

现代决策理论与实践

于英川 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

决策科学就是研究决策规律,提供决策方法来帮助人们进行有效决策的科学。本书对现代决策理论中五个应用前沿分支的理论、方法和应用进行了系统的论述,五个分支分别为多目标决策、多属性决策、博弈论、战略决策、情景规划。作者注重实际,收集了许多国内外案例,以帮助决策者从事复杂的决策。

本书可作为决策实际工作者、研究工作者和咨询工作者的参考书,也可作为高等院校管理科学专业及相关专业学生的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

现代决策理论与实践/于英川著. —北京:科学出版社,2005
(华夏英才基金学术文库)

ISBN 7-03-014569-0

I. 现… II. 于… III. 决策学 IV. C934

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 116801 号

责任编辑:李 敏 李俊峰 / 责任校对:宋玲玲
责任印制:钱玉芬 / 封面设计:黄华斌

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005 年 8 月第 一 版 开本:B5 (720×1000)

2005 年 8 月第一次印刷 印张:17

印数:1—3 000 字数:330 000

定价:37.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前 言

人类有组织的社会、经济、军事等活动总离不开决策。决策科学就是研究决策规律,提供决策方法来帮助人们进行有效决策的科学。1938年,英国 OR(operations research)小组开创了军事运筹学研究的先河,揭开了决策科学的第一页。至 20 世纪 70 年代,数学规划、搜索论、库存论、更新论、决策分析已成为人们决策的重要辅助工具,并被写入运筹学的教科书。20 世纪 80 年代以来,博弈论已成为经济学的新语言,多目标决策、多属性决策、战略决策、情景规划等决策新理论也逐渐受到人们的重视,成为应用前沿。多目标决策是单目标决策的推广,它更接近人们的日常决策,因为对一项实际活动的决策总是涉及几个追求的目标。单目标向多目标推广碰到的一个重要问题是决策者的偏好直接影响到他对各个目标重要性的看法,因而要针对每个决策者建立他本人的价值函数,进而寻求使价值最大的解。多属性决策处理的是某些目标无法量化的多目标决策问题,产生了一整套新的决策方法。博弈论在经济学领域中显示了强大威力,在组织管理中也越来越成为重要的工具。战略决策是一个组织最高的决策,具有艺术与科学双重特征,寻求各种战略逻辑,设计战略方案是组织管理的发展趋势。情景规划是战略决策的一种,是针对日益复杂、快速变化的环境而建立的一种新的分析工具,它不再沿用历史延续式的外推思路,而是建立若干个情景,针对多情景构建战略决策方案。随着应用上述五种理论工具解决问题的活动增多,人们积累的相关知识越来越多,总结和介绍相关的理论和应用经验,显得越来越重要。

作者近年来较多从事决策和咨询工作,深感建立相关的理论和应用框架,综合运用运筹学、决策科学知识创造性解决问题的重要性。针对

目前尚缺乏介绍现代决策理论及应用的著作,整理了这个领域国内外的新发展,结合自己在决策理论和应用方面的工作,写成了这本书,以期与读者共享。

本书共5章,分别为:多目标决策,多属性决策,博弈论,战略决策,情景规划。立足于现代决策的理念,保持前后呼应、逻辑一致,留有发展空间。特别重视应用,许多材料来自于近年来的科研和咨询活动。一部分材料曾在研究生教学、企业高层管理培训中使用,并根据学者意见进行了完善。

作者精心地选择材料,为使读者能较快地掌握问题本质,一些理论仅叙述成果,指明来源,不过多讲解,以免影响读者注意力。对关键内容尤其是别处难以寻觅的,则不吝笔墨,详细叙述,但仍注意简明扼要。

本书写作中,承于丽英博士大力协助,第2章主要是她的工作。阚毓伟硕士、于健硕士、高丽硕士、张守森硕士、赵静硕士和李东富也做了很多工作,在此对他们表示感谢。我还要感谢所有为我提供资料、案例的同事和学生们。

于英川

2005年6月

目 录

前言

1 多目标决策	1
1.1 引言.....	1
1.2 多目标决策问题的有效解.....	4
1.3 偏好和多目标决策问题的最优解.....	7
1.3.1 偏好.....	7
1.3.2 价值函数.....	9
1.3.3 多目标决策问题的偏好结构.....	9
1.3.4 具有价值函数的偏好结构下多目标决策问题的最优解.....	10
1.4 目标规划.....	11
1.4.1 目标与距离.....	11
1.4.2 各种目标规划模型.....	12
1.5 评分法.....	14
1.6 层次分析法(AHP).....	17
1.6.1 评分法与层次分析法.....	17
1.6.2 单排序层次分析.....	18
1.6.3 层次总排序.....	21
1.6.4 中国企业海外并购战略影响因素分析(AHP 案例分析).....	22
1.6.5 正矩阵及其特征根.....	27
1.6.6 判断矩阵的一致性.....	27
1.6.7 矩阵最大正特征根与特征向量算法.....	30
1.6.8 改进的层次分析法.....	31
2 多属性决策	34
2.1 多属性决策理论和方法的研究概况.....	34
2.1.1 关于多属性决策.....	34
2.1.2 关于群体多属性决策.....	35

2.2 多属性决策问题	36
2.2.1 模型	36
2.2.2 确定型多属性决策问题的属性转换	37
2.3 多属性决策问题的求解	40
2.3.1 确定型多属性决策问题的求解方法	40
2.3.2 不确定多属性决策问题的求解方法	44
2.4 群体多属性决策问题求解	49
2.4.1 模型和解	49
2.4.2 区间数的确定方法	50
2.4.3 排序方法	52
3 博弈论	55
3.1 引言	55
3.1.1 博弈论的内容体系	56
3.1.2 博弈论关于局中人行为的假定	57
3.2 博弈问题的模型表达	59
3.2.1 展开式博弈模型	59
3.2.2 策略式博弈模型	64
3.2.3 合作博弈	66
3.3 博弈模型的解	70
3.3.1 不合作博弈的纳什均衡解	70
3.3.2 不合作博弈均衡的存在性	74
3.3.3 合作博弈的解	79
3.4 非合作博弈模型解的计算方法	83
3.4.1 离散策略式博弈	83
3.4.2 连续策略式博弈	85
3.4.3 展开式博弈模型求均衡解——逆向归纳法(求子博弈完美均衡)	86
3.4.4 完全竞争、零和博弈及解算方法	90
3.5 竞争模型的应用	96
3.5.1 产品垄断企业的市场决策	96
3.5.2 同质产品市场双寡头同时产量决策竞争	99
3.5.3 同质产品市场两企业先后产量决策竞争	101

3.5.4 异质产品市场两企业产品价格决策	102
4 战略决策	104
4.1 引言	104
4.1.1 战略、战略决策和战略管理	104
4.1.2 战略管理历史	108
4.1.3 战略决策和战略的重要作用	113
4.2 战略决策制定方法	115
4.2.1 战略决策的特点	115
4.2.2 战略逻辑	119
4.3 战略分析	125
4.3.1 企业战略的使命与目标	126
4.3.2 外部环境分析	130
4.3.3 内部资源分析	138
4.4 战略生成	147
4.4.1 SWOT 矩阵法	147
4.4.2 驱动力法	148
4.5 各种战略生成模型	151
4.5.1 增长-份额矩阵	153
4.5.2 优势矩阵	158
4.5.3 竞争地位-市场吸引力矩阵	159
4.5.4 定向政策矩阵	163
4.5.5 生命周期战略	167
4.5.6 核心能力战略	173
4.5.7 多元化战略	175
4.5.8 母合优势战略	179
4.5.9 国际化战略	185
4.6 战略评价与选择	186
4.6.1 战略评价	186
4.6.2 战略选择	192
5 情景规划	193
5.1 引言	193

