· 281

7.4.3 基本原理 · · · · · 282
7.5 基于线性正则变换的 Hilbert-Huang 变换 · · · · · 285
7.5.1 Hilbert-Huang 变换 · · · · · 285
7.5.2 线性正则变换域的 Hilbert-Huang 变换 · · · · · 286
7.5.3 数值仿真实验 · · · · · 287
第 8 章 线性正则变换的应用 · · · · · 291
8.1 线性正则变换域滤波 · · · · · 291
8.2 瞬时频率估计 · · · · · 293
8.2.1 瞬时频率 (IF) · · · · · 293
8.2.2 线性正则变换域瞬时频率的估计 · · · · · 294
8.2.3 数值仿真实验 · · · · · 295
8.3 采样时刻未知的信号重构 · · · · · 298
8.3.1 信号重构模型 · · · · · 298
8.3.2 算法步骤 · · · · · 299
8.3.3 数值仿真实验 · · · · · 301
8.4 语音信号分析与重构 · · · · · 304
8.4.1 语音信号模型 · · · · · 305
8.4.2 语音信号重构传统方法研究 · · · · · 306
8.4.3 线性正则变换域语音信号恢复 · · · · · 307
8.4.4 数值仿真实验 · · · · · 309
8.5 线性正则变换域的数字水印 · · · · · 317
8.5.1 水印嵌入与检测算法 · · · · · 317
8.5.2 数值仿真实验 · · · · · 318
参考文献 · · · · · 324
索引 · · · · · 333

第 1 章　泛函分析基本知识

本书用 $\mathbb{F}$ 表示实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$ 表示整数集, $\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$, $\mathbb{Z}^+=\{0,1,2,\cdots\}$, 用 z^* 或 $\bar{z}$ 表示复数 z 的共轭. 本章主要介绍泛函分析中的一些基本定义和定理[1-9].

1.1　Banach 空间

定义 1.1.1　设 X 为数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间. 如果 $\forall x\in X$, 都有一个实数 $\|x\|$ 与之对应且满足

(1) $\|x\|\geqslant 0$;

(2) $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$;

(3) $\|cx\|=|c|\|x\|$,　$\forall\, c\in\mathbb{F}$;

(4) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$,　$\forall\, x,y\in X$,

则称 X 为赋范线性空间, $\|x\|$ 称为 x 的范数.

定义 1.1.2　假设 X 为赋范线性空间, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 X 中的点列, $x\in X$.

(1) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$, 则称 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 依范数收敛于 x, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$;

(2) 如果 $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|x_m-x_n\|=0$, 则称 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中的 Cauchy 列(基本列).

收敛点列一定是 Cauchy 列, 但反之不真. 如果 X 的每个 Cauchy 列都是 X 的收敛点列, 则称 X 为完备的. 完备的赋范线性空间称为 Banach 空间.

例 1.1.3　空间 $\mathbb{F}^n$ 是 Banach 空间. $\mathbb{F}^n$ 上通常的范数为

$$\|x\|_p=\begin{cases}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}, & 1\leqslant p<\infty,\\ \max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|\}, & p=\infty,\end{cases}\tag{1.1.1}$$

式中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

例 1.1.4　定义

$$l^p(\mathbb{N})=\begin{cases}\left\{\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}:\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty\right\}, & 1\leqslant p<\infty,\\ \left\{\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}:\ \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\text{为有界数列}\right\}, & p=\infty.\end{cases}\tag{1.1.2}$$

$l^p(\mathbb{N})$ 是 Banach 空间, 其范数为

$$\|x\|_{l^p(\mathbb{N})}=\begin{cases}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}, & 1\leqslant p<\infty,\\ \sup\limits_{k\in\mathbb{N}}|x_k|, & p=\infty,\end{cases}\tag{1.1.3}$$

式中 $x=\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

例 1.1.5 设 $1\leqslant p<\infty$, 可测集 $E\subseteq\mathbb{R}$. 定义

$$L^p(E)=\left\{f:E\to\mathbb{C}:\ \int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x<\infty\right\}.\tag{1.1.4}$$

$L^p(E)$ 是 Banach 空间, 其范数为

$$\|f\|_{L^p(E)}=\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.\tag{1.1.5}$$

例 1.1.6 设 $a,b\in\mathbb{R}, a<b$. 连续函数空间 $C([a,b])=\{f:f\text{ 在 }[a,b]\text{ 上连续}\}$ 是 Banach 空间, 其范数为 $\|f\|_{C([a,b])}=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

定理 1.1.7 (Hölder 不等式) 假设 $1<p,q<\infty, 1/p+1/q=1$.

(1) 如果 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\in l^p(\mathbb{N}),\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}\in l^q(\mathbb{N})$, 那么 $\{x_ky_k\}_{k\in\mathbb{N}}\in l^1(\mathbb{N})$, 且

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\,x_k\,y_k\,|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\,x_k\,|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\,y_k\,|^q\right)^{1/q};\tag{1.1.6}$$

(2) 设可测集 $E\subseteq\mathbb{R}$. 如果 $f\in L^p(E), g\in L^q(E)$, 那么 $fg\in L^1(E)$, 且

$$\int_E|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_E|g(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}.\tag{1.1.7}$$

定义 1.1.8 (卷积) 函数 $f,g\in L^1(\mathbb{R})$ 的卷积定义为

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y.\tag{1.1.8}$$

定理 1.1.9 如果 $f,g,h\in L^1(\mathbb{R})$, 则 $f*g\in L^1(\mathbb{R})$, 且满足

(1) $\|f*g\|_{L^1(\mathbb{R})}\leqslant\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}\cdot\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$;

(2) $f*g=g*f$;

(3) $(f*g)*h=f*(g*h)$;

(4) $(f+g)*h=f*h+g*h$.

如果级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$ 的部分和 $S_N=\sum\limits_{k=1}^{N}x_k$ 收敛, 即存在 $y\in X$, 使得 $S_N\to y(N\to\infty)$, 称 y 为级数的和, 记作 $y=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$. 如果对 $\mathbb{N}$ 的每个置换 σ, $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}x_{\sigma(k)}$ 收敛, 则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$ 无条件收敛; 如果 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|x_k\|<\infty$, 则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$ 绝对收敛. Banach 空间中绝对收敛的级数一定无条件收敛, 但反之不真.

定义 1.1.10 设 X 是赋范线性空间, S 为任意指标集, S 的有限集全体记为 $F(S)$. 如果 $\forall\, s\in S, x_s\in X$ 且 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $F_0\in F(S)$, 使得 $\forall F\in F(S), F_0\subseteq F\subseteq S$, 有

$$\left\|y-\sum_{s\in F}x_s\right\|<\varepsilon, \tag{1.1.9}$$

则称 $\sum\limits_{s\in S}x_s$ 收敛于 y, 记作 $y=\sum\limits_{s\in S}x_s$.

定理 1.1.11 (1) 假设 X 是 Banach 空间且级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$ 收敛且

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}x_k\right\|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|; \tag{1.1.10}$$

(2) 如果 X 中绝对收敛的级数蕴涵无条件收敛, 则空间 X 是 Banach 空间.

