大学数学习题精解系列

计算方法典型例题分析

（第二版）

孙志忠　编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是为理工科院校各专业的学生在学习“计算方法”课程或“数值分析”课程时，更好地理解课程内容、掌握解题思路和方法，提高综合分析能力而编写的辅导教材. 包括误差分析、方程求根、线性代数方程组的解法、函数插值、曲线拟合与函数逼近、数值积分与数值微分、常微分方程初值问题的数值解法、矩阵特征值与特征向量的计算共8章. 每章先给出内容提要，然后按教学内容的顺序精编若干典型例题，并作分析解答，部分题目给出了多种解法. 书末附3份模拟试卷及其参考答案与评分标准.

图书在版编目(CIP)数据

计算方法典型例题分析/孙志忠编著. —2版.—北京:科学出版社，2005
(大学数学习题精解系列)
ISBN 7-03-015640-4

Ⅰ. 计… Ⅱ. 孙… Ⅲ. 计算方法－高等学校－解题 Ⅳ. O241-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第056650号

责任编辑:赵 靖 祖翠娥/责任校对:张怡君
责任印制:安春生/封面设计:陈 敬

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2001年3月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2005年8月第 二 版 印张:17 1/4
2005年8月第五次印刷 字数:323 000
印数:17 001—20 000

定价: 25.00元

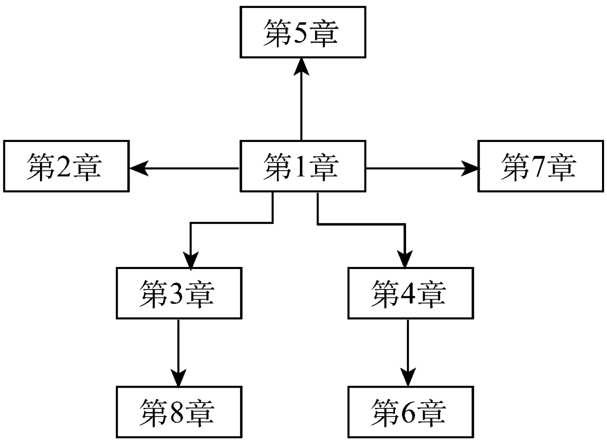
(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

第二版前言

在“计算方法”或“数值分析”课程的学习过程中，解题是一项非常重要的活动. 灵活运用所学知识去分析问题和解决问题是一种能力的训练. 为了帮助学生学好计算方法，开拓思路，提高解题技巧，掌握解题方法，我们参照了教育部高等教育司关于高等学校工科本科生“数值计算方法”课程基本要求，并阅读了近几年来国内出版的多本计算方法和数值分析教材，精编了 182 道典型例题，并作了解答，也希望读者用其他方法给出解答.

全书共 8 章. 每章先给出内容提要，然后按教学内容的顺序精编典型例题. 对每一道例题注重分析和讨论，以便读者更好地理解、掌握解题思路和方法，提高综合分析能力. 较难的题目以“ * ”标注. 书末附 3 份模拟试卷及其参考答案.

读者可按如下路径阅读.



本书自 2001 年出版以来，承蒙广大读者的喜爱，已经发行 17000 册. 这次趁修订再版的机会，考虑到部分学生的需求，在第 5 章中增添了最佳平方逼近和最佳一致逼近的有关内容.

书中有疏漏及不妥之处，恳请读者指正. Email：zzsun@seu.edu.cn.

编者诚挚地感谢科学出版社的同志们为本书的出版付出的辛勤劳动.

作　者

2005 年 1 月

第一版前言

在“计算方法”或“数值分析”课程的学习过程中，解题是一项非常重要的活动．灵活运用所学知识去分析问题和解决问题是一种能力的训练．为了帮助学生学好计算方法，开拓思路，提高解题技巧，掌握解题方法，我们参照了教育部高等教育司关于高等学校工科本科生“数值计算方法”课程基本要求及近几年来国内出版的多本计算方法的教材，精选了 177 道典型题目作了解答，也希望读者用另外的方法给出解答．

为了便于读者阅读，我们按教学内容的顺序进行编排．对每一道题目注重分析和讨论，以便读者更好地理解、掌握解题思路和方法，提高综合分析能力．较难的题目以“＊”标注．书末附 3 份模拟试卷及其参考答案．

书中有疏漏及不妥之处，恳请读者指正．

编者诚挚地感谢科学出版社的同志们为本书的出版付出的辛勤劳动．

作　者

目　录

第 1 章　误 差 分 析

1.1　内 容 提 要

本章要求掌握绝对误差、相对误差、有效数字、数据误差的影响及设计算法时应注意的几个问题.

绝对误差与绝对误差限

设 x^* 为准确值，x 是 x^* 的一个近似值，称 $e=x^*-x$ 为近似值 x 的绝对误差，简称误差. 如果有数 ε 使得 $|e|\leqslant\varepsilon$，则称 ε 为近似值 x 的绝对误差限，简称误差限.

相对误差和相对误差限

设 x^* 是准确值，x 是 x^* 的一个近似值，称 $(x^*-x)/x^*$ 为近似值 x 的相对误差，记作 e_r.

在实际计算中，x^* 是未知的，常以 $\bar{e}_r=(x^*-x)/x$ 作为相对误差. 事实上

$$\bar{e}_r-e_r=\frac{e_r^2}{1-e_r},\qquad \bar{e}_r-e_r=\frac{\bar{e}_r^2}{1+\bar{e}_r}.$$

当 e_r 很小时，$\bar{e}_r-e_r$ 是 e_r 的二阶小量；当 $\bar{e}_r$ 很小时，$\bar{e}_r-e_r$ 是 $\bar{e}_r$ 的二阶小量. 所以 e_r 和 $\bar{e}_r$ 中只要有一个很小，则另一个也很小，且它们是同量级的小量.

如果有常数 ε_r 使得 $|e_r|\leqslant\varepsilon_r$（或 $|\bar{e}_r|\leqslant\varepsilon_r$），则称 ε_r 为近似值 x 的相对误差限.