5.1.1 情景规划的产生	193
5.1.2 情景规划与传统战略方法的不同	194
5.1.3 为什么要研究情景规划? 怎样研究情景规划	195
5.2 情景规划原理和方法	196
5.2.1 情景的概念	196
5.2.2 情景规划的概念	197
5.2.3 情景构造与情景预测	200
5.2.4 情景规划详细过程	203
5.2.5 在情景规划中易犯的错误	207
5.3 情景规划中的工具	209
5.3.1 识别关键变量的结构分析方法	209
5.3.2 角色战略分析:MACTOR 方法	213
5.3.3 形态学分析方法——情景可行性筛选	222
5.3.4 降低不确定性:专家法和量化方法	224
5.3.5 最后情景的选择	228
5.4 情景规划案例介绍	228
5.4.1 壳牌公司案例	228
5.4.2 ELF 案例	233
5.4.3 法国电力部门 EDF:公共事业的未来规划	234
5.5 沿海大通道的情景规划案例	243
5.5.1 课题的提出和研究系统的界定	243
5.5.2 形势诊断和概况分析	244
5.5.3 情景构造	245
5.5.4 计量经济模型与情景预测	251
参考文献	259

1 多目标决策

1.1 引言

多目标决策是近年来出现的管理科学的一个应用性极强的分支,传统的单目标解析决策模型(如线性规划)仅假设决策对系统的一个目标有作用,这个过分简单的假设受到两方面的冲击,首先,它被认为太简单,不能反映现实世界,尤其是不能反映合作的决策过程中各方对自己利益的关心;其次,一个组织往往具有多个目标,在制定某项决策时,是否可以忽略多数目标,仅保留一个主要目标呢?这也很难做到。先看下面的例子。

例 1-1(生产计划问题) 某公司生产 5 种产品:1 号品,2 号品,3 号品,4 号品,5 号品,其中 1 号、2 号产品是品牌产品。已知:该厂生产 $i(i=1,2,\dots,5)$ 号品的生产能力是 a_i 件/小时,生产一件产品 $i(i=1,2,\dots,5)$ 可获利润 α_i 元。根据市场预测,下一季度的 i 号品的最大销售量为 $b_i(i=3,\dots,5)$ 件,公司下一季度的生产总能力为 T 小时。问:应如何安排下一季度的市场计划,使工人加班时间尽量减少,公司获得最大的利润,1 号品和 2 号品供给尽可能多。

为制定下一季度的生产计划,设该厂下一季度生产 i 号品的时间为 $x_i(i=1,2,\dots,5)$ 小时。根据所给的已知条件,我们可以把问题中希望追求的三个目标用数量关系描述如下:

因为下一季度用 x_i 小时生产 i 号品($i=1,2,\dots,5$),故公司的生产总工时为 $\sum_{i=1}^5 x_i$ 小时,工人的加班时间为 $\sum_{i=1}^5 x_i - T$ 小时。为使工人加班时间尽量地少,应要求工人加班时间 $\sum_{i=1}^5 x_i - T$ 达到最小。

下一季度该厂生产的 i 号品产量为 $a_i x_i$ 件,可获利润 $\alpha_i a_i x_i$ 元($i=1,2,\dots,5$),因而公司总利润为 $\sum_{i=1}^5 \alpha_i a_i x_i$ 元。为使该厂获得最大利润,应使总利润 $\sum_{i=1}^5 \alpha_i a_i x_i$ 达到最大。

下一季度 1 号品和 2 号品的需求量尽可能多,因此要尽可能多地生产 1 号品和 2 号品以供应市场的需要,使 $a_1 x_1 + a_2 x_2$ 达到最大。

根据实际经验,以上三个目标几乎同等重要,均不可忽略。

对于变量的约束,由题意可知,下一季度 i 号品的最大预测销售量为 $b_i(i=2,\dots,$

5)件,所以 i 号品的产量 $a_i x_i$ 不超过 b_i ($i=2, 3, \dots, n$)件,即要求有

$$a_i x_i \leq b_i \quad i = 2, 3, \dots, 5$$

为避免公司开工不足,生产总工时 $\sum_{i=1}^5 x_i$ 应不低于开工能力 T ,即

$$\sum_{i=1}^5 x_i \geq T$$

此外,生产时间应为非负,故还有

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 5$$

综合以上讨论,所考虑的生产计划问题可以归为下面具有三个目标的多目标决策问题

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \left[\sum_{i=1}^5 x_i - T \right] \\ \max \left[\sum_{i=1}^5 a_i a_i x_i \right] \\ \max (a_1 x_1 + a_2 x_2) \\ \text{s. t.} \quad b_i - a_i x_i \geq 0 \quad i = 3, \dots, 5 \\ \sum_{i=1}^5 x_i - T \geq 0 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 5 \end{array} \right.$$

例 1-2(投资决策问题) 某投资开发公司拥有总资金 A 万元,今有 $n(\geq 2)$ 个项目可供选择投资。该投资第 i ($i=1, 2, \dots, n$) 个项目要用资金 a_i 万元,预计可得到收益 b_i 万元,问:应如何决策投资方案。

一个好的投资方案应该是投资少,且收益大,这应是两个地位相同的目标。

设投资决策变量

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{投资第 } i \text{ 个项目} \\ 0, \text{不投资第 } i \text{ 个项目} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

按问题所给的条件,投资第 i ($i=1, 2, \dots, n$) 个项目的金额应为 $a_i x_i$ 万元,因而总

投资金额为 $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ 。为使投资所用的资金尽可能地小,应使 $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ 达到最小。同

时,为使获得的收益最大,又应要求 $\sum_{i=1}^n b_i x_i$ 达到最大。

此外,由于该公司的总资金为 A 万元,故要有约束条件

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq A$$

综上所述,所考虑的投资决策问题为两个目标的多目标决策问题

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^n a_i x_i \\ \max \sum_{i=1}^n b_i x_i \\ \text{s.t.} \quad A - \sum_{i=1}^n a_i x_i \geq 0 \\ x_i = 0 \text{ 或 } 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

例 1-3(投资问题) 公司有 50 万元可用于两个项目投资,第一个项目有 10% 利润,被认为风险小,第二项目有 20% 利润,被认为风险大,公司希望得到一个利润与风险折中的方案,另外,由于各种原因,公司希望对第一项至少投资 10 万元。

令 x_1 为项目 1 的投资额(单位:万元), x_2 为项目 2 的投资额(单位:万元),约束条件为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 50 \\ x_1 \geq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

第一个目标为利润

$$z_1 = 0.1x_1 + 0.2x_2$$

第二个目标是风险小,定义一种安全度

$$z_2 = x_1 - x_2$$

即投资第二项目多,则安全值差,反之,投资第一项目多,安全值高。因而第二个目标被转换为安全度。

总结问题,得模型

$$\begin{cases} \max z_1 = 0.1x_1 + 0.2x_2 \\ \max z_2 = x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \leq 50 \\ x_1 \geq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

上面的三个例子都是多目标决策问题。具有 n 个变量, m 个约束条件和 p 个目标的多目标决策的标准形式为

$$\begin{cases} \max f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) \\ \text{s.t.} \quad x \in X \end{cases}$$

其中 $p \geq 2$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$, X 是可行解集合,其中一种表达为 $X = \{x \mid g_i(x) \leq 0\}$, $g_i(x) \leq 0$ 称为约束条件($i = 1, 2, \dots, m$)。

其实,在实际经济活动中,多目标问题是经常碰到的。如一个国家的整个国民经济就是一个复杂的大系统,而这个大系统的活动就是一个多目标的,作为这个大

系统的每个子系统,如各地方、各部门、各企业,其经济活动也都是多目标活动,因此当研究大系统,如社会经济综合效益问题或者和谐社会规划问题时,就具有多目标的特点。

多目标决策问题的共同特点是:

(1) 目标之间的不可公度性

目标之间的不可公度性,是指各个目标没有统一的衡量标准,因而很难进行比较。例如外贸出口商品中,数量有各种计量,如台、吨、件等,商品质量又有合格率等,数量与质量间无公共度量。

(2) 目标之间的冲突性

大部分目标决策问题存在着冲突。即如果采用这 1 种方案去改进某一目标的值,很可能会使另一目标的值变差。如建水库大坝,若提高发电量,就要增加水头高度,增加坝高,但是这就会增加成本,提高投资。