定理 1.1.12 假设 X 是 Banach 空间, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset X$, 则下述条件等价:

(1) $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}x_k$ 无条件收敛;

(2) 对每个递增序列 $0<n_1<n_2<\cdots$, $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}x_{n_k}$ 收敛;

(3) 对 $\epsilon_k=\pm1$, $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}\epsilon_kx_k$ 收敛;

(4) 对每个有界数列 $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}c_kx_k$ 收敛.

定义 1.1.13 假设 X 是 Banach 空间, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset X$.

(1) $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的线性扩张集定义为

$$\operatorname{span}\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}=\left\{\sum_{k=1}^{n}c_kx_k:\quad c_k\in\mathbb{F},k=1,2,\cdots,n,n\in\mathbb{N}\right\}; \tag{1.1.11}$$

(2) $\operatorname{span}\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的闭包称为 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的闭线性扩张集, 记作 $\overline{\operatorname{span}\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}}$;

(3) 如果 $\overline{\operatorname{span}\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}}=X$, 则称 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 X 中完全.

定义 1.1.14　假设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上的两个范数, 如果它们能够定义相同的收敛性, 即

$$\|x_k\|_1 \to 0 \text{ 当且仅当 } \|x_k\|_2 \to 0\,(k \to \infty), \quad \forall \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X, \tag{1.1.12}$$

则称 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是等价的. 若 $\forall\ \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$, 当 $\|x_k\|_1 \to 0\,(k \to \infty)$ 时, 有 $\|x_k\|_2 \to 0\,(k \to \infty)$, 则称范数 $\|\cdot\|_1$ 比范数 $\|\cdot\|_2$ 强.

定理 1.1.15　(1) 假设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上的两个范数, 则 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价当且仅当存在常数 $C_1 > 0, C_2 > 0$, 使得

$$C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1, \quad \forall\, x \in X; \tag{1.1.13}$$

(2) 有限维线性空间上的任何两个范数均是等价的.

1.2　Hilbert 空间

Hilbert 空间是特殊的 Banach 空间.

定义 1.2.1　假设 H 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间. 若存在映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{F}$ 满足下列条件:

(1) $\langle x, x\rangle \geqslant 0, \quad \forall\, x \in H$;

(2) $\langle x, x\rangle = 0$ 当且仅当 $x = 0$;

(3) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle^*,\ \forall\, x, y \in H$;

(4) $\langle ax + by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle, a, b \in \mathbb{F},\ \forall\, x, y, z \in H$,

则称 $\langle x, y\rangle$ 是 x 与 y 的内积, 并称 H 为内积空间. 当 $\mathbb{F}$ 为实数域时称 H 为实的内积空间; 当 $\mathbb{F}$ 为复数域时称 H 为复的内积空间. 如果 H 是内积空间, $\forall\, x \in H$, 定义范数 $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$, 称为由内积诱导出的范数. 因此, 内积空间是赋范线性空间. 完备的内积空间称为 Hilbert 空间. 如果 $\langle x, y\rangle = 0$, 则称 x 与 y 正交, 记作 $x \perp y$. 设 $M, N \subset H$, 如果 $\forall x \in M, \forall y \in N$ 恒有 $x \perp y$, 则称 M 与 N 正交, 记作 $M \perp N$. $M^{\perp} = \{x :\ x \in H, x \perp M\}$ 称为 M 的正交补.

例 1.2.2　$\mathbb{F}^n$ 是 Hilbert 空间, 其内积为

$$\langle \{x_k\}_{k=1}^n, \{y_k\}_{k=1}^n\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k^*, \quad \forall\, \{x_k\}_{k=1}^n, \{y_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{F}^n. \tag{1.2.1}$$

例 1.2.3　$l^2(\mathbb{N})$ 是 Hilbert 空间, 其内积为

$$\langle \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k^*, \quad \forall\, \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N}). \tag{1.2.2}$$

例 1.2.4 假设 $E \subseteq \mathbb{R}$ 是可测集，则 $L^2(E)$ 是 Hilbert 空间, 其内积为

$$\langle f, g\rangle = \int_E f(x)g^*(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall\, f, g \in L^2(E). \tag{1.2.3}$$

定理 1.2.5 假设 H 是内积空间, 则有

(1) Cauchy-Schwarz 不等式

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|, \quad \forall\, x, y \in H; \tag{1.2.4}$$

(2) 平行四边形法则

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right), \quad \forall\, x, y \in H; \tag{1.2.5}$$

(3) 勾股定理

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2, \quad x, y \in H,\ x \perp y. \tag{1.2.6}$$

如果 M 是内积空间 H 的子空间且 $x \in H$. 若存在 $y \in M$, 使得

$$\|x-y\| = \inf_{z\in M}\|x-z\|, \tag{1.2.7}$$

则称 y 是 x 在 M 中的投影或最佳逼近元, 记作 $y = P_M x$.

定理 1.2.6(变分原理) 假设 M 是 Hilbert 空间 H 中的闭凸集, 那么 $\forall x \in H$ 在 M 中存在唯一的最佳逼近元.

定理 1.2.7(正交分解定理) 假设 M 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间, 则 $\forall x \in H$, 存在唯一的正交分解

$$x = y + z, \quad y \in M,\ z \in M^{\perp}. \tag{1.2.8}$$

定义 1.2.8 假设 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 Hilbert 空间 H 的点列.

(1) 如果 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 中任何两个不同元素都正交, 则称 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 H 的正交列;

(2) 如果 $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$,

$$\langle x_m, x_n\rangle = \delta_{m,n} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases} \tag{1.2.9}$$

则称 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为 H 的标准正交列;

(3) 如果 $\forall\, x \in H$, 存在唯一的表示

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k, \quad c_k \in \mathbb{F}, \tag{1.2.10}$$

则称 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为 H 的一个基. 若 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 既是标准正交列又是基, 则称 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是标准正交基或规范正交基.

例 1.2.9　$\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}/\sqrt{2\pi}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 Hilbert 空间 $L^2([-\pi,\pi])$ 的标准正交基.

例 1.2.10　$\left\{(2^k k!\sqrt{\pi})^{-1/2}\mathrm{e}^{-x^2/2}H_k(x)\right\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ 是 Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{R})$ 的标准正交基, 其中

$$H_k(x)=(-1)^k\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\mathrm{e}^{-x^2},\quad k\in\mathbb{Z}^+, \tag{1.2.11}$$

称为 Hermite 多项式. Hermite 多项式是 Hermite 微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+2ku=0,\quad x\in\mathbb{R} \tag{1.2.12}$$

的解.

定理 1.2.11　设 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 Hilbert 空间 H 的标准正交列, $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{F}$.

(1) 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_kx_k$ 在 H 中收敛当且仅当 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|c_k|^2<\infty$, 此时, 有

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}c_kx_k\right\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2, \tag{1.2.13}$$

称为 Plancherel 等式;

(2) (Bessel 不等式)

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,x_k\rangle|^2\leqslant\|x\|^2,\quad\forall\,x\in H. \tag{1.2.14}$$

定义 1.2.12　假设 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 Hilbert 空间 H 的标准正交列和 $x\in H$, 那么称 $\{\langle x,x_k\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为 x 的 Fourier 系数, 而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x,x_k\rangle x_k$ 称为 x 的 Fourier 级数.