有效数字

如果近似值 x 的误差限是其某一位上的半个单位，且该位直到 x 的第一位非零数字一共有 n 位，则称近似值 x 具有 n 位有效数字.

n 位

$x=$ *　*　*　*　…　*…

误差限不超过该位的半个单位

自左向右看，第一个非零数

数据误差的影响

给定函数 $y=f(x_1, x_2)$.设 x_1, x_2 分别为 x_1^*, x_2^* 的近似值,则

$$\begin{aligned}
e(y) &= f(x_1^*, x_2^*) - f(x_1, x_2) \\
&\approx \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}(x_1^* - x_1) + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}(x_2^* - x_2) \\
&= \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} e(x_1) + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} e(x_2),
\end{aligned}$$

$$e_r(y) = \frac{e(y)}{y} \approx \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \frac{x_1}{y} e_r(x_1) + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \frac{x_2}{y} e_r(x_2).$$

由以上两式可得

$$e(x_1 + x_2) \approx e(x_1) + e(x_2), \qquad e_r(x_1 + x_2) \approx \frac{x_1}{x_1 + x_2} e_r(x_1) + \frac{x_2}{x_1 + x_2} e_r(x_2),$$

$$e(x_1 - x_2) \approx e(x_1) - e(x_2), \qquad e_r(x_1 - x_2) \approx \frac{x_1}{x_1 - x_2} e_r(x_1) - \frac{x_2}{x_1 - x_2} e_r(x_2),$$

$$e(x_1 x_2) \approx x_2 e(x_1) + x_1 e(x_2), \qquad e_r(x_1 x_2) \approx e_r(x_1) + e_r(x_2),$$

$$e\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \approx \frac{e(x_1)}{x_2} - \frac{x_1}{x_2^2} e(x_2), \qquad e_r\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \approx e_r(x_1) - e_r(x_2),\ x_2 \neq 0.$$

设计算法时要注意的几个问题

(1) 应用数值稳定的递推公式.

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$是由递推公式

$$\begin{cases} x_n = F(x_{n-1}), & n=1,2,\cdots, \\ x_0 \text{ 给定} \end{cases} \tag{1.1}$$

得到的.若 x_0 有误差 e_0,则实际上只能得到

$$\begin{cases} \tilde{x}_n = F(\tilde{x}_{n-1}), & n=1,2,\cdots, \\ \tilde{x}_0 = x_0 - e_0, \end{cases}$$

记 $e_n = x_n - \tilde{x}_n$, $n=1,2,\cdots$.如果存在不依赖于 n 的常数 C 使得

$$|e_n| \leqslant C|e_0|, \quad n=1,2,\cdots,$$

则称递推公式(1.1)是数值稳定的.否则称其为数值不稳定的.

(2) 注意简化运算步骤,减少运算次数.

(3) 要避免相近数相减.

(4) 多个数相加,应先将绝对值较小的数相加之后,再依次与绝对值较大的数相加.

1.2 典型例题分析

1.2.1 绝对误差 相对误差 有效数字

例 1.1 问 3.142,3.141,$\frac{22}{7}$分别作为 π 的近似值各具有几位有效数字?

解 $\pi=3.14159265\cdots$.记 $x_1=3.142$, $x_2=3.141$, $x_3=\frac{22}{7}$.

由 $\pi-x_1=3.14159\cdots-3.142=-(3.142-3.14159\cdots)=-0.00040\cdots$知

$$\frac{1}{2}\times10^{-4}<|\pi-x_1|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-3},$$

因而 x_1 具有 4 位有效数字.

由 $\pi-x_2=3.14159\cdots-3.141=0.00059\cdots$知

$$\frac{1}{2}\times10^{-3}<|\pi-x_2|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-2},$$

因而 x_2 具有 3 位有效数字.

由 $\pi-\frac{22}{7}=3.14159\cdots-3.14285\cdots=-0.00126\cdots$知

$$\frac{1}{2}\times10^{-3}<\left|\pi-\frac{22}{7}\right|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-2},$$

因而 x_3 具有 3 位有效数字.

例 1.2 (1) 经过四舍五入得出 $x_1=6.1025$, $x_2=80.115$,试问它们分别具有几位有效数字?(2) 求 x_1+x_2, x_1-x_2, x_1x_2, $\frac{x_1}{x_2}$的绝对误差限.

解 (1) 记 x_1 和 x_2 的精确值分别为 x_1^* 和 x_2^*,则有

$$|x_1^*-x_1|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-4},\qquad |x_2^*-x_2|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-3}.$$

所以 x_1 和 x_2 分别具有 5 位有效数字.

(2) 由于 $|e(x_1)|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-4}$, $|e(x_2)|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-3}$,所以

$$|e(x_1+x_2)|\approx|e(x_1)+e(x_2)|\leqslant|e(x_1)|+|e(x_2)|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-4}+\frac{1}{2}\times 10^{-3}=0.00055,$$

$$\left|e(x_1-x_2)\right|\approx\left|e(x_1)-e(x_2)\right|\leqslant\left|e(x_1)\right|+\left|e(x_2)\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-4}+\frac{1}{2}\times 10^{-3}=0.00055,$$

$$\left|e(x_1x_2)\right|\approx\left|x_2e(x_1)+x_1e(x_2)\right|\leqslant x_2\left|e(x_1)\right|+x_1\left|e(x_2)\right|$$

$$\leqslant 80.115\times\frac{1}{2}\times 10^{-4}+6.1025\times\frac{1}{2}\times 10^{-3}=0.007057,$$

$$\left|e\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\right|\approx\left|\frac{1}{x_2}e(x_1)-\frac{x_1}{x_2^2}e(x_2)\right|\leqslant\frac{1}{x_2}\left|e(x_1)\right|+\frac{x_1}{x_2^2}\left|e(x_2)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{80.115}\times\frac{1}{2}\times 10^{-4}+\frac{6.1025}{80.115^2}\times\frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

$$=0.10995\times 10^{-5}.$$

例1.3　设 $x_1=1.21$, $x_2=3.65$, $x_3=9.81$ 都精确到二位小数,试估计由这些数据计算 $x_1x_2+x_3$ 的相对误差.