1.2 多目标决策问题的有效解

由于上节总结的多目标决策问题的特征,单目标决策问题解的概念已不适用,本节主要建立多目标决策问题解的概念,下面我们通过例 1-3 来展开讨论。

几何讨论如图 1-1、图 1-2。将问题的可行解域表示在平面上(决策空间),可行解域 X 是三角形阴影区,可行解域 X 中每一个点表示一个决策 (x_1, x_2) ,它对应有两个目标值 (z_1, z_2) ,例如 $(x_1, x_2) = (30, 20)$ 对应 $(z_1, z_2) = (7, 10)$,我们在 $z_1 - z_2$ 平面(目标空间)上表示出对应的决策 (x_1, x_2) 的目标区域,也是一个三角形区 C 。

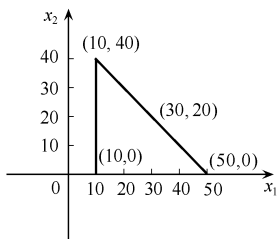


图 1-1 决策空间

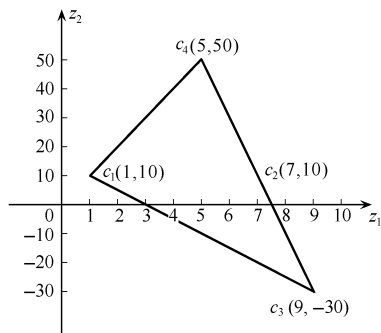


图 1-2 目标空间

对于一个多目标决策问题

$$\begin{cases} \max f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) \\ \text{s.t. } x \in X \end{cases}$$

记决策空间为 $X = \{x \mid g_i(x) \geq 0, i=1, 2, \dots, m\}$, 目标空间为

$$Z = \{(z_1, z_2, \dots, z_p) \mid z_k = f_k(x), k=1, 2, \dots, p\}$$

在研究解的可行性时,我们往往注意于决策空间,在研究解的优劣时则利用目标空间,涉及决策的比较,我们引进两个基本概念:优于和有效解。

因为 $c_1 = (5, 50)$ 的两个坐标分别大于 $c_1 = (1, 10)$ 两个坐标,我们可以说 c_1 优于 c_1 。 $c_2 = (7, 10)$ 的第一个坐标大于 $c_1 = (1, 10)$ 的第一个坐标,而它们第二个坐标相同,我们也称 c_2 优于 c_1 。

但是,我们找不到一个可行解的目标是优于 $c_2 = (7, 10)$, c_1 也是同样情况。

定义 1-1 两个可行解 $x^1, x^2 \in X$ 有 $z_k(x^1) \geq z_k(x^2), k=1, 2, \dots, p$, 且至少存在一个绝对不等式,则称 x^1 优于 x^2 。一个可行解 x 若满足下面的性质则称为有效解或非劣解:不存在任何一个可行解优于它,即不存在 $\bar{x} \in X$ 满足 $z_k(\bar{x}) \geq z_k(x), k=1, 2, \dots, p$, 且至少有一个绝对不等式存在。

有效解或非劣解实质上是淘汰劣解后剩下的可行解,可作为决策选择的基础。

对线性问题

$$\text{(VMP)} \begin{cases} \max C^k X & k=1, 2, \dots, p \\ \text{s.t. } AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

可以给出一些求有效解的方法。

首先定义具体化,若 X, Y 为 VMP 的两个可行解, $C^k X \geq C^k Y$, 对所有 $k=1, 2, \dots, p$ 成立,而 $C^k X > C^k Y$ 对某些 k (至少一个) 成立,根据定义 1-1 则称 X “优于” Y 。

若 X^* 是可行解,不存在可行解 X 使 $C^k X \geq C^k X^*, k=1, 2, \dots, p$, 且 $C^k X > C^k X^*$ 对某些 k (至少一个) 成立,则 X^* 是有效解。

设 X 是一个可行解,如何判定 X 是否有效解呢?

建立下面线性规划问题(LP)模型

$$\text{LP}(X) \begin{cases} \max \sum_{k=1}^p C^k X \\ \text{s.t. } C^k X \geq C^k X \\ AX \leq b \\ X \geq 0 & k=1, 2, \dots, p \end{cases}$$

判断法则:若 $LP(X)$ 的最优解是 X , 则 X 是有效解; 否则 X 不是有效解, 而若 $LP(X)$ 之最优解是 $Y (Y \neq X)$, 则 Y 是另一个有效解。此法则可用对偶理论证明之, 这里略去。

例 1-4 已知一个多目标决策问题(VMP)

$$(VMP) \left\{ \begin{array}{l} \max z_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ \max z_2 = -x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \max z_3 = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ \quad \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ \quad \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

设 $X=(2,0,0)$, 则构造模型

$$LP(2,0,0) \left\{ \begin{array}{l} \max z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad -x_1 + x_2 - x_3 \leq -2 \\ \quad \quad x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 \\ \quad \quad -2x_1 - x_2 - x_3 \leq -4 \\ \quad \quad x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ \quad \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ \quad \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

应用判断法则时, 可以求解 $LP(2,0,0)$, 也可利用互补性条件检查 $X=(2,0,0)$ 是否最优解, 现利用后者先写出对偶规划(DP)

$$(DP) \left\{ \begin{array}{l} \min w = -2v_1 + 2v_2 - 4v_3 + 5y_1 + 4y_2 \\ \text{s.t.} \quad -v_1 + v_2 - 2v_3 + y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ \quad \quad v_1 + 2v_2 - v_3 + 3y_1 + y_2 \geq -2 \\ \quad \quad -v_1 - v_2 - v_3 + y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ \quad \quad v_1, v_2, v_3, y_1, y_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

在 $X=(2,0,0)$ 处互补条件为

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 < 5 \rightarrow y_1 = 0 \\ x_1 = 2 > 0 \rightarrow -v_1 + v_2 - 2v_3 + y_1 + 2y_2 = 2 \end{array} \right\} \rightarrow -v_1 + v_2 - 2v_3 + 2y_2 = 2$$

同理简化另两个条件。

满足互补性条件的 $v_1, v_2, v_3, y_2, y_1=0, t_1=0, t_2, t_3$ 为下面方程组的非负解 (t_i 为过剩变量)

$$\begin{cases} -v_1 + v_2 - 2v_3 + 2y_2 = 2 \\ v_1 + 2v_2 - v_3 + y_2 - t_2 = -2 \\ -v_1 - v_2 - v_3 + 2y_2 - t_3 = 3 \end{cases}$$

这可用线性规划的两阶段法求之,得非负解 $(v_1, v_2, v_3) = (0, 0, 1)$, $(y_1, y_2) = (0, 2)$, 互补性条件成立, 因此 $X = (2, 0, 0)$ 是有效解。

又取 $X = \left[0, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right]$, 则使用互补条件得之, 方程组无非负解, 又 $LP^* \left[0, 1\frac{1}{5}, 1\frac{2}{5}\right]$ 的最优解为 $\left[3, 1\frac{1}{5}, 1\frac{2}{5}\right]$, 它优于 X , X 不是有效解, 此 $\left[\frac{3}{5}, 1\frac{1}{5}, 1\frac{2}{5}\right]$ 是有效解。

1.3 偏好和多目标决策问题的最优解

对于一个多目标决策问题, 排除了劣解, 我们得到了一个非劣解的集合, 一般讲该集合不止一个元素, 或者说非劣解不只是一个, 有时还会很多。就我们的原有知识我们不能再划分非劣解之间的优劣, 而从每个决策者的角度来看, 他对目标间的重要性有自己的看法, 而这种看法因决策者不同而异, 这说明决策者判断“最优”的依据除去“非理性”外还有其他的内容, 但这个内容不是共同的。我们用“偏好”来表达决策者关于“最优”的判断。本节将从理论上研究“偏好”等概念。

1.3.1 偏好

对于两个候选决策方案(即决策空间的两个点) x^1 和 x^2 的目标点 z^1 和 z^2 (目标空间), 一个决策者会有下面的认识中的一种:

- ① z^1 比 z^2 好, 记为 $z^1 > z^2$;
- ② z^2 比 z^1 好, 记为 $z^1 < z^2$;
- ③ z^1 和 z^2 无差别, 即同等重要, 记为 $z^1 \sim z^2$;
- ④ 无法得出上面三种判断, 或说无法比较, 即 $z^1 ? z^2$ 。

一个决策者对目标空间 Z 中任何两个均有确定认识, 即“ $>$ ”、“ $<$ ”、“ $\sim$ ”、“ $?$ ”, 这就决定了 Z 上的一个偏好。

例 1-5 某公司准备提升一位部门经理, 由人事部门对三个候选人就能力、合作精神、进取心进行评优, 给出了分数, 如表 1-1。

表 1-1 候选人评分表

得分	候选人 1(z^1)	候选人 2(z^2)	候选人 3(z^3)
能力	7	8	9
合作	8	9	7
进取	9	7	8

该公司总裁在选拔干部时,注意特长,他喜欢在某一方面比别人分数高的人,当某人一项指标高过另一人 2 分,他就认为前者好,因此他的看法是

$$z^1 > z^2 \quad z^2 > z^3 \quad z^3 > z^1$$

但是依他的看法,无法在三人中选择他认为最好的。

该公司副总裁则注意合作精神和进取心,他认为这两项评分之和高者是优秀人才,因此他的看法是

$$z^1 > z^2 \quad z^2 > z^3 \quad z^1 > z^3$$

依他的看法,第一候选人可当部门经理。

由这个例子可知,每个人有不同的偏好,从而可能产生不同的选择,但不一定能有一个确定的“最优”选择。

定义 1-2 ① X 上建立在“ $>$ ”、“ $<$ ”、“ $\sim$ ”、“ $?$ ”的偏好指的是 $Z \times Z$ 的子集:
 $\{>\} = \{(z^1, z^2) \mid z^1 > z^2\}, \{<\} = \{(z^1, z^2) \mid z^1 < z^2\}, \{\sim\} = \{(z^1, z^2) \mid z^1 \sim z^2\},$
 $\{?\} = \{(z^1, z^2) \mid z^1 ? z^2\}。$

② 为方便,令 $\{\geq\} = \{>\} \cup \{\sim\}, \{\leq\} = \{<\} \cup \{\sim\}, \{>?\} = \{>\} \cup \{?\},$
 $\{<?\} = \{<\} \cup \{?\}。$

③ 称上述偏好集合全体组成 Z 上的一个偏好结构 $P(\{>\}, \{\sim\}, \{?\})。$ (注:
 $\{>\}$ 与 $\{<\}$ 是对称的,仅写一个)

例 1-5 中总裁的偏好结构 $P(\{>\}, \{\sim\}, \{?\})$ 为

$$\begin{aligned} \{>\} &= \{(z^1, z^2), (z^2, z^3), (z^3, z^1)\} \\ \{<\} &= \{(z^2, z^1), (z^3, z^2), (z^1, z^3)\} \\ \{\sim\} &= \{(z^1, z^1), (z^2, z^2), (z^3, z^3)\} \\ \{?\} &= \emptyset \end{aligned}$$

副总裁的偏好结构 $P(\{>\}, \{\sim\}, \{?\})$ 为

$$\begin{aligned} \{>\} &= \{(z^1, z^2), (z^2, z^3), (z^1, z^3)\} \\ \{<\} &= \{(z^2, z^1), (z^3, z^2), (z^3, z^1)\} \\ \{\sim\} &= \{(z^1, z^1), (z^2, z^2), (z^3, z^3)\} \\ \{?\} &= \emptyset \end{aligned}$$

例 1-6(Pareto 偏好) 在求有效解时,实际上是用了一个人们普遍接受的偏好结构——Pareto 偏好。

$z^1 \succ z^2 \Leftrightarrow z_i^1 \succcurlyeq z_i^2, i=1,2,\dots,p, z^1 \neq z^2$, 因此有

$$\{\succ\} = \{(z^1, z^2) \mid z_i^1 \succcurlyeq z_i^2, i=1,2,\dots,p, z^1 \neq z^2\}$$

$$\{\sim\} = \{(z, z) \mid z \in Z\}$$

$$\{?\} = \{(z^1, z^2) \mid z^1 \text{ 有些目标优于 } z^2, z^2 \text{ 有些目标优于 } z^1\}$$

例 1-6 给出的偏好人们普遍接受, 又称为自然偏好, 这种结构下不能确定满足决策者偏好的“最优”解。实际上并不是任何偏好结构下, 均能找到决策者最喜欢的解。下面将讨论一类可以求得决策者最优解的偏好结构。

1.3.2 价值函数

定义 1-3 设 Z 是目标空间, $P(\{\succ\}, \{\sim\}, \{?\})$ 是 Z 上定义的一个偏好结构, 如果存在一个函数 $U: Z \rightarrow R^1$, 满足: $z^1, z^2 \in Z, z^1 \succ z^2 \Leftrightarrow U(z^1) > U(z^2); z^1 \sim z^2 \Leftrightarrow U(z^1) = U(z^2)$, 则称 $U(z)$ 是价值函数。

并不是每个偏好结构均可用价值函数表示, 例如 Pateto 偏好结构和字典序偏好结构就不能用价值函数表示。

定理 1-1 若 Z 上偏好结构 $P(\{\succ\}, \{\sim\}, \{?\})$ 存在价值函数, 则

① $\{?\} = \emptyset$;

② $\{\succ\}$ 和 $\{\succcurlyeq\}$ 是可传递的。

Pateto 偏好结构中, $\{?\} \neq \emptyset$, 因而不存在价值函数。这就是有效解不能直接选出最优解的理论证明。

以上是存在价值函数的必要条件。我们这里介绍价值函数存在的两个充分条件。

定理 1-2 设 P 是 Z 上的偏好结构, 则存在一个表示 P 的价值函数 $U(\cdot)$ 的必要条件是:

① P 在 Z 是弱序: $\{?\} = \emptyset, \{\succ\}$ 或 $\{\succcurlyeq\}$ 是传递的;

② 设 $\tilde{Z}$ 是 Z 上关于 P 的无差别集形成的等价类, 则存在一个在 $\tilde{Z}$ 中可数集合关于等价类的“ $>$ ”关系稠密。

定理 1-3 设 Z 是 R_p 中的长方体, 设

① 偏好结构是弱序的;

② $z^1 \succcurlyeq z^2$ (向量不等式) $\Rightarrow z^1 \succ z^2$;

③ $z^1 \succ z^2, z^2 \succ z^3 \Rightarrow$ 存在 $a, b \in (0, 1)$ 使 $az^1 + (1-a)z^3 \succ z^2, z^2 \succ bz^1 + (1-b)z^3$, 则存在一个表达 P 的价值函数 $U(\cdot)$ 。存在价值函数的偏好结构有可能求最优解。

1.3.3 多目标决策问题的偏好结构

回到本章的例题 1-3, 决策者可以在共识基础上, 根据自己的偏好结构选取一

个“最优”的有效解。我们可以设想这个偏好结构中,无差别的解(目标空间)组成不相交的无差别曲线族[图 1-3(a)]。在一条无差别曲线上,任何两个点对于决策者都是同等重要的, $A(11.2, -22.5)$, $B(9.2, -12.5)$, 前者利润高,安全度差,后者利润低些,安全度却好些,决策者认为两者接受程度相同。这里决策者为改善某些目标值要放弃另外一些目标值的数值,表现了决策者主观上在各目标上的折中原则,例如,从 $C(8.8, -10.0)$ 出发,他希望提高利润,愿意放弃一些安全度,可选到 $A(11.2, -22.5)$, 如果相反,他可以选 $D(7.8, 0)$, 这些点全在决策者的一条无差别曲线上。决策者当然希望决策点位于一条自己最喜欢的无差别曲线上,考虑到可行性,根据微积分原理,我们可以断定:

无差别曲线族与有效解集直线的切点就是这个决策者的最优解[见图 1-3(b)]。

例 1-3 中决策者的最优解就是图 1-3(b)的 C^* 。

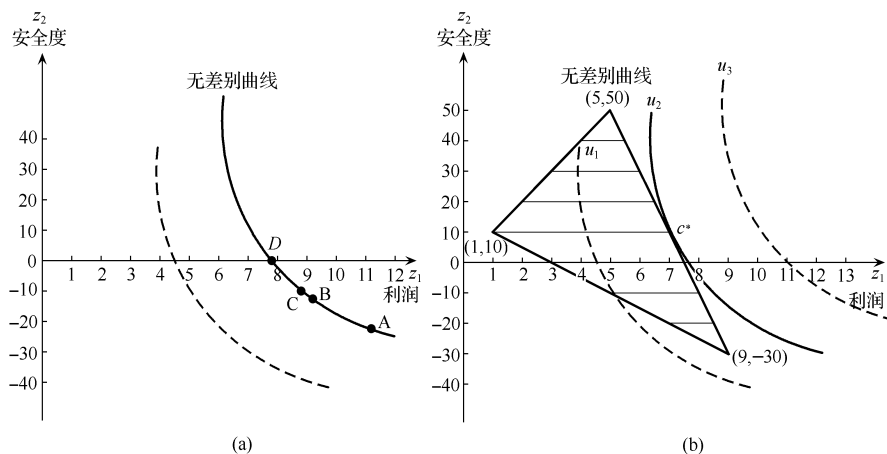


图 1-3 无差别曲线图

1.3.4 具有价值函数的偏好结构下多目标决策问题的最优解

无差别曲线可看作是决策者价值函数 $u = u(z_1, z_2, \dots, z_p)$ 的等值线。每条无差别曲线对应价值函数的一个数值,决策者希望的决策点应位于价值最高的一条无差别曲线上。图 1-3(b)中即为无差别曲线 u_2 上的 $c^*(F, 10)$ (u_2 与有效解集的切点)。它对应决策空间的解 $(x_1^*, x_2^*) = (30, 20)$, 即 30 万元投在项目 1, 而 20 万

元投在项目 2。一般讲,令 $z_1(x), z_2(x), \dots, z_p(x)$ 是多目标决策问题的 P 个目标, $u = u(z_1(x), z_2(x), \dots, z_p(x))$ 为决策者的价值函数, Z 为决策可行解集合, 则价值函数型多目标决策问题模型为

$$\begin{cases} \max u = u(z_1(x), z_2(x), \dots, z_p(x)) \\ \text{s.t. } x \in X \end{cases}$$

这里追求的是价值最大。这样,多目标决策问题在加进决策者价值函数后就变为单目标决策问题了。但是如何确定决策者偏好,如何确定价值函数,如何求对应的最优解呢?

下面两节将介绍两类常用的价值函数及“最优解”求法。

1.4 目标规划

1.4.1 目标与距离

一种常用的价值函数是与理想点 z^* 的广义距离函数 $u(\cdot, \cdot) = d(z, z^*)$, 本节介绍在这种价值函数下求解的方法——目标规划。

设决策者有一个理想点 $z^* \in R^p$, 不妨假定 z^* 对应决策变量 x^* 不可行, 决策者的无差别曲线就是与 z^* 等距的曲线族: $d(z, z^*) = h, -\infty < h < +\infty$ 。在现实问题中 $d(z, z^*)$ 有若干种定义

$$r = p \quad d_r = \left[\sum_{k=1}^p |z_k - z_k^*|^r \right]^{\frac{1}{r}}$$

$$r = 1 \quad d_1 = \sum_{k=1}^p |z_k - z_k^*|$$

$$r = 2 \quad d_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^p (z_k - z_k^*)^2}$$

$$r = \infty \quad d_\infty = \max_{k=1,2,\dots,p} \{|z_k - z_k^*|\}$$

还有其他的一些距离,我们将通过例题来讨论。在上述距离定义中,都有绝对值符号,使计算不方便,我们引入正、负偏差来处理。

定义 1-4 设 z^* 是理想点,称

$$d_k^+ = \begin{cases} z_k - z_k^* & z_k - z_k^* > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

为 z_k 关于 z_k^* 的正偏差(超过值);称

$$\bar{d}_k = \begin{cases} z_k^* - z_k & z_k^* - z_k > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

为 z_k 关于 z_k^* 的负偏差(不足值)。

由定义知:

$$\textcircled{1} \quad d_k^+, d_k^- \geq 0;$$

$$\textcircled{2} \quad d_k^+ \cdot d_k^- = 0;$$

$$\textcircled{3} \quad z_k^* - z_k = d_k^- - d_k^+;$$

$$\textcircled{4} \quad |z_k^* - z_k| = d_k^- + d_k^+.$$

反之,满足 $\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}\textcircled{4}$ 之 d_k^+, d_k^- 就是定义中正负偏差。由此,有

$$d_1 = \sum_{k=1}^p (d_k^+ + d_k^-)$$

$$d_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^p [(d_k^+)^2 + (d_k^-)^2]}$$

$$d_\infty = \max_{k=1,2,\dots,p} \{(d_k^+ + d_k^-)\}$$

使距离 d 最小的规划模型就是求决策者“最优解”的模型,此称为目标规划模型。

一般目标规划为

$$\begin{cases} \min d \\ \text{s.t.} & z_k - z_k^* = d_k^- + d_k^+ \\ & x \in X \quad k = 1, 2, \dots, p \end{cases}$$

取价值函数分别为 d_1, d_2, d_∞ 就有各种目标规划,而且只要 $z_k^* \geq z_k(x), x \in X, k=1, 2, \dots, p$, 其最优解就是有效解(这个充分条件的定理的证明略)。

在一般术语中, $z_k(\cdot)$ 是目标, 而 $z^* = (z_k(x^*), k=1, 2, \dots, p)$ 是确定的一组目标值, 称为目的(goal), 应该称目的规划更恰当。由于习惯关系, 本章仍从众称为目标规划。

1.4.2 各种目标规划模型

例 1-7 $r=1$

$$\begin{cases} \min d_1(z, z^*) \\ \text{s.t.} & x \in X \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \min \sum_{k=1}^{\infty} (d_k^+ + d_k^-) \\ \text{s.t.} & z_k(x) - d_k^+ + d_k^- = z_k^* \quad k = 1, 2, \dots, p \\ & x \in X \quad d_k^+, d_k^- \geq 0 \quad d_k^+ \cdot d_k^- = 0 \end{cases}$$

在例 1-3 中令 $z^* = (9, 15)$, 则有

$$\left\{ \begin{array}{l} \min (d_1^+ + d_1^-) + (d_2^+ + d_2^-) \\ \text{s.t.} \quad 0.1x_1 + 0.2x_2 - d_1^+ + d_1^- = 9 \\ \quad \quad x_1 - x_2 - d_2^+ + d_2^- = 15 \\ \quad \quad x_1 + x_2 \leq 50 \\ \quad \quad x_1 \geq 10 \\ \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \quad d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \geq 0 \end{array} \right.$$

得 $\bar{x} = (32.5, 17.5)$ $d_p^+ = 0$ $d_p^- = 5.75$ $d_s^+ = 0$ $d_s^- = 0$ $d^* = 5.75$

(注:使用单纯形算法, $d_1^+ \cdot d_2^- = 0$ 自然可保证。)

例 1-8 $r = \infty$

$$\left\{ \begin{array}{l} \min d_\infty(z, z^*) \\ \text{s.t.} \quad x \in X \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \min \max_{k=1,2,\dots,p} \{(d_k^+ + d_k^-)\} \\ \text{s.t.} \quad z_k(x) - d_k^+ + d_k^- = z_k^* \\ \quad \quad k = 1, 2, \dots, p \\ \quad \quad x \in X \quad d_k^+ \cdot d_k^- = 0 \end{array} \right.$$