注意, 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x,x_k\rangle x_k$ 并不一定收敛于 x.

在一般的 Hilbert 空间中, 标准正交基有下述等价刻画.

定理 1.2.13　设 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 Hilbert 空间 H 的标准正交列, 则下述条件等价:

(1) $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 H 的标准正交基;

(2) $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}^{\perp}=\{0\}$;

(3) $\overline{\mathrm{span}\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}}=H$;

(4) $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x,x_k\rangle x_k,\ \forall\,x\in H$;

(5) $\|x\|^2=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\langle x,x_k\rangle|^2,\ \forall\,x\in H$;

(6) $\langle x,y\rangle=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle x,x_k\rangle\langle y,x_k\rangle^*,\forall\, x,y\in H.$

推论 1.2.14 (1) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}},\dfrac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\dfrac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\cdots\right\}$ 是 $L^2([-\pi,\pi])$ 的标准正交基;

(2) $\|f\|_2^2=\dfrac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2),\ \forall\, f\in L^2([-\pi,\pi]);$

(3) $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\ \forall\, f\in L^2([-\pi,\pi]).$

注意, 级数依 $L^2([-\pi,\pi])$ 中的范数收敛, 但并不能保证处处收敛. 如果 Hilbert 空间 H 有一个可数标准正交基, 则称 H 是可分的. 本书考虑的 Hilbert 空间都是可分的.

定理 1.2.15 (1) n 维实 Hilbert 空间等距同构于 $\mathbb{R}^n$;

(2) n 维复 Hilbert 空间等距同构于 $\mathbb{C}^n$;

(3) 无限维可分 Hilbert 空间等距同构于 $l^2(\mathbb{N})$.

1.3 线 性 算 子

线性算子理论构成泛函分析的核心内容, 它是泛函分析应用于各个领域的主要工具. 近代数学与工程实际中的许多问题如果能够看成某空间上的算子或算子方程就可以利用泛函分析方法进行研究.

定义 1.3.1 假设 X 和 Y 是数域 $\mathbb{F}$ 上的赋范线性空间, $T:X\to Y$ 是从空间 X 到空间 Y 的算子.

(1) 如果 $\forall x,y\in X,a,b\in\mathbb{F}$, 有 $T(ax+by)=aTx+bTy$, 则称 T 为线性的;

(2) 如果 $Y=\mathbb{F}$, 则称线性算子 $T:X\to\mathbb{F}$ 为线性泛函;

(3) 如果 $Tx=Ty$ 当且仅当 $x=y$, 则称 T 为单射; X 中使得 $Tx=0$ 的元素 x 的集合称为 T 的核或零空间, 记作 $\ker(T)$. 显然, T 为单射当且仅当 $\ker(T)=\{0\}$;

(4) $R(T)=T(X)=\{Tx:\ x\in X\}$ 称为 T 的值域或象; 如果 $R(T)=Y$, 则称 T 为满射;

(5) 如果 T 既是单射又是满射, 则称 T 为双射;

(6) 如果 $x_n\to x$ 蕴涵 $Tx_n\to Tx\,(n\to\infty)$, 则称 T 是连续的;

(7) 如果存在正常数 M, 使得 $\|Tx\|\leqslant M\|x\|$ $(\forall\, x\in X)$, 则称 T 是有界的, 否则称 T 是无界的;

(8) 线性算子 $T:X\to Y$ 的范数定义为 $\|T\|=\sup\limits_{x\in X,\|x\|=1}\|Tx\|$;

(9) 如果 $\|Tx\| = \|x\|$ $(\forall\, x \in X)$, 则称 T 是保范或等距的.

定理 1.3.2　假设 $T : X \to Y$ 是一个线性算子, 则 T 连续当且仅当 T 有界.

例 1.3.3　设 X 是赋范线性空间, 定义恒等算子 $I(x) = x$ $(\forall\, x \in X)$, 则 I 既是有界的又是连续的. 显然, 零算子也是有界的并且连续.

例 1.3.4　假设积分核 $k(t,s)$ 是定义在 $[0,1]\times[0,1]$ 上的连续函数, 定义积分算子

$$(Kf)(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s)\mathrm{d}s, \tag{1.3.1}$$

则 K 为连续函数空间 $C([0,1])$ 到其自身的有界线性算子, 且

$$\|K\| = \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |k(t,s)|\mathrm{d}s. \tag{1.3.2}$$

例 1.3.5　定义算子

$$(Tf)(t) = \int_a^t f(s)\mathrm{d}s, \quad \forall\, f \in L^1([a,b]), \tag{1.3.3}$$

则 $T : L^1([a,b]) \to L^1([a,b])$ 是有界线性算子且 $\|T\| = b-a$; $T : L^1([a,b]) \to C([a,b])$ 是有界线性算子且 $\|T\| = 1$.

例 1.3.6　假设 $m_0(\mathbb{N})$ 是仅含有限个非零项的数列全体, 它作为 $l^\infty(\mathbb{N})$ 的子空间是赋范线性空间. 定义算子 $T : m_0(\mathbb{N}) \to m_0(\mathbb{N})$ 为

$$Tx = \left(\sum_{k=1}^{\infty} kx_k, 0, 0, \cdots\right), \quad \forall\, x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in m_0(\mathbb{N}), \tag{1.3.4}$$

则 T 是无界线性算子.

定理 1.3.7　有限维赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的任一线性算子都是有界的.

1.4　算子空间与对偶空间

定义 1.4.1　假设 X 与 Y 是数域 $\mathbb{F}$ 上的赋范线性空间.

(1) 算子空间 $B(X,Y)$ 定义为

$$B(X,Y) = \{T : X \to Y :\ \ T \text{ 为连续线性算子}\};$$

(2) 若 $Y = X$, 记 $B(X,X)$ 为 $B(X)$;

(3) 如果 $Y = \mathbb{F}$, 则称 $B(X,\mathbb{F})$ 为 X 的对偶空间, 记作 X^*.

定理 1.4.2 (1) $B(X,Y)$ 是一个赋范线性空间, 其范数为算子范数;

(2) 一般来说, $B(X,Y)$ 不一定完备. 如果 Y 是 Banach 空间, 则 $B(X,Y)$ 也是 Banach 空间. 特别地, X^* 是 Banach 空间.

定理 1.4.3 (Riesz 表示定理) 若 H 是 Hilbert 空间, $f \in H^*$, 则存在唯一的 $y_f \in H$, 使得 $\forall\, x \in H, f(x) = \langle x, y_f\rangle$, $\|f\| = \|y_f\|$.