解　记 $x_1=1.21$, $x_2=3.65$, $x_3=9.81$, $u=x_1x_2$, $v=u+x_3$, 则

$$\left|e(x_1)\right|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-2},\qquad \left|e_r(x_1)\right|=\left|\frac{e(x_1)}{x_1}\right|\leqslant\frac{\frac{1}{2}\times 10^{-2}}{1.21},$$

$$\left|e(x_2)\right|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-2},\qquad \left|e_r(x_2)\right|=\left|\frac{e(x_2)}{x_2}\right|\leqslant\frac{\frac{1}{2}\times 10^{-2}}{3.65},$$

$$\left|e(x_3)\right|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-3},\qquad \left|e_r(x_3)\right|=\left|\frac{e(x_3)}{x_3}\right|\leqslant\frac{\frac{1}{2}\times 10^{-2}}{9.81}.$$

因为

$$e_r(u)=e_r(x_1x_2)\approx e_r(x_1)+e_r(x_2),$$

$$e_r(v)=e_r(u+x_3)\approx\frac{u}{u+x_3}e_r(u)+\frac{x_3}{u+x_3}e_r(x_3)$$

$$\approx\frac{x_1x_2}{x_1x_2+x_3}\left[e_r(x_1)+e_r(x_2)\right]+\frac{x_3}{x_1x_2+x_3}e_r(x_3),$$

所以

$$\begin{aligned}|e_r(v)| &\approx \left|\frac{x_1x_2}{x_1x_2+x_3}(e_r(x_1)+e_r(x_2))+\frac{x_3}{x_1x_2+x_3}e_r(x_3)\right| \\ &\leqslant \frac{x_1x_2}{x_1x_2+x_3}\left(|e_r(x_1)|+|e_r(x_2)|\right)+\frac{x_3}{x_1x_2+x_3}|e_r(x_3)| \\ &\leqslant \frac{1.21\times3.65}{1.21\times3.65+9.81}\times\left(\frac{\frac{1}{2}\times10^{-2}}{1.21}+\frac{\frac{1}{2}\times10^{-2}}{3.65}\right) \\ &\quad+\frac{9.81}{1.21\times3.65+9.81}\times\frac{\frac{1}{2}\times10^{-2}}{9.81} \\ &=0.00206.\end{aligned}$$

例 1.4 采用迭代法计算 $\sqrt{7}$,取

$$\begin{cases} x_0=2, \\ x_{k+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_k+\dfrac{7}{x_k}\right), \qquad k=0,1,2,\cdots. \end{cases}$$

若 x_k 是 $\sqrt{7}$ 的具有 n 位有效数字的近似值,求证 x_{k+1} 是 $\sqrt{7}$ 的具有 $2n$ 位有效数字的近似值.

解 首先我们证明 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\sqrt{7}$.由

$$x_{k+1}-\sqrt{7}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{7}{x_k}\right)-\sqrt{7}=\frac{1}{2x_k}(x_k-\sqrt{7})^2, \qquad k=0,1,2,\cdots$$

知 $x_{k+1}-\sqrt{7}\geqslant0$, $k=0,1,2,\cdots$,即 $x_k\geqslant\sqrt{7}$, $k=1,2,3,\cdots$.因而

$$x_1-\sqrt{7}=\frac{1}{2x_0}(x_0-\sqrt{7})^2=\frac{1}{4}(\sqrt{7}-2)^2, \tag{1.2}$$

$$|x_{k+1}-\sqrt{7}|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{7}}(x_k-\sqrt{7})^2, \qquad k=1,2,3,\cdots. \tag{1.3}$$

递推可得

$$\begin{aligned}|x_{k+1}-\sqrt{7}| &\leqslant (x_k-\sqrt{7})^2\leqslant[(x_{k-1}-\sqrt{7})^2]^2=(x_{k-1}-\sqrt{7})^{2^2} \\ &\leqslant[(x_{k-2}-\sqrt{7})^2]^{2^2}=(x_{k-2}-\sqrt{7})^{2^3}\leqslant\cdots \\ &\leqslant(x_1-\sqrt{7})^{2^k}\leqslant\left[\frac{1}{4}(\sqrt{7}-2)^2\right]^{2^k} \\ &=\left(\frac{\sqrt{7}-2}{2}\right)^{2^{k+1}}, \qquad k=0,1,2\cdots.\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=\sqrt{7}$.

设 x_k 是 $\sqrt{7}$的具有 n 位有效数字的近似值,即$\left|x_k-\sqrt{7}\right|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-(n-1)}$,则由(1.3)式知

$$\begin{aligned}\left|x_{k+1}-\sqrt{7}\right|&\leqslant\frac{1}{2\sqrt{7}}(x_k-\sqrt{7})^2\leqslant\frac{1}{2\sqrt{7}}\left[\frac{1}{2}\times10^{-(n-1)}\right]^2\\&\leqslant\frac{10}{4\sqrt{7}}\times\frac{1}{2}\times10^{-(2n-1)}\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-(2n-1)}.\end{aligned}$$

因而 x_{k+1} 是 $\sqrt{7}$ 的具有 $2n$ 位有效数字的近似值.

1.2.2　数据误差的影响

例 1.5　设 $x>0$, x 的相对误差限为 δ,求 x^n 和 $\ln x$ 的相对误差限.

解　由已知条件知$\left|e_r(x)\right|\leqslant\delta$.由一元函数 $y=f(x)$的相对误差公式

$$e_r(y)\approx f'(x)\frac{x}{f(x)}e_r(x)$$

有

$$e_r(x^n)\approx nx^{n-1}\cdot\frac{x}{x^n}\cdot e_r(x)=ne_r(x),\qquad\left|e_r(x^n)\right|\approx\left|ne_r(x)\right|\leqslant n\delta;$$

$$e_r(\ln x)\approx\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\ln x}e_r(x)=\frac{1}{\ln x}e_r(x),\qquad\left|e_r(\ln x)\right|\approx\left|\frac{e_r(x)}{\ln x}\right|\leqslant\frac{\delta}{\left|\ln x\right|}.$$

例 1.6　设 $y=\ln x$.当 $x\approx a(a>0)$时,如果已知对数 $\ln a$ 的绝对误差限为 $\frac{1}{2}\times10^{-n}$,试估计真数 a 的相对误差限及有效数字位数.