仍取用例 1-3, $z^* = (9, 15)$, 则有

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \max \{(d_1^+ + d_1^-), (d_2^+ + d_2^-)\} \\ \text{s.t.} \quad 0.1x_1 + 0.2x_2 - d_1^+ + d_1^- = 9 \\ \quad \quad x_1 - x_2 - d_2^+ + d_2^- = 15 \\ \quad \quad x_1 + x_2 \leq 50 \\ \quad \quad x_1 \geq 10 \\ \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \quad d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \geq 0 \end{array} \right.$$

引入 $\eta = \max \{(d_1^+ + d_1^-), (d_2^+ + d_2^-)\}$, 有

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \eta \\ \text{s.t.} \quad d_1^+ + d_1^- \leq \eta \\ \quad \quad d_2^+ + d_2^- \leq \eta \\ \quad \quad 0.1x_1 + 0.2x_2 - d_1^+ + d_1^- = 9 \\ \quad \quad x_1 - x_2 - d_2^+ + d_2^- = 15 \\ \quad \quad x_1 + x_2 \leq 5 \\ \quad \quad x_1 \geq 10 \\ \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \quad d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{得} \quad x_1^* &= 35.2 & x_2^* &= 14.7 & d_1^+ &= 0 & d_1^- &= 5.48 & d_2^+ &= 5.48 & d_2^- &= 0 \\ \eta^* &= 5.476 \ 190 \end{aligned}$$

例 1-9 决策者希望安全度若比 15 小,则尽量接近 15,若超过 15,则多少均无差别。同样要求利润如此,若比 9 小,则尽量接近 9;若超过 9,则多少均无差别。这实际上是希望不足值最小,因此有

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad d_1^- + d_2^- \\ \text{s.t.} \quad 0.1x_1 + 0.2x_2 - d_1^+ + d_1^- = 9 \\ \quad \quad x_1 - x_2 - d_2^+ + d_2^- = 15 \\ \quad \quad x_1 + x_2 \leq 50 \\ \quad \quad x_1 \geq 10 \\ \quad \quad x_1, x_2, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \geq 0 \end{array} \right.$$

得

$$\bar{x}_1 = 50 \quad \bar{x}_2 = 0 \quad d_1^+ = 0 \quad d_1^- = 4 \quad d_2^+ = 35 \quad d_2^- = 0 \quad d_1^- + d_2^- = 4$$

当决策者对与各目标偏差有不同看重,可用权重来定。例如, $\min \sum w_k (d_k^+ + d_k^-)$ 或 $\min \sum w_k d_k^-$, 其中 $w_k > 0$, 称为第 k 个权重 $k = 1, 2, \dots, p$ 。

另外,还有不同等级的目标规划。若决策者对于各目标偏差的重视不是同级别,而用权重已不可能(相当于 $1/\infty$)表示,那么可以分层次即利用字典序排列目标,即当第一个目标取最优后,再在其保持最优情况下取第二层目标最优。这里不再细述。

1.5 评 分 法

确定决策者价值函数是一件困难的事情,我们可以用一些已知函数去近似地表示它们,除了距离函数外,最简单的一种是假定 u 是线性函数,即 $u = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \dots + w_p z_p$, 其中 $w_1, \dots, w_p > 0$ 称为权重因子,这样就化为一种单目标问题

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{k=1}^p w_k z_k(x) \\ \text{s.t.} \quad x \in X \end{array} \right.$$

对线性问题(线性目标,线性约束)

$$(\text{MLP}) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad z_k = c^k x \quad k = 1, 2, \dots, p \\ \text{s.t.} \quad Ax \leq b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right.$$

我们将求解权重模型记为

$$\text{WLP} \begin{cases} \max \sum_{k=1}^p w_k c^k x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & X \geq 0 \end{cases}$$

例 1-10 某公司有 A, B, C 三种产品, 利用两种资源, 数据如下表。

	A	B	C	总量
I	7	5	6	250
II	6	9	5	210
价格系数	1	0.8	0.9	
产 量	1	1	1	
外销总量	0.4	0.6	0.2	

设 x_1, x_2, x_3 分别为 A, B, C 产品的计划生产量, 得模型

$$\begin{cases} \max z_1 = x_1 + 0.8x_2 + 0.9x_3 \\ \max z_2 = x_1 + x_2 + x_3 \\ \max z_3 = 0.4x_1 + 0.6x_2 + 0.2x_3 \\ \text{s.t.} & 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 250 \\ & 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 \leq 210 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

这个问题实际背景可设想为: z_1 是销售部主任的目标, z_2 是生产部主任的目标, z_3 是外贸部主任的目标。这些目标往往产生冲突, 即不会有一个使每个目标函数值均最大的可行解。总经理权衡各目标比重, 定出权重因子 $w_1=10, w_2=1, w_3=5$, 得到价值函数 $u=10z_1+z_2+5z_3=13x_1+12x_2+11x_3$, 就有

$$\text{LP}(w) \begin{cases} \max u = 13x_1 + 12x_2 + 11x_3 \\ \text{s.t.} & 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 250 \\ & 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 \leq 210 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

求解得 $x^*=(10, 0, 30), u^*=460$ 。而各单目标最优解分别为

$$x_1 = (0, 0.35, 41.3) \quad z_1 = 37.5$$

$$x_2 = x_1 \quad z_2 = 41.7$$

$$x_3 = (0, 23.3, 0) \quad z_3 = 14$$

它们是不同的, 仅代表局部选择, 总体价值函数最大者是前者。

定理 1-4 设 x 是线性多目标问题

$$\begin{cases} \max z_k = c^k x & k = 1, 2, \dots, p \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

的有效解 $\Leftrightarrow$ 存在 $W > 0$ 使 x 为线性加权问题 $LP(w_1, w_2, \dots, w_p)$ 的最优解。

证明 先证“ $\leftarrow$ ”。设存在 $w_1, \dots, w_p > 0, \bar{x}$ 是

$$\begin{cases} \max \sum_{k=1}^p w_k c^k x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

的最优解。设 $\bar{x}$ 不是有效解, 则存在 x^* 有 $c^k x^* \geq c^k \bar{x}, k=1, 2, \dots, p$, 且 $c^k x^* > c^k \bar{x}$ 对某些 k 成立, 各不等式两边乘 $w_k (> 0)$, 然后相加, 有 $\sum_{k=1}^p w_k c^k x^* > \sum_{k=1}^p w_k c^k \bar{x}$, 即 $\bar{x}$ 不是 $LP(w_1, w_2, \dots, w_p)$ 最优解, 这与前面的证明矛盾, 故 $\bar{x}$ 一定是有效解。

再证“ $\rightarrow$ ”。设 $\bar{x}$ 为有效解, 知 $\bar{x}$ 为上节(1.2)判断法则中 $LP(\bar{x})$ 之最优解。建立 $LP(\bar{x})$, 则 $\bar{x}$ 为 $LP(\bar{x})$ 的最优解。经过模型标准化处理, 采用约束 $-c^k x \leq -c^k \bar{x}$ 和 $-c^p x \leq -c^p \bar{x}, LP(\bar{x})$ 如下

$$LP(\bar{x}) \begin{cases} \max \sum_{k=1}^p c^k x \\ \text{s.t.} & -c^k x \leq -c^k \bar{x} \\ & -c^p x \leq -c^p \bar{x} \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

写出 $LP(\bar{x})$ 的对偶规划

$$(DP) \begin{cases} \min w = - \sum_{k=1}^p v_k c^k x + \sum_{i=1}^m y_i b_i \\ \text{s.t.} & - \sum_{k=1}^p v_k c_{kj} + \sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \geq \sum_{k=1}^p c_{kj} & j = 1, 2, \dots, n \\ & v_k \geq 0, y_i \geq 0 & i = 1, 2, \dots, m \quad k = 1, 2, \dots, p \end{cases}$$

依强对偶定理, 存在 v, y 为 (DP) 的最优解, 且

$$\sum_{k=1}^p c^k \bar{x} = - \sum_{k=1}^p v_k c^k \bar{x} + \sum_{i=1}^m y_i b_i$$

(DP) 的约束可写为

$$\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \geq \sum_{k=1}^p (1 + v_k) c_{kj} \quad y_i \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1-1)$$