例 1.4.4 (1) $l^1(\mathbb{N})^* = l^\infty(\mathbb{N})$;

(2) $l^p(\mathbb{N})^* = l^q(\mathbb{N})$ $(1 < p < \infty, 1/p + 1/q = 1)$;

如果 $E \subseteq \mathbb{R}$ 是可测集, 则

(3) $L^1(E)^* = L^\infty(E)$;

(4) $L^p(E)^* = L^q(E)$ $(1 < p < \infty, 1/p + 1/q = 1)$;

(5) 如果 H 是 Hilbert 空间, 则 $H^* = H$, 即 Hilbert 空间是自对偶的.

定义 1.4.5 假设 X 和 Y 是数域 $\mathbb{F}$ 上的赋范线性空间, $B(X,Y)$ 为线性算子空间, $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B(X,Y)$, $T \in B(X,Y)$.

(1) 如果 $\|T_k - T\| \to 0\,(k \to \infty)$, 则称 $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 依算子范数收敛于 T, 记作 $T_k \to T\,(k \to \infty)$;

(2) 若 $\forall x \in X$ 都有 $T_k x \to Tx\,(k \to \infty)$, 则称 $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 强收敛于 T, 记作 $T_k \xrightarrow{\text{强}} T\,(k \to \infty)$. 显然, $T_k \to T$ 蕴涵 $T_k \xrightarrow{\text{强}} T\,(k \to \infty)$, 但反之不真.

定义 1.4.6 假设 X 是赋范线性空间, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$, $x \in X$.

(1) 如果 $\|x_k - x\| \to 0\,(k \to \infty)$, 则称 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 依范数收敛于 x, 记作 $x_k \to x\,(k \to \infty)$. 有时称这种收敛为强收敛;

(2) 如果 $\forall f \in X^*$, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(x)$, 则称 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 弱收敛于 x, 记作 $x_k \xrightarrow{\text{弱}} x\,(k \to \infty)$, x 称为弱极限. 显然, $x_k \to x$ 蕴涵 $x_k \xrightarrow{\text{弱}} x\,(k \to \infty)$, 但反之不真. 若 $\dim X = n < \infty$, 则弱收敛与强收敛等价;

(3) 设 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X^*, f \in X^*$. 如果 $\forall x \in X$, $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, 则称 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 弱 * 收敛于 f, 记作 $f_k \xrightarrow{\text{弱}^*} f\,(k \to \infty)$. 弱 * 极限是唯一的. 点列 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X^*$ 依范数收敛蕴涵弱 * 收敛, 但反之不真.

定理 1.4.7 设赋范线性空间 X 中的点列 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 弱收敛于 x, 则

(1) $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的弱极限是唯一的;

(2) $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的任一子列也弱收敛于 x;

(3) 弱收敛点列是有界的.

定理 1.4.8 假设 H 是 Hilbert 空间, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H$, $x \in H$, 则

(1) $x_k \xrightarrow{\text{弱}} x$ 当且仅当 $\forall y \in H$, $\langle x_k, y\rangle \to \langle x, y\rangle\,(k \to \infty)$;

(2) $x_k \to x$ 当且仅当 $x_k \xrightarrow{\text{弱}} x$, 且 $\|x_k\| \to \|x\|\,(k \to \infty)$.

1.5 对偶算子与紧算子

设 X 与 Y 是赋范线性空间, $T \in B(X,Y)$. 任取 $f \in Y^*$, 则 $f(Tx)$ 关于 $x \in X$ 是线性的. 由不等式 $|f(Tx)| \leqslant \|f\|\,\|T\|\,\|x\|$ 可知, $f(Tx)$ 是一个有界线性泛函. 令 $f^*(x) = f(Tx)$, 则 $f^* \in X^*$. 显然当 f 在 Y^* 中给定时, f^* 就在 X^* 中被确定下来, 这就建立了由 Y^* 到 X^* 的映射, 记这个映射为 T^*, 于是 $T^*f = f^*$.

定义 1.5.1 设 X 与 Y 是赋范线性空间, $T \in B(X,Y)$. T 的对偶算子 T^* 定义为 $T^* : Y^* \to X^*$, $(T^*f)(x) = f(Tx) = \langle f, Tx\rangle$, $\forall f \in Y^*$, $x \in X$.

定理 1.5.2 假设 X 与 Y 是赋范线性空间, $T \in B(X,Y)$, 那么 T^* 是有界线性算子, 且 $\|T^*\| = \|T\|$.

定理 1.5.3 假设 X_i $(i = 1,2,3)$ 都是赋范线性空间.

(1) 如果 $T, S \in B(X_1, X_2), a, b \in \mathbb{F}$, 则 $(aT + bS)^* = aT^* + bS^*$;

(2) 如果 $T \in B(X_1, X_2), S \in B(X_2, X_3)$, 则 $(ST)^* = T^*S^*$;

(3) 如果 $T \in B(X_1, X_2), T^{-1}$ 存在且 $T^{-1} \in B(X_2, X_1)$, 则 $(T^*)^{-1} \in B(X_1^*, X_2^*)$, 且 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

定理 1.5.4 设 H_1 与 H_2 都是 Hilbert 空间, $T \in B(H_1, H_2)$, 则存在唯一的算子 $T^* \in B(H_2, H_1)$, 满足 $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$, $\forall x \in H_1, y \in H_2$.

由以上定理, 自然有以下的定义.

定义 1.5.5 假设 H_1 与 H_2 是 Hilbert 空间, $T \in B(H_1, H_2)$, 则 T 的伴随算子 $T^* \in B(H_2, H_1)$ 定义为 $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$, $\forall x \in H_1, y \in H_2$.

定义 1.5.6 假设 H 是 Hilbert 空间, $T \in B(H)$.

(1) 如果 $T = T^*$, 则称 T 是自伴算子;

(2) 如果 $T^* = T$ 且 $\forall x \in H, \langle Tx, x\rangle \geqslant 0$, 则称 T 为正算子, 记作 $T \geqslant 0$. $T \geqslant S$ 是指 $T, S \in B(H)$ 是自伴算子且 $T - S \geqslant 0$;

(3) 如果 $T^*T = TT^* = I$, 那么称 T 为酉算子, T 是酉算子当且仅当 T 是等距的满射;

(4) 若 $T = T^* = T^2$, 则称 T 为投影算子.

注意, 在本书中, 对于 $T \in B(X,Y)$, 当 X 与 Y 都是赋范线性空间时, T^* 理解为 T 的对偶算子; 当 X 与 Y 都是 Hilbert 空间时, T^* 理解为 T 的伴随算子.

例 1.5.7 设 $T : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ 是以 $K(x,y)$ 为核的积分算子

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)\mathrm{d}y, \quad \forall f \in L^2([a,b]), \tag{1.5.1}$$

则

$$(T^*f)(x)=\int_a^b K^*(y,x)f(y)\mathrm{d}y. \tag{1.5.2}$$

伴随算子具有如下基本性质.