解　由 $y=\ln x$ 知 $\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x}{x}$.因而 $e(y)\approx e_r(x)$.于是

$$e(\ln a)\approx e_r(a).$$

由$\left|e(\ln a)\right|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-n}$得到

$$\left|e_r(a)\right|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-n},$$

又由 $e(a)=a\,e_r(a)$得

$$\left|e(a)\right|\leqslant a\times\frac{1}{2}\times10^{-n}.$$

设 $a=(0.\beta_1\beta_2\cdots)\times 10^m$，$\beta_1\geqslant 1$,则

$$\left|e(a)\right|\leqslant 10^m\times\frac{1}{2}\times 10^{-n}.$$

因而真数 a 具有 n 位有效数字.

例 1.7 设计算球体积允许其相对误差限为 1%,问测量球半径的相对误差限最大为多少?

解 记球半径为 R,球体积为 V.由题意知 $\left|e_r(V)\right|\leqslant 1\%$.由公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ 知 $\mathrm{d}V=4\pi R^2\mathrm{d}R$,于是

$$\frac{\mathrm{d}V}{V}=\frac{4\pi R^2\mathrm{d}R}{\frac{4}{3}\pi R^3}=3\frac{\mathrm{d}R}{R}.$$

因而

$$\left|e_r(R)\right|\approx\frac{1}{3}\left|e_r(V)\right|\leqslant\frac{1}{3}\times 1\%=0.33\%,$$

即测量球半径的相对误差限最大为 0.33%.

例 1.8 真空中自由落体运动距离 s 和时间 t 的关系是 $s=\frac{1}{2}gt^2$,g 是重力加速度.现设 g 是准确的,而对 t 的测量有 ± 0.1 秒的误差.证明当 t 增加时,距离的绝对误差增加,而相对误差却减少.

解 由 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 得 $\mathrm{d}s=gt\mathrm{d}t$,因而

$$e(s)\approx gt\,e(t),\qquad e_r(s)=\frac{e(s)}{s}\approx\frac{gt\,e(t)}{\frac{1}{2}gt^2}=\frac{2}{t}e(t).$$

于是

$$\left|e(s)\right|\approx gt\left|e(t)\right|,\qquad \left|e_r(s)\right|\approx\frac{2}{t}\left|e(t)\right|.$$

易知当 $\left|e(t)\right|$ 固定时,$\left|e(s)\right|$ 随着 t 的增加而增加,而 $\left|e_r(s)\right|$ 随着 t 的增加而减少.

例 1.9 已测量某长方形场地长 $a=110$ 米,宽 $b=80$ 米.若

$$\left|a-a^*\right|\leqslant 0.1(\text{米}),\qquad \left|b-b^*\right|\leqslant 0.1(\text{米}),$$

试求其面积的绝对误差限和相对误差限.

解 由题意知 $a=110$,$b=80$,$\left|e(a)\right|\leqslant 0.1$,$\left|e(b)\right|\leqslant 0.1$,$\left|e_r(a)\right|=$

$$\left|\frac{e(a)}{a}\right|\leqslant\frac{0.1}{110},\quad |e_r(b)|=\left|\frac{e(b)}{b}\right|\leqslant\frac{0.1}{80}.$$

面积 $S=ab$. 计算面积 S 的绝对误差限为

$$\begin{aligned}|e(S)|&\approx|be(a)+ae(b)|\leqslant b|e(a)|+a|e(b)|\\&\leqslant 80\times0.1+110\times0.1=19,\end{aligned}$$

计算面积 S 的相对误差限为

$$\begin{aligned}|e_r(S)|&\approx|e_r(a)+e_r(b)|\leqslant|e_r(a)|+|e_r(b)|=\frac{0.1}{110}+\frac{0.1}{80}\\&=0.00216.\end{aligned}$$

例 1.10　由图 1.1 知道三角形一边和两邻角的近似值为 $a=100$, $\beta=45°$, $\gamma=45°$. 假设 a, β, γ 的观测误差限分别为0.1, 0.1°, 0.1°, 试计算另外的边和角, 并给出误差的界.

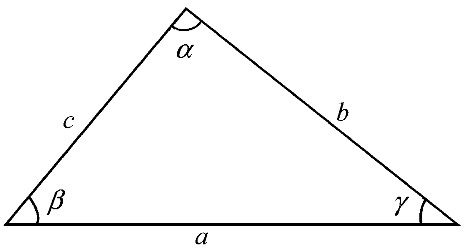


图 1.1

解　由题意知 $a=100$, $\beta=45°=\frac{\pi}{4}$, $\gamma=45°=\frac{\pi}{4}$, $|e(a)|\leqslant0.1$, $|e(\beta)|\leqslant0.1°=\frac{\pi}{1800}$, $|e(\gamma)|\leqslant0.1°=\frac{\pi}{1800}$. 根据三角形内角和为 π 知

$$\alpha=\pi-\beta-\gamma=\frac{\pi}{2},$$

$$|e(\alpha)|\approx|-e(\beta)-e(\gamma)|\leqslant|e(\beta)|+|e(\gamma)|\leqslant\frac{\pi}{1800}+\frac{\pi}{1800}=\frac{\pi}{900}=0.2°.$$

由正弦定理有

$$b=a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=100\times\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{2}}=50\sqrt{2},$$

$$c=a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}=100\times\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{2}}=50\sqrt{2}.$$

由

$$\mathrm{d}b=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\mathrm{d}a+a\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}\mathrm{d}\beta-a\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\mathrm{d}\alpha$$

知

$$e(b)\approx\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}e(a)+a\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}e(\beta)-a\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin^2\alpha}e(\alpha),$$

因而

$$\begin{aligned}|e(b)|&\approx\left|\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}e(a)+a\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}e(\beta)-a\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin^2\alpha}e(\alpha)\right|\\&\leqslant\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}|e(a)|+a\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}|e(\beta)|+a\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin^2\alpha}|e(\alpha)|\\&=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{2}}\times0.1+100\times\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{2}}\times\frac{\pi}{1800}+100\times\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}\times\frac{\pi}{900}\\&=0.194.\end{aligned}$$

同理 $|e(c)|\leqslant0.194$.