令 $\bar{w}_k = 1 + \bar{v}_k \geq 1 > 0, k=1, 2, \dots, p$ 。知 y 是权重 w 模型 WLP 的对偶问题 WDP 的

可行解

$$\text{WDP} \begin{cases} \min \sum_{i=1}^m y_i b_i \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \geq \sum_{k=1}^p w_k c_{kj} \\ y_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad \text{WLP} \begin{cases} \max \sum_{k=1}^p w_k c^k x \\ \text{s.t.} \quad Ax \leq v \\ x \geq 0 \end{cases}$$

因为

$$\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \geq \sum_{k=1}^p w_k c_{kj} y_i \quad j = 1, 2, \dots, n$$

而且 $\bar{x}$ 问题 WLP, 由式(1-1)得, $\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} = \sum_{k=1}^p w_k c_{kj} \bar{x}$, 故 $\bar{x}$ 为 WLP 的最优解, 证毕。

推论 任取 $\bar{x}$ 为可行解, 解 $\text{LP}(\bar{x})$ 若最优解为 $\bar{x}$, 其对应前 k 个目标约束的影子价格为 v , 权重因子 $w=1+v$ 。

若最优解为 $x^* \neq \bar{x}$, 则 x^* 为有效解, 权重因子为 $w_k=1, k=1, 2, \dots, p$ 。

这个定理不只保证权重法求出的最优解一定为有效解, 也反过来提出一种确定有效解的权重因子的方法。

1.6 层次分析法(AHP)

1.6.1 评分法与层次分析法

当多目标决策问题的可行解集不是多目标规划问题的可行解集 $X=\{x \mid g_i(x) \leq 0, i=1, \dots, m\}$, 而各目标表达也不是解析式时, 上节介绍的方法就无法使用。本节介绍的层次分析法却突破了这两项限制, 大大拓展了评分法的应用。

层次分析法(the analytic hierarchy process, AHP)是多目标决策的一个分支, 它有着较深的数学原理。但掌握 AHP 的基本步骤, 运用它进行决策分析, 并不需要高深的数学工具和复杂的运算手段, 高中文化程度的人就可运用 AHP。层次分析主要功能是把定性因素定量化处理。这一方法目前已广泛运用在资源分配、企业管理、冲突分析、经济计划、政策评价等各个领域。对于处理和分析许多社会经济中的问题, AHP 更具有独到之处, 受到多数决策者的青睐。

层次分析法是美国匹兹堡大学 T. L. Saaty 教授于 20 世纪 70 年代提出的。1971 年 Saaty 曾为美国国防部研究“应急计划”, 1972 年又为美国科学基金会研究电力在工业部门的分配问题, 1973 年为苏丹政府研究苏丹运输问题。总结各项工作, 他认识到, 必须把人们的决策思维过程规范化, 即把人们决策思维的分解、判

断、综合统一于一个数学模式之中。这就形成了 AHP 的理论核心。1972 年和 1975 年内部出版了《用于排序和计划的特征根分配模型》和《层次和排序——特征根分析》，1977 年他在第一届国际数学建模会议上发表了《无结构决策问题的建模——层次分析理论》，引起人们对 AHP 的注意，并且广泛应用于各个领域。层次分析法介绍到我国后，已在许多领域得到应用，并且展开了对 AHP 的基本理论的研究。

目前 T.L.Saaty 已推出 Windows 系统下计算软件“EXPERT CHOICE”，使得应用 AHP 更方便了。

1.6.2 单排序层次分析

设价值函数为

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m$$

其中， x_j ——第 j 个目标变量， $j=1,2,\cdots,m$ ；

α_j ——第 j 个目标的权重， $j=1,2,\cdots,m$ ；

u ——价值函数。

又设有 n 个方案， $P_1, P_2, \cdots, P_n$ ，每个方案的分向量

$$X_i = (x_1^i, x_2^i, \cdots, x_m^i) \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

见图 1-4、图 1-5 所示。如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是已知的，则简单计算就得到最佳方案 $X^* = \arg \max_{X_i} \{ \alpha_1 x_1^i + \alpha_2 x_2^i + \cdots + \alpha_m x_m^i \}$ 。此符号表示 X^* 是方案 X_1 ，

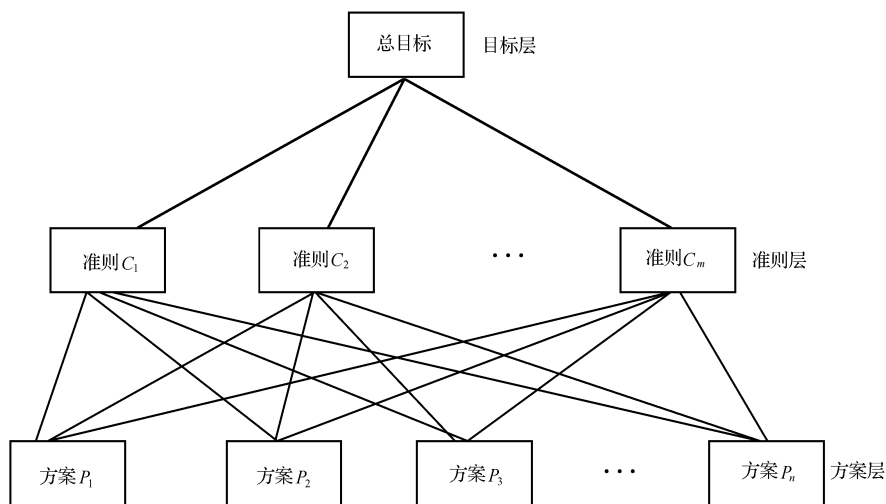


图 1-4 层次结构图

$X_2, \dots, X_n$ 中使价值函数 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m$ 最大者。但是如果决策者不能提供数量信息,仅提供定性信息或一些比例信息将如何呢?

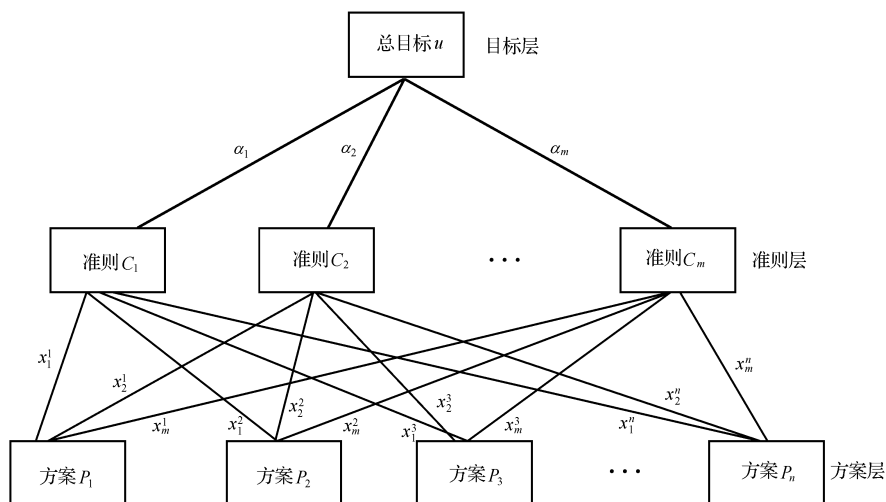


图 1-5 层次结构的分向量图

问题 1 如何由决策者提供的信息确定 α_j ?

问题 2 如何由决策者提供的信息确定 x_j^i ?