定理 1.5.8 假设 H_i $(i=1,2,3)$ 都是 Hilbert 空间, 那么

(1) $I^*=I$;

(2) $(aT+bS)^*=\bar{a}T^*+\bar{b}S^*,\ T,S\in B(H_1,H_2),a,b\in\mathbb{F}$;

(3) $T^{**}=T,\ \ T\in B(H_1,H_2)$;

(4) 如果 T 可逆且 $T^{-1}\in B(H_2,H_1)$, 则 T^* 可逆且 $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$;

(5) 如果 $T\in B(H_1,H_2),S\in B(H_2,H_3)$, 则 $(ST)^*=T^*S^*$;

(6) $\|T\|=\|T^*\|=\|T^*T\|^{1/2},\ \forall T\in B(H_1,H_2)$.

定理 1.5.9 假设 H 是 Hilbert 空间, $T\in B(H),T^*=T$, 则

$$\|T\|=\sup_{x\in H,\|x\|=1}|\langle Tx,x\rangle|. \tag{1.5.3}$$

定理 1.5.10 假设 H_1 与 H_2 是 Hilbert 空间且 $T\in B(H_1,H_2)$, 则

(1) $\ker(T)=R(T^*)^\perp$, $\ker(T^*)=R(T)^\perp$;

(2) $\overline{R(T)}=\ker(T^*)^\perp$, $\overline{R(T^*)}=\ker(T)^\perp$;

(3) $R(T)$ 在 H_2 中闭当且仅当 $R(T^*)$ 在 H_1 中闭;

(4) T 是满射当且仅当存在常数 C, 使得 $\|T^*y\|\geqslant C\|y\|,\ \forall y\in H_2$.

紧算子几乎是有限秩的, 它的一些性质与矩阵类似, 在积分方程和数学物理问题的研究中起着重要的作用.

定义 1.5.11 假设 X 与 Y 是赋范线性空间, $T:X\to Y$ 是线性算子. 如果对每个有界点列 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset X$, $\{Tx_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 有收敛的子列, 则称 T 为紧算子.

注意, 紧算子有界, 但反之不真.

定理 1.5.12 假设 X,Y,Z 都是赋范线性空间.

(1) 设 $T\in B(X,Y),S\in B(Y,Z)$, 如果 T,S 中有一个是紧算子, 则 ST 也是紧算子;

(2) 如果 $T,S\in B(X,Y)$ 是紧算子, $a,b\in\mathbb{F}$, 则 $aT+bS$ 也是紧算子;

(3) 如果 $T\in B(X,Y)$ 且 $\dim R(T)<\infty$, 则 T 是紧算子;

(4) 如果 T 是紧算子, 则 T^* 也是紧算子;

(5) 当 Y 是 Banach 空间时, 如果紧算子列 $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset B(X,Y)$ 依算子范数收敛于 $T\in B(X,Y)$, 则 T 也是紧算子.

1.6 算子的特征值与特征向量

本节始终假设 X 是复的 Banach 空间, H 是复的 Hilbert 空间.

定义 1.6.1 假设 $T \in B(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

(1) 如果 $\lambda I - T$ 有有界逆算子, 则称 λ 为 T 的正则值, 正则值全体称为 T 的正则集, 记作 $\rho(T)$;

(2) $\sigma(T) = \mathbb{C}\backslash\rho(T)$ 称为 T 的谱, $\sigma(T)$ 中的每个复数称为 T 的谱点;

(3) 如果存在非零向量 $u \in X$ 使 $Tu = \lambda u$, 则称 λ 为算子 T 的特征值, 特征值的全体记为 $\sigma_p(T)$, 对应的非零向量称为 T 的特征向量, 其构成的空间称为特征向量空间. 若 X 是函数空间, 特征向量通常称为特征函数.

定理 1.6.2 假设 $T \in B(X)$.

(1) 如果 $\|T\| < 1$, 则 $(I-T)^{-1} \in B(X)$ 且

$$(I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k, \quad \left\|(I-T)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{1-\|T\|}; \tag{1.6.1}$$

(2) $\sigma(T) \neq \varnothing$ 是有界闭集且 $\sigma(T) \subset \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leqslant \|T\|\}$;

(3) $\sigma(T) = \sigma(T^*)$.

设 X 是赋范线性空间, $x \in X, f \in X^*$. 如果 $\langle f, x\rangle = f(x) = 0$, 则称 x 与 f 正交, 记作 $x \perp f$.

定理 1.6.3 (Riesz-Schauder 理论) 假设 $T \in B(X)$ 为紧算子, 则

(1) $\sigma(T) = \sigma(T^*)$;

(2) $\sigma(T)$ 是有限集或者是以 0 为聚点的可列集, $\sigma(T)$ 中任一不为 0 的数都是 T 的特征值, 当 $\dim X = \infty$ 时, $0 \in \sigma(T)$;

(3) T 及 T^* 对应于同一非零特征值的特征向量空间有相同的维数且维数有限;

(4) T 与 T^* 对应于不同特征值的特征向量空间正交;

(5) 设 $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, 则 λ 是 T 的正则值当且仅当下列条件之一成立:

(a) $\lambda I - T$ 是单射, (b) $\lambda I - T$ 是满射;

(6) 设 $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$, 则

(a) 方程 $(\lambda I - T)x = y$ 有解当且仅当 $y \perp \ker(\lambda I - T^*)$,

(b) 方程 $(\lambda I - T^*)f = g$ 有解当且仅当 $g \perp \ker(\lambda I - T)$;

(7) 令 $T_\lambda = \lambda I - T\,(\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\})$, 那么存在自然数 $k_0 \geqslant 1$ (依赖于 λ), 使 $\dim\ker(T_\lambda^{k_0}) < \infty$,

$$\ker(T_\lambda^0) \subset \ker(T_\lambda) \subset \cdots \subset \ker(T_\lambda^{k_0}) = \ker\left(T_\lambda^k\right)\ (k \geqslant k_0), \tag{1.6.2}$$

$$R(T_\lambda) \supset R\left(T_\lambda^2\right) \supset \cdots \supset R(T_\lambda^{k_0}) = R\left(T_\lambda^k\right)\ (k \geqslant k_0); \tag{1.6.3}$$

(8) 当 $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$ 时, 必存在自然数 $n_0 \geqslant 1$ 使得 $R(T_\lambda^{n_0})$ 为闭子空间,

$$X = \ker\left(T_\lambda^{n_0}\right) \oplus R\left(T_\lambda^{n_0}\right), \tag{1.6.4}$$

式中 $\oplus$ 表示直和.

定理 1.6.4 假设 $T \in B(H)$, 那么

(1) 假设 $T^* = T$, 则 T 的特征值都是实数且不同特征值的特征向量正交;

(2) 如果 $T^*T = TT^* = I$, λ 是 T 的特征值, 则 $|\lambda| = 1$ 且不同特征值的特征向量正交;

(3) 如果 $T \geqslant 0$, λ 是 T 的特征值, 则 $\lambda \geqslant 0$.

定理 1.6.5 (紧自伴算子的谱定理) 假设 $\dim H = \infty$, T 是 Hilbert 空间 H 上的紧自伴算子, 则存在 T 的特征向量构成的标准正交基 $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, 使得 $\forall x \in H$,

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, e_k\rangle e_k, \tag{1.6.5}$$

式中 e_k 是对应于 λ_k 的特征向量.