1.2.3 设计算法时应注意的几个问题

例 1.11 设 $I_n=\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{x-1}\mathrm{d}x$,求证:

(1) $I_n=1-nI_{n-1}$, $n=1,2,3,\cdots$;

(2) 正向递推时误差传播逐步放大,逆向递推时误差传播逐步衰减.

解 (1) 当 $n\geqslant1$ 时,

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{x-1}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n\mathrm{d}\mathrm{e}^{x-1}=x^n\mathrm{e}^{x-1}\Big|_{x=0}^1-\int_0^1\mathrm{e}^{x-1}\mathrm{d}x^n\\&=1-n\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{e}^{x-1}\mathrm{d}x=1-nI_{n-1}.\end{aligned}$$

(2) 正向递推 由 I_{n-1} 计算 I_n:

$$I_n=1-nI_{n-1},\qquad n=1,2,3,\cdots.$$

若已知 I_{n-1} 的一个近似值 $\tilde{I}_{n-1}$,则实际算得的 I_n 的近似值为

$$\tilde{I}_n=1-n\tilde{I}_{n-1}.$$

将以上两式相减得

$$I_n - \tilde{I}_n = (-n)(I_{n-1} - \tilde{I}_{n-1}),$$

两边取绝对值得

$$\left| I_n - \tilde{I}_n \right| = n \left| I_{n-1} - \tilde{I}_{n-1} \right|.$$

I_{n-1} 的误差将放大 n 倍传到 I_n.因而正向递推时误差传播逐步放大.

逆向递推　由 I_n 计算 I_{n-1}：

$$I_{n-1} = \frac{1}{n}(1 - I_n), \qquad n = N, N-1, N-2, \cdots, 1.$$

若已知 I_n 的一个近似值 $\tilde{I}_n$,则实际算得的 I_{n-1} 的近似值为

$$\tilde{I}_{n-1} = \frac{1}{n}(1 - \tilde{I}_n).$$

将以上两式相减得

$$I_{n-1} - \tilde{I}_{n-1} = \left(-\frac{1}{n}\right)(I_n - \tilde{I}_n),$$

两边取绝对值得

$$\left| I_{n-1} - \tilde{I}_{n-1} \right| = \frac{1}{n}\left| I_n - \tilde{I}_n \right|.$$

I_n 的误差将缩小 n 倍传到 I_{n-1}.因而逆向递推时误差传播逐步衰减.

例 1.12　利用秦九韶算法计算多项式

$$p(x) = x^7 - 2x^6 - 3x^4 + 4x^3 - x^2 + 6x - 1$$

在 $x = 2$ 处的值 $p(2)$.

解　将所给多项式的系数按降幂排列,缺项系数看成零.

	1	−2	0	−3	4	−1	6	−1
2		2	0	0	−6	−4	−10	−8
	1	0	0	−3	−2	−5	−4	−9

所以 $p(2) = -9$.

例 1.13　计算

$$(10 - \sqrt{99})^{10}.$$

取 $\sqrt{99} \approx 9.9499$,分析下述两种运算各具有几位有效数字.

(1) $(10 - \sqrt{99})^{10} \approx (10 - 9.9499)^{10} = 0.99627047 \times 10^{-13}$;

(2) $\dfrac{1}{(10 + \sqrt{99})^{10}} \approx \dfrac{1}{(10 + 9.9499)^{10}} = 0.10013658 \times 10^{-12}$.

解 记 $x^* = \sqrt{99}, x = 9.9499, u = (10 - x)^{10}, v = \dfrac{1}{(10 + x)^{10}}$,则有

$$\left| e(x) \right| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-4}, \qquad u'(x) = -10(10 - x)^9, \ v'(x) = -\frac{10}{(10 + x)^{11}}.$$

由 $e(u) \approx u'(x)e(x) = -10(10 - x)^9 e(x)$ 知

$$\begin{aligned}\left| e(u) \right| &\approx \left| -10(10 - x)^9 e(x) \right| \leqslant 10(10 - 9.9499)^9 \times \frac{1}{2} \times 10^{-4} \\ &= 0.19886 \times \frac{1}{2} \times 10^{-14} < \frac{1}{2} \times 10^{-14} \\ &= \frac{1}{2} \times 10^{-1} \times 10^{-13}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

由(1.4)式可断定算式(1)至少具有 1 位有效数字.由 $e(v) \approx v'(x)e(x) = -\dfrac{10}{(10 + x)^{11}} e(x)$知

$$\begin{aligned}\left| e(v) \right| &\approx \left| -\frac{10}{(10 + x)^{11}} e(x) \right| \leqslant \frac{10}{(10 + 9.9499)^{11}} \times \frac{1}{2} \times 10^{-4} \\ &= 0.50194 \times \frac{1}{2} \times 10^{-17} \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-17} \\ &= \frac{1}{2} \times 10^{-5} \times 10^{-12}.\end{aligned} \tag{1.5}$$

由(1.5)式知算式(2)至少具有 5 位有效数字.

注:由 $u^* = v^*$ 及 $u - u^* = u - v + v - v^*$ 知

$$\begin{aligned}\left| u - u^* \right| &\geqslant \left| u - v \right| - \left| v - v^* \right| \\ &\geqslant 0.50953 \times 10^{-15} - 0.25097 \times 10^{-17} \\ &= 0.50702 \times 10^{-15} > \frac{1}{2} \times 10^{-15}.\end{aligned}$$

由上式和(1.4)式可断定 u 只具有 1 位有效数字.