T. L. Saaty 建立了一种理论及方法来解决这两个问题,首先看一下权重 α_j 的确定(图 1-6)。

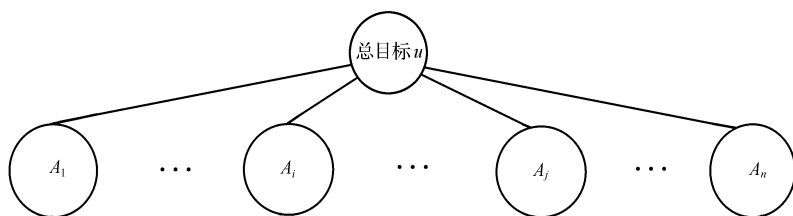


图 1-6 单层次结构

利用增量表达

$$\Delta u = \sum_{j=1}^n \alpha_j \Delta x_j$$

$\alpha_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$ ——目标 j 对总价值的贡献或重要性(借用了连续可微工具);

$$\frac{\alpha_{j_1}}{\alpha_{j_2}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_{j_1}}}{\frac{\partial u}{\partial x_{j_2}}} \text{——在总价值 } u \text{ 的意义下, 目标 } j_1 \text{ 与目标 } j_2 \text{ 的重要性之比。}$$

假设 1 决策者给出两两目标间重要性之比值, 较直接给出各目标的重要性或权重容易。

如果给出一个矩阵 $A = (a_{ij})$, 其中 $a_{ij} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j}$, A 是一致性矩阵(见后定义 1-8), 则由下面定理 1-7 知, A 的最大特征根对应之特征向量分量给出了 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 。但是实际情况是决策者给出的矩阵并不符合这个一致性条件, 我们给出如下算法来处理这一类问题。

判据 1 目标与目标的重要性以下面判断矩阵规则打分:

(1) 两两比较构造判断矩阵

层次图中第一、二层每个点关于其子(下)层点组成一个树形(图 1-6), 每个树形的子层点元素间的相对重要性作为矩阵元素(我们称为判断矩阵)求出, 设它为 $A = (a_{ij})$, a_{ij} 表示决策者对元素 i 与元素 j 相对重要性的估计 $1 \leq i \leq j \leq n$, 采用如下标度方法:

若因素 i 与因素 j 相比, 具有同样重要性, 取 $a_{ij} = 1$;

若因素 i 与因素 j 相比, 因素 i 比因素 j 稍微重要, 取 $a_{ij} = 3$;

若因素 i 与因素 j 相比, 因素 i 比因素 j 明显重要, 取 $a_{ij} = 5$;

若因素 i 与因素 j 相比, 因素 i 比因素 j 强烈重要, 取 $a_{ij} = 7$;

若因素 i 与因素 j 相比, 因素 i 比因素 j 极端重要, 取 $a_{ij} = 9$;

若因素 i 与因素 j 相对重要性介于上述五级之两级间, 则取其中间值, 即 $a_{ij} = 2, 4, 6, 8$ 。

当 $i \leq j$, 因素 i 与 j 比较得判断 a_{ij} , 则因素 j 与 i 比较得判断 $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$, 后者直接给出即可, 因此确定一个判断矩阵, 只要给出 $\frac{n(n-1)}{2}$ 次判断就行了。

定义 1-5 以上述规则建立的矩阵称为判断矩阵。

(2) 层次单排序及其一致性检验

计算 A 的最大正特征根 $\lambda_{\max}$ 和对应特征向量 w (幂法、方根法、和积法均可见 1.7), w 即是各元素相对重要性向量, 若 $w_i > w_j$, 则表明因素 i 比因素 j 重要(见 1.6.6 之定理 1-9)。上述性质是一致性判断矩阵具有的。一般判断矩阵不能保证

一致性, w 存在误差但在一致性检验误差不大的范围内 w 元素的排序仍有效(定理 1-9)。令 $CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$, 若 $\frac{CI}{RI} < 0.1$ 就通过一致检验, 否则调整判断矩阵之元素。其中 RI 取值如下:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RI	0.00	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45

如此, 可由决策者提供的判断矩阵 A , 计算 A 之最大特征根 $\lambda_{\max}$, 通过层次单排序一致性检验, 求得 $\lambda_{\max}$ 对应特征向量 $W = (W_1, W_2, \dots, W_n)$, W_j 即为第 j 个目标的权重, 本节开头记为 α_j , 即 $W_j = \alpha_j, j=1, 2, \dots, n$ 。

假设 2 决策者的判断矩阵接近一致性矩阵, 取由 W 作为 $\lambda_{\max} = n$ 的一致性矩阵 $A(W)$ 为近似的一致性矩阵。

判据 2 判断矩阵 A 与一致性矩阵 $A(W)$ 的距离为 $\mu = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$, RI 是一个 R 量度因子, 其中 $\frac{\mu}{RI} < 0.1$ 表明 A 和 $A(W)$ 距离小, W 可用, 当 $\frac{\mu}{RI} \geq 0.1$ 表明 A 和 $A(W)$ 距离较大, W 不可用, 其根据为定理 1-9。

1.6.3 层次总排序

图 1-7 由上至下逐层计算最下层次元素关于最上一层元素的总排序, 设上一层 (C 层) 含有 m 个因素 (点): $C_1, C_2, \dots, C_m$, 其关于最上层总排序向量为 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, 下一层 (P 层) 含 n 个因素 (点) $P_1, P_2, \dots, P_n$, 点 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 关于上层 C_i 的层次单排向量为 $b_i^1, \dots, b_i^n$, 则下层元素 P_j 关于最上层排序值 (目标值) 为 $z_j = \sum_{i=1}^m \alpha_i b_i^j, j=1, 2, \dots, n$, 同样因为判断矩阵不是一致的, 必须对总排序值进行一致性检验。

层次总排序的一致性检验使用下列公式和标准

$$CR = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i CI_i}{\sum_{i=1}^m \alpha_i RI_i} < 0.10$$

如果通过, 就求出各个方案的评分 $z_j, j=1, 2, \dots, n$, 评分最高的方案为最优方案, 否则应重新建立各判断矩阵。

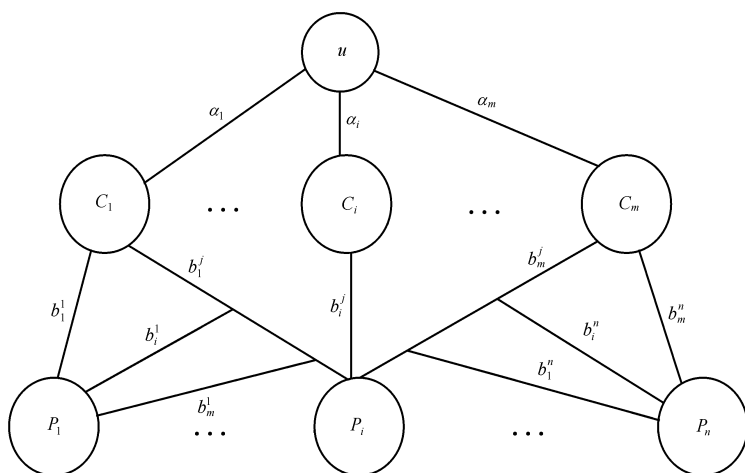


图 1-7 层次总排序图

1.6.4 中国企业海外并购战略影响因素分析(AHP 案例分析)

中国企业要成功实施海外并购,就要考虑到企业内部和外部诸多因素,对这些因素的重要性,影响力判断是一个困难的问题,因为存在很多非量化的因素。我们采用层次分析法来完成这项工作,进而得出适合中国企业海外并购战略的决策和评价。

在用层次分析法来进行中国企业海外并购战略分析时,应首先明确目的:即我们的研究对象是谁,要达到什么目的,明确影响目标达成的因素和方案之间的关系。我们的最终目标是寻找适合中国企业的海外并购战略,为中国企业的实践提供更多的理论支持。

其次,我们需要设立层次结构模型。具体是在深入分析实际问题的基础上,将有关的各个因素按照不同属性自上而下分解成若干层次。大体分为目标层、准则层和方案层。

目标层:是本层次结构的最上层,描述的是决策目标,解决问题的目的,即层次分析要达到的预定目标;中国企业海外并购战略,设为 A 层。

准则层(中间层):表示设置某种准则或采取某种方案来实现预定的分析目标或决策目标所涉及的中间环节。中国企业海外并购的主体各异,其拥有的优势和自身的能力不同,因此,在决定其经营目标、发展战略、组织实施等方面也大不相同。我们概括中国企业对海外并购的准则为以下五个方面:寻求海外市场、寻求资