作为谱定理的应用, 自然有算子值函数 $f(T)$ 的定义.

定义 1.6.6 假设 $\dim H = \infty$, T 是 Hilbert 空间 H 上的紧自伴算子, $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 T 的特征向量构成的标准正交基, e_k 是对应于 λ_k 的特征向量. 假设 $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ 使得极限 $\lim\limits_{k\to\infty} f(\lambda_k)$ 存在, 则算子 $f(T)$ 定义为

$$f(T)x = \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda_k)\langle x, e_k\rangle e_k. \tag{1.6.6}$$

当 $\lim\limits_{k\to\infty} f(\lambda_k) = 0$ 时, $f(T)$ 是紧的; 当 f 是实值函数时, $f(T)$ 是自伴的.

1.7 基 本 定 理

定义 1.7.1 (开映射) 假设 X 与 Y 是赋范线性空间, $T : X \to Y$. 如果对任一开集 $U \subset X$, $T(U)$ 是 Y 中的开集, 则称 T 为开映射.

定理 1.7.2 (Banach 开映射定理、逆算子定理) 假设 X 与 Y 为 Banach 空间.

(1) 如果 $T \in B(X, Y)$ 且 $T(X) = Y$, 则 T 是开映射.

(2) 如果 $T \in B(X, Y)$ 且存在逆算子 $T^{-1} : Y \to X$, 则 T^{-1} 有界.

定义 1.7.3 假设 X 与 Y 是赋范线性空间, $D(T)$ 为 X 的子空间, $T : D(T) \to Y$ 是线性算子, 则 T 的图像定义为 $G(T) = \{(x, Tx) \in X \times Y : \ x \in D(T)\}$. 如果 $G(T)$ 是 $X \times Y$ 中的一个闭集, 则称 T 是闭算子.

定理 1.7.4 (判别定理) 假设 X 与 Y 是赋范线性空间, $D(T)$ 为 X 的子空间且 $T : D(T) \to Y$ 是线性算子, 则 T 是闭算子当且仅当 $\forall \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset D(T)$, 如果 $x_k \to x \in X$ 且 $Tx_k \to y \in Y$ $(k \to \infty)$, 那么 $x \in D(T)$ 且 $y = Tx$.

定理 1.7.5 (闭图像定理) 假设 T 是 Banach 空间 X 到 Y 的闭算子, 则 T 有界.

定理 1.7.6 (共鸣定理) 设 X 是 Banach 空间, Y 是赋范线性空间, $W \subset B(X, Y)$. 如果 $\forall x \in X$, $\sup\limits_{T\in W} \|Tx\| < \infty$, 则 $\{\|T\| : \ T \in W\}$ 有界, 即 $\sup\limits_{T\in W} \|T\| < \infty$.

定理 1.7.7 (Banach-Steinhaus 定理) 假设 X 是 Banach 空间, Y 是赋范线性空间. 若 $T_k\,(k \in \mathbb{N}), T \in B(X, Y), M$ 是 X 的某个稠密子集, 那么 $\forall x \in X$, $\lim\limits_{k\to\infty} T_k x = Tx$ 当且仅当

(1) $\{\|T_k\|\}_{k\in\mathbb{N}}$ 有界;

(2) $\lim\limits_{k\to\infty} T_k x = Tx$, $\forall x \in M$.

定理 1.7.8 设 Y 是实线性空间 X 的子空间, $p : X \to \mathbb{R}$ 是次线性泛函,

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y), \quad p(ax) = ap(x), \quad \forall x, y \in X, a \geqslant 0. \tag{1.7.1}$$

如果 f 是定义在 Y 上的实线性空间且 $\forall x \in Y$, $f(x) \leqslant p(x)$, 那么必存在定义在 X 上的实线性泛函 F 使得

(1) $F(x) = f(x)$, $\forall x \in Y$;

(2) $F(x) \leqslant p(x)$, $\forall x \in X$.

定理 1.7.9 (Hahn-Banach 定理) 设 Y 是赋范线性空间 X 的子空间, $f \in Y^*$, 则 f 可以保范延拓到全空间 X, 即存在 $F \in X^*$, 满足条件:

(1) $F(x) = f(x)$, $\forall x \in Y$;

(2) $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$.

Hahn-Banach 定理有一些重要的推论.

推论 1.7.10 假设 Y 是赋范线性空间 X 的子空间, $x_0 \in X$. 如果 $d = \inf\limits_{x\in Y} \|x_0 - x\| > 0$, 则存在 $f \in X^*$, 使得

(1) $\|f\| = 1, f(x_0) = d$;

(2) $f(x) = 0$, $\forall x \in Y$.

推论 1.7.11 假设 $X \neq \{0\}$ 是赋范线性空间, $x_0 \in X$, 那么存在 $f \in X^*$, 使得 $\|f\| = 1, f(x_0) = \|x_0\|$.

推论 1.7.12 假设 X 是 Banach 空间, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$, 那么 $\overline{\operatorname{span}\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}} = X$ 当且仅当 $\forall f \in X^*$, 当 $f(x_k) = 0\,(k \in \mathbb{N})$ 时, $f = 0$.

注意, 假设 X 是赋范线性空间, $x, y \in X$, 那么

(1) 如果 $X \neq \{0\}$, 则 $X^* \neq \{0\}$;

(2) 如果 $\forall f \in X^*$, $f(x) = 0$, 则 $x = 0$;

(3) $x = y$ 当且仅当 $\forall f \in X^*$, $f(x) = f(y)$.

1.8 再生核 Hilbert 空间 (RKHS)

本节介绍再生核 Hilbert 空间及相关的一些基本概念和性质. 再生核 Hilbert 空间理论广泛应用于复分析、调和分析、量子力学、统计学以及机器学习等领域.

设 Ω 是一个非空集合, $\mathbb{F}$ 表示实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$, $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{F})$ 表示 Ω 到 $\mathbb{F}$ 全体函数构成的集合. 对于通常的加法运算 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ 与数乘 $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{F})$ 是一个向量空间. 若 $H \subset \mathscr{F}(\Omega, \mathbb{F})$ 是 Hilbert 空间, 则称 H 为 Ω 上的 Hilbert 函数空间. 对 Ω 上的二元函数 $K(x, y)$, 通常记 $k_y(x) = K(x, y)$.

定义 1.8.1 假设 H 是 Ω 上的 Hilbert 函数空间, 其内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$. 设函数 $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{F}$, 使得

(1) $K(\cdot, x) \in H$, $\forall\, x \in \Omega$;

(2) (再生性) $f(x) = \langle f, K(\cdot, x)\rangle$, $\forall\, f \in H,\ x \in \Omega$,

则称 K 是 H 的再生核. 具有再生核的 Hilbert 函数空间 H 称为 Ω 上的再生核 Hilbert 空间 (RKHS).