事实上,$(10 - \sqrt{99})^{10} = \dfrac{1}{(10 + \sqrt{99})^{10}} = 0.10013786 \times 10^{-12}$.因而

$$| u^* - u | = 0.10013786 \times 10^{-12} - 0.99627047 \times 10^{-13} = 0.51081 \times 10^{-15},$$

$$| v^* - v | = 0.10013786 \times 10^{-12} - 0.10013658 \times 10^{-12} = 0.128 \times 10^{-17}.$$

易知 u 具有 1 位有效数字,v 具有 5 位有效数字.

例 1.14　利用等价变换使下列表达式的计算结果比较精确.

(1) $\dfrac{1}{1+2x}-\dfrac{1-x}{1+x}$, $|x|\ll 1$;

(2) $\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}$, $x\gg 1$;

(3) $\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $x\gg 1$;

(4) $\ln(x-\sqrt{x^2-1})$, $x\gg 1$;

(5) e^x-1, $|x|\ll 1$;

(6) $1-\cos x$, $|x|\ll 1$;

(7) $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$, $|x|\ll 1$.

解　(1)

$$\frac{1}{1+2x}-\frac{1-x}{1+x}=\frac{(1+x)-(1-x)(1+2x)}{(1+2x)(1+x)}=\frac{2x^2}{(1+2x)(1+x)}.$$

(2)

$$\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}=\frac{\dfrac{2}{x}}{\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}}.$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}&=\arctan(x+1)-\arctan(x)\\&=\arctan\left[\tan\left[\arctan(x+1)-\arctan(x)\right]\right]\\&=\arctan\frac{(x+1)-x}{1+(x+1)x}=\arctan\frac{1}{1+(x+1)x}.\end{aligned}$$

(4)

$$\ln(x-\sqrt{x^2-1})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=-\ln(x+\sqrt{x^2-1}).$$

(5)

$$e^x-1\approx x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4.$$

(6)

$$1-\cos x=2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right),$$

或

$$1-\cos x\approx 1-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}=x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}\right).$$

(7)

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}=\tan\frac{x}{2}.$$

例 1.15 试计算 $f(x)=\frac{1+x-e^x}{x^2}$ 当 $x=0.001$ 时的值,要求具有 6 位有效数.

解 由泰勒展开式知

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\left[1+x-\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{e^\zeta}{24}x^4\right)\right]$$

$$=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}x+\frac{e^\zeta}{24}x^2\right),\qquad \zeta\in(0,x).$$

当 $x=0.001$ 时,

$$\left|\frac{e^\zeta}{24}x^2\right|\leqslant\frac{e^{0.001}}{24}(0.001)^2=0.4171\times10^{-7}\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-7}.$$

因而所求具有 6 位有效数的近似值为

$$f(0.001)\approx-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times0.001\right)=-0.500167.$$

例 1.16 在计算机上对 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 自左至右求和:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

若 n 很大,S_n 将不随 n 的增加而增加,试说明原因.

解 这主要是由于在计算机中作加法运算需先对位而造成的.例如,设这台计算机具有 7 位精度,即字长 $t=7$.由 S_n 的性质知,S_n 单调增加且趋向于 $+\infty$,另一方面通项 $\frac{1}{n}$ 单调减少趋于零,所以

$$\frac{\frac{1}{m+1}}{S_m}$$

为单调减少序列.因而必存在 m 使得

$$\frac{\frac{1}{m+1}}{S_m} < \frac{1}{2} \times 10^{-7}.$$

设 $S_m = 0.a_1 a_2 \cdots a_7 \times 10^p$, $a_1 \neq 0$,则

$$\begin{aligned} S_m + \frac{1}{m+1} &= 0.a_1 a_2 \cdots a_7 \times 10^p + \frac{1}{m+1} \\ &= 0.a_1 a_2 \cdots a_7 \times 10^p + 0.0000000 \times 10^p \\ &= (0.a_1 a_2 \cdots a_7 + 0.0000000) \times 10^p = 0.a_1 a_2 \cdots a_7 \times 10^p \\ &= S_m, \end{aligned}$$

即

$$S_{m+1} = S_m.$$

同理,当 $k > m$ 时,

$$\begin{aligned} S_m + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{k} &= \left(S_m + \frac{1}{m+1} \right) + \cdots + \frac{1}{k} \\ &= \left(S_m + \frac{1}{m+2} \right) + \cdots + \frac{1}{k} = \cdots = S_m, \end{aligned}$$

即

$$S_k = S_m.$$

第 2 章　方程求根

2.1　内容提要

本章要求掌握方程根的概念，求根步骤，求根的四种方法（二分法，迭代法，牛顿法，割线法）.

根的概念

给定方程 $f(x)=0$. 如果有 x^* 使得 $f(x^*)=0$，则称 x^* 为 $f(x)=0$ 的根，或 $f(x)$ 的零点. 设有正整数 m 使得

$$f(x)=(x-x^*)^m g(x),$$

且 $g(x^*)\neq 0$，则当 $m\geqslant 2$ 时，称 x^* 为 $f(x)=0$ 的 m 重根；当 $m=1$ 时，称 x^* 为 $f(x)=0$ 的单根.

求根步骤

（1）确定所给方程存在多少根，找出每一个根所在的区间. 所找区间要越小越好，这样的区间称为根区间或隔根区间.

（2）求出含根区间中的根.

二分法

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)f(b)<0$，则 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一根. 记 $a_0=a$, $b_0=b$. 一般地，设 $f(a_n)f(b_n)<0$，则 $x^*\in(a_n,b_n)$. 取 $[a_n,b_n]$ 的中点 $x_n=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$，则有 $|x^*-x_n|\leqslant\frac{b_n-a_n}{2}$. 如果 $\left|\frac{b_n-a_n}{2}\right|\leqslant\varepsilon$（$\varepsilon$ 为给定精度），则取 $x^*\approx x_n$，停止计算. 否则计算 $f(x_n)$. 如果 $f(x_n)=0$，则 $x^*=x_n$，停止计算. 否则 $f(a_n)f(x_n)<0$ 和 $f(x_n)f(b_n)<0$ 两式中有且仅有一式成立. 若 $f(a_n)f(x_n)<0$，令 $a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=x_n$；若 $f(x_n)f(b_n)<0$，令 $a_{n+1}=x_n$, $b_{n+1}=b_n$. 我们有 $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$ 且 $b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n-a_n)$. 重复以上过程.

迭代法

1. 迭代格式的构造及其敛散性条件

求 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 内的根.将其改写成等价形式

$$x=\varphi(x), \tag{2.1}$$

构造迭代格式

$$x_{k+1}=\varphi(x_k),\qquad k=0,1,2,\cdots, \tag{2.2}$$

给定 x_0,可得序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$.称 $\varphi(x)$ 为迭代函数,称 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为迭代序列.

定理 2.1　设 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有一阶连续导数,且满足如下两个条件:① 当 $x\in[a,b]$ 时,$\varphi(x)\in[a,b]$;② 存在正常数 $L<1$,使得对任意 $x\in[a,b]$ 有 $|\varphi'(x)|\leqslant L$,则

(1) 方程(2.1)在 $[a,b]$ 上有唯一根 x^*;

(2) 对任意 $x_0\in[a,b]$,迭代格式(2.2)收敛,且 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x^*$;

(3) $|x^*-x_k|\leqslant\dfrac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|$, $k=1,2,\cdots$;

(4) $|x^*-x_k|\leqslant\dfrac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$, $k=1,2,\cdots$;

(5) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x^*-x_{k+1}}{x^*-x_k}=\varphi'(x^*)$.

定理 2.2　设方程(2.1)在区间 $[a,b]$ 内有根 x^*,且当 $x\in[a,b]$ 时 $|\varphi'(x)|\geqslant 1$,则对任意初值 $x_0\in[a,b]$ 且 $x_0\neq x^*$,迭代格式(2.2)发散.

2. 迭代法的局部收敛性

对于方程(2.1),若在 x^* 的某个邻域 $S=\{x\,|\,|x-x^*|\leqslant\delta\}$ 内,对任意初值 $x_0\in S$,迭代格式(2.2)收敛,则称迭代格式(2.2)是局部收敛的.

定理 2.3　设方程(2.1)有根 x^*,且在 x^* 的某个邻域 $S=\{x\,|\,|x-x^*|\leqslant\delta\}$ 内,$\varphi(x)$ 存在一阶连续的导数,则

(1) 当 $|\varphi'(x^*)|<1$ 时,迭代格式(2.2)局部收敛;

(2) 当 $|\varphi'(x^*)|>1$ 时,迭代格式(2.2)发散.

3. 迭代法的收敛速度

设序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于 x^*,记 $e_k=x^*-x_k$, $k=0,1,2,\cdots$.如果存在非零常数 c 和正数 p,使得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=c,$$

则称序列$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$是 p 阶收敛的.

当 $p=1$ 且 $0<|c|<1$ 时,称为线性收敛;当 $p>1$ 时,称为超线性收敛.特别,当 $p=2$ 时,称为平方收敛.p 越大,收敛越快.

定理 2.4　若 $\varphi(x)$ 在 x^* 附近的某个邻域内有 $p(p\geqslant 1)$ 阶连续导数,且

$$\varphi(x^*)=x^*,\ \varphi'(x^*)=0,\cdots,\varphi^{(p-1)}(x^*)=0,\ \varphi^{(p)}(x^*)\neq 0,$$

则对任意靠近于 x^* 的初值 x_0,迭代公式(2.2)是 p 阶收敛的,且有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x^*-x_{k+1}}{(x^*-x_k)^p}=\frac{(-1)^{p-1}\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}.$$

如果 $p=1$,要求$\left|\varphi'(x^*)\right|<1$.

4. 艾特肯加速法

设已有迭代格式(2.2),且是收敛的,则下列算法称为艾特肯(Aitken)加速法:

$$x_{k+1}=\Phi(x_k),\qquad k=0,1,2,\cdots,\tag{2.3}$$

其中

$$\Phi(x)=\frac{x\varphi(\varphi(x))-\varphi(x)^2}{\varphi(\varphi(x))-2\varphi(x)+x}.$$

定理 2.5　设在 x^* 附近,$\varphi(x)$ 有 $p+1$ 阶导数,则对一个充分靠近 x^* 的初值 x_0,有

(1) 如果(2.2)是线性收敛,则(2.3)是 2 阶收敛;

(2) 如果(2.2)是 $p(p\geqslant 2)$ 阶收敛,则(2.3)是 $2p-1$ 阶收敛.

牛顿法

1. 牛顿迭代公式及局部收敛性

设 x_k 为 $f(x)=0$ 的一个近似值,在点$(x_k,f(x_k))$作 $f(x)$ 的切线(图 2.1)

$$y=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k).$$

该切线与 x 轴交点的横坐标作为新的根的近似值 x_{k+1},即

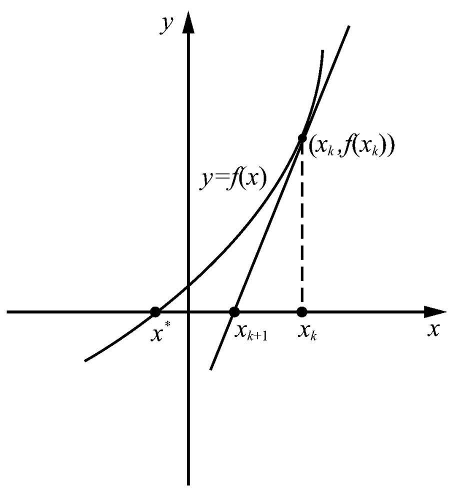


图 2.1

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{2.4}$$

(2.4)式称为牛顿公式,它是局部收敛的.