定义 1.8.2 设 $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{F}$. 如果存在 Hilbert 空间 $\mathcal{C}$ (不必为再生核 Hilbert 空间) 和映射 $\phi : \Omega \to \mathcal{C}$ 使得

$$K(x, y) = \langle \phi(x), \phi(y)\rangle, \quad \forall\, x, y \in \Omega, \tag{1.8.1}$$

则称 K 是 Ω 上的核. $\phi : \Omega \to \mathcal{C}$ 被称为特征映射, $\mathcal{C}$ 被称为特征空间. Ω 上的每一个再生核都是核, 但应该注意特征空间不是唯一的.

例 1.8.3 设 $\Omega = \mathbb{R}^2$, $K(x, y) = \langle x, y\rangle^2$, $\forall\, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \Omega$, 则

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \langle x, y\rangle^2 = x_1^2 x_2^2 + x_2^2 y_2^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 \\ &= (x_1^2, x_2^2, \sqrt{2}x_1 x_2)\,(y_1^2, y_2^2, \sqrt{2}y_1 y_2)^{\mathrm{T}} \\ &= (x_1^2, x_2^2, x_1 x_2, x_1 x_2)\,(y_1^2, y_2^2, y_1 y_2, y_1 y_2)^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

故特征空间为 $\mathcal{C}_1 = \mathbb{R}^3$ 或 $\mathcal{C}_2 = \mathbb{R}^4$, 其特征映射分别为 $\phi_1(x) = (x_1^2, x_2^2, \sqrt{2}x_1 x_2)$, $\phi_2(x) = (x_1^2, x_2^2, x_1 x_2, x_1 x_2)$.

定义 1.8.4　假设 $K:\Omega\times\Omega\to\mathbb{F}$ 是 Hermite 函数, 即 $K(x,y)=K^*(y,x)$, $\forall\, x,y\in\Omega$, 且 $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega^n$, $(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in\mathbb{C}^n$, 有

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i^* c_j K(x_i,x_j)\geqslant 0, \tag{1.8.2}$$

则称 K 是 Ω 上的正定函数. Ω 上的每一个核都是正定的. 如果 Ω 是一个距离空间, $K:\Omega\times\Omega\to\mathbb{R}$ 是连续的正定函数, 则称 K 为 Mercer 核.

定理 1.8.5 (Moore-Aronszajn)　假设 K 为 Ω 上的正定函数, 则存在唯一的再生核 Hilbert 空间 $H\subset\mathscr{F}(\Omega,\mathbb{F})$ 以 K 为再生核.

定理 1.8.6　假设 H 是 Ω 上的再生核 Hilbert 空间, 再生核为 K, 则

(K1) $K(x,y)=\langle K(\cdot,y),K(\cdot,x)\rangle=\langle k_y,k_x\rangle,\quad \forall\, x,y\in\Omega$;

(K2) $K(x,y)=K^*(y,x),\quad K(x,x)\geqslant 0,\quad \forall\, x,y\in\Omega$;

(K3) $|K(x,y)|^2\leqslant K(x,x)K(y,y),\quad \forall\, x,y\in\Omega$;

(K4) K 是 H 唯一的再生核;

(K5) K 是 Ω 上的正定函数;

(K6) 若 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 H 的标准正交系, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n g_n(x)|\leqslant K(x,x)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2\right)^{1/2},\quad \forall\,\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in l^2; \tag{1.8.3}$$

(K7) $\forall\, y\in\Omega$, 赋值泛函 $E_y:H\to\mathbb{F}, E_y(f)=f(y)$ 是有界的, 反之, 若 Hilbert 函数空间 H 上的赋值泛函 E_y 有界, 则 H 是再生核 Hilbert 空间;

(K8) $\{k_y(\cdot)=K(\cdot,y):\ y\in\Omega)\}$ 生成的线性子空间在 H 中稠密;

(K9) 若函数列 $\{f_n\}\subset H$ 弱收敛于 f, 则 $\{f_n\}$ 逐点收敛于 f; 若函数列 $\{f_n\}\subset H$ 强收敛于 f, 且 $K(x,x)$ 在 $E\subset\Omega$ 上有界, 则 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛于 f.

由定理 1.8.5 和定理 1.8.6 (K5) 知, 对于给定的集合 Ω, Ω 上的正定函数与再生核 Hilbert 空间形成一一对应. 此外, 再生核、核与正定函数也都是相互唯一确定的.

定理 1.8.7　假设 H 是 Ω 上的 Hilbert 函数空间, H_1 是 H 的闭子空间, K_1 是 H_1 的再生核, P_{H_1} 是 H 到 H_1 的正交投影算子, 则

(1) 如果 K 是 H 的再生核, 则 H_1 的再生核为 $K_1(\cdot,y)=P_{H_1}K(\cdot,y)$;

(2) 如果 K_1 是 H_1 的再生核, 则 $(P_{H_1}f)(t)=\langle f,K_1(\cdot,t)\rangle,\quad \forall\, f\in H$.

定理 1.8.8　设 H 是 Ω 上的再生核 Hilbert 空间, 再生核为 K, K 在 $E\subset\Omega$ 上的限制记为 $K|_E$, 则 $H_1=\{f|_E:\ f\in H\}$ 是以 $K|_E$ 为再生核的 Hilbert 空间.

定理 1.8.9 设 $H_i\,(i=1,2)$ 是 Ω 上的再生核 Hilbert 空间, 其再生核与范数为 K_i 和 $\|\cdot\|_i$, 则 K_1+K_2 是 $H=H_1+H_2$ 的再生核, 且 H 的范数为

$$\|f\|^2=\min\left\{\|f_1\|_1^2+\|f_2\|_2^2:\forall\, f=f_1+f_2,f_1\in H_1,f_2\in H_2\right\}. \tag{1.8.4}$$

设 K_1 与 K_2 是 $B\times B$ 上的正定函数, 如果 K_2-K_1 仍是 $B\times B$ 上的正定函数, 则记作 $K_1\prec K_2$.

定理 1.8.10 设 $H_i\,(i=1,2)$ 是 Ω 上的再生核 Hilbert 空间, 其再生核与范数为 K_i 和 $\|\cdot\|_i$.

(1) 若 $\forall x,y\in\Omega, K_1(x,y)=K_2(x,y)$, 则 $H_1=H_2$, 且 $\|f\|_1=\|f\|_2$ $(\forall\, f\in H_1=H_2)$;

(2) 若 $K_1\prec K_2$, 则 $H_1\subset H_2$, 且 $\|f\|_1\geqslant\|f\|_2$ $(\forall\, f\in H_1)$.

定理 1.8.11 设 $H_i\,(i=1,2)$ 是 Ω 上的 Hilbert 函数空间, 其范数为 $\|\cdot\|_i$. 若 K_2 是 H_2 的再生核, $H_1\subset H_2$, 且 $\|f\|_1\geqslant\|f\|_2\,(\forall\, f\in H_1)$, 则 H_1 具有再生核 K_1 使得 $K_1\prec K_2$.

定理 1.8.12 设 $H_i\,(i=1,2)$ 是 Ω 上的再生核 Hilbert 空间, 其再生核为 K_i, 则 $H=H_1\otimes H_2$ 是 $\Omega\times\Omega$ 上的再生核 Hilbert 空间, 其再生核为 $K(x_1,x_2,y_1,y_2)=K_1(x_1,y_1)K_2(x_2,y_2)$.

例 1.8.13 设 H 是 Ω 上的 n 维 Hilbert 函数空间, $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^n$ 是 H 的规范正交基, 则 H 的再生核为

$$K(x,y)=\sum_{k=1}^n\varphi_k(x)\varphi_k^*(y),\quad \forall\, x,y\in\Omega. \tag{1.8.5}$$

对任意的 $f\in H$, 有

$$f(x)=\sum_{j=1}^n a_j\varphi_j(x),\quad a_j\in\mathbb{C}. \tag{1.8.6}$$

因此,

$$\begin{aligned}\langle f(\cdot),K(\cdot,y)\rangle&=\left\langle\sum_{j=1}^n a_j\varphi_j(\cdot),\sum_{k=1}^n\varphi_k(\cdot)\varphi_k^*(y)\right\rangle\\&=\sum_{j=1}^n a_j\left\langle\varphi_j(\cdot),\sum_{k=1}^n\varphi_k(\cdot)\varphi_k^*(y)\right\rangle=\sum_{j=1}^n a_j\varphi_j(s)=f(y),\end{aligned} \tag{1.8.7}$$

故 K 为 H 的再生核.

对于无穷维再生核 Hilbert 空间, 类似的结论成立.

定理 1.8.14 设 H 是 Ω 上的再生核 Hilbert 空间, 再生核为 $K(x,y)$. 如果 $\{\varphi_s(x)\}_{s\in S}$ 是 H 的规范正交基, 则

$$K(x,y)=\sum_{s\in S}\varphi_s(x)\varphi_s^*(y),\quad \forall\, x,y\in\Omega, \tag{1.8.8}$$

式 (1.8.8) 中级数的收敛指逐点收敛.

下面考虑一些解析函数空间及其再生核.

1.8.1 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D})$

设 $\mathbb{D}$ 表示复平面的单位开圆盘, 即 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$. Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D})$ 定义为

$$H^2(\mathbb{D})=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n:\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}\in l^2(\mathbb{Z}^+),z\in\mathbb{D},\mathbb{Z}^+=\{0,1,\cdots\}\right\}. \tag{1.8.9}$$

对于任意的 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n, g(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n\in H^2(\mathbb{D})$, 其内积定义为

$$\langle f,g\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_n^*. \tag{1.8.10}$$

定理 1.8.15 Hardy 空间 $(H^2(\mathbb{D}),\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是再生核 Hilbert 空间, 其再生核为

$$K(z,w)=\sum_{n=0}^{\infty}w^{*n}z^n=\frac{1}{1-w^*z},\quad z,w\in\mathbb{D}. \tag{1.8.11}$$

通常称 $K(z,w)$ 为单位圆盘上的 Szego 核函数.

1.8.2 [0, 1] 上的 Sobolev 空间

定义

$$H_0=\left\{f:[0,1]\to\mathbb{R}:f\text{ 绝对连续},f(0)=f(1)=0,f'\in L^2([0,1])\right\}. \tag{1.8.12}$$

显然, H_0 是 $[0,1]$ 上函数的向量空间, 其内积定义为

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1f'(t)g'(t)\mathrm{d}t,\quad f,g\in H_0. \tag{1.8.13}$$

因为绝对连续函数几乎处处可微, 且 $f(0)=0$, 则对任意 $0\leqslant x\leqslant 1$, 有

$$f(x)=\int_0^xf'(t)\mathrm{d}t=\int_0^1f'(t)\,\chi_{[0,x]}(t)\mathrm{d}t. \tag{1.8.14}$$

利用 Cauchy-Schwartz 不等式可以得到

$$|f(x)| \leqslant \left(\int_0^1 f'(t)^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_0^1 \chi_{[0,x]}(t)\mathrm{d}t\right)^{1/2} = \|f\|\sqrt{x}. \tag{1.8.15}$$

式 (1.8.15) 表明赋值泛函是有界的, 且 $\|f\| = 0$ 当且仅当 $f = 0$. 此外, 易证 H_0 是完备的. 于是由定理 1.8.6 (K7) 知 H_0 是再生核 Hilbert 空间, 易验证其再生核为

$$K(x,y) = \begin{cases} (1-y)x, & x \leqslant y, \\ (1-x)y, & x > y. \end{cases} \tag{1.8.16}$$

1.8.3 Bergman 空间

设 $G \subseteq \mathbb{C}$ 是开连通区域, 令

$$B^2(G) = \left\{ f : G \to \mathbb{C} : f \text{ 在 } G \text{ 上解析}, \int_G |f(x+\mathrm{i}y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty \right\}. \tag{1.8.17}$$

引入内积

$$\langle f, g\rangle = \int_G f(x+\mathrm{i}y) g^*(x+\mathrm{i}y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad f, g \in B^2(G). \tag{1.8.18}$$

由内积确定范数

$$\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2} = \left(\int_G |f(x+\mathrm{i}y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}, \quad f \in B^2(G). \tag{1.8.19}$$

易证 $B^2(G)$ 是一个 Hilbert 空间.

定理 1.8.16 设 $G \subseteq \mathbb{C}$ 是开连通区域, 则 $B^2(G)$ 是 G 上的再生核 Hilbert 空间.

通常称 $B^2(G)$ 的再生核为从属于 G 的 Bergman 核函数. 当 $G = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 时, $B^2(\mathbb{D})$ 的 Bergman 核函数为

$$K(z,w) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1-zw^*)^2}, \quad z, w \in \mathbb{D}. \tag{1.8.20}$$

1.8.4 加权 Hardy 空间 H_β^2

设 $\mathbb{D}$ 表示复平面的单位开圆盘, $\beta = \{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ ($\beta_0 = 1, \beta_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$), 令

$$H_\beta^2 = \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n : \ \sum_{n=0}^\infty \beta_n^2 |a_n|^2 < \infty, z \in \mathbb{D} \right\}. \tag{1.8.21}$$

对于任意的 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n, g(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n\in H_\beta^2$, 定义内积

$$\langle f,g\rangle_\beta=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n^2a_nb_n^*. \tag{1.8.22}$$

由内积确定范数

$$\|f\|_\beta^2=\langle f,f\rangle_\beta=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n^2|a_n|^2,\quad f\in H_\beta^2. \tag{1.8.23}$$

易证 H_β^2 是一个 Hilbert 空间, 通常称为加权 Hardy 空间. 当 $\forall n\in\mathbb{Z}^+,\beta_n=1$ 时, H_β^2 是 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D})$; 当 $\beta=\{1/n\}$ 时, H_β^2 是 Bergman 空间 $B^2(\mathbb{D})$. 若 $\beta=\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf\beta_n^{1/n}=R<\infty$, 则 H_β^2 中的幂级数在以 R 为半径的圆盘上定义了解析函数, 且易证 H_β^2 是半径为 R 的圆盘上的再生核 Hilbert 空间, 其再生核为

$$K(z,w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^{*n}z^n}{\beta_n^2}. \tag{1.8.24}$$