当 x^* 为单根时,有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x^* - x_{k+1}}{(x^* - x_k)^2} = -\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)};$$

当 x^* 是 $m(m \geqslant 2)$ 重根时,有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x^* - x_{k+1}}{x^* - x_k} = 1 - \frac{1}{m}.$$

2. 求重根的修正牛顿公式

(1) 重数 m 已知:$x_{k+1} = x_k - m\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$;

(2) 重数 m 未知:$x_{k+1} = x_k - \dfrac{u(x_k)}{u'(x_k)}$, $u(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

割线法

设 x_{k-1}, x_k 是方程 $f(x) = 0$ 的两个近似根.以$(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$和$(x_k, f(x_k))$两点作 $f(x)$ 的割线(图 2.2)

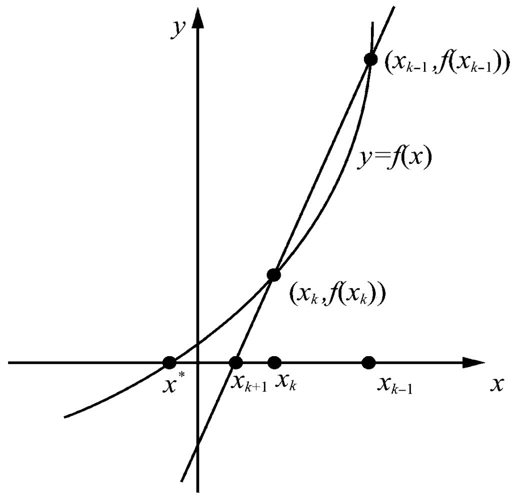


图 2.2

$$y = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k).$$

该割线与 x 轴交点的横坐标作为新的近似根,即

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}). \tag{2.5}$$

(2.5)式称为割线公式,它也是局部收敛的.

2.2　典型例题分析

2.2.1　方程的根与重根

例 2.1　判断下列方程有几个实根,并求出其隔根区间:

(1) $x^3-5x-3=0$;

(2) $x=2-e^{-x}$.

解　(1) 设 $f(x)=x^3-5x-3$,则 $f'(x)=3x^2-5=3\left(x^2-\frac{5}{3}\right)$.

当 $|x|<\sqrt{\frac{5}{3}}$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 为减函数;当 $|x|>\sqrt{\frac{5}{3}}$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 为增函数. $f\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)=\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}-3>0$,$f\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)=-\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}-3<0$,$f(0)=-3<0$,$f(-2)=-1<0$,$f(3)=9>0$.根据以上信息,可作 $f(x)$ 的图像(图 2.3). 由图 2.3 可见 $f(x)=0$ 有三个根 $x_1^*\in\left(-2,-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$,$x_2^*\in\left(-\sqrt{\frac{5}{3}},0\right)$,$x_3^*\in\left(\sqrt{\frac{5}{3}},3\right)$.

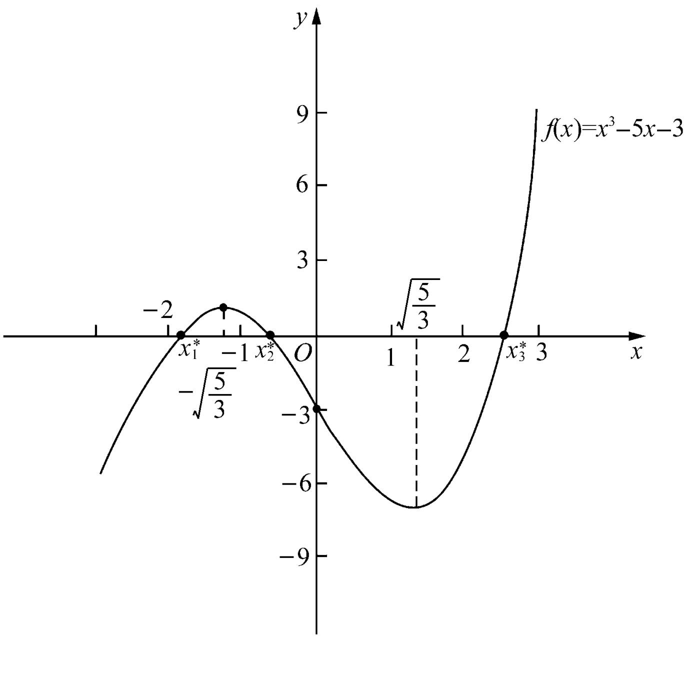


图 2.3

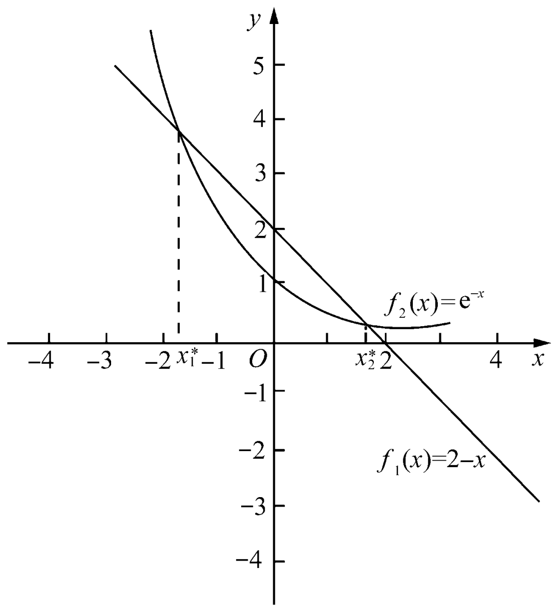


图 2.4

(2) 将原方程改写为 $2-x=e^{-x}$.

记 $f_1(x)=2-x$,$f_2(x)=e^{-x}$.作函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的图像(图2.4).由图

2.4 可知 $f_1(x)$和 $f_2(x)$有两个交点,其横坐标 $x_1^* \in(-2,-1)$, $x_2^* \in(1,2)$.因而所给方程有两个根 $x_1^* \in(-2,-1)$, $x_2^* \in(1,2)$.

例 2.2　设 $f(x)$ 具有 m 阶连续导数,证明 x^* 是 $f(x)$ 的 m 重零点的充分必要条件为

$$f(x^*)=0,\ f'(x^*)=0,\cdots,f^{(m-1)}(x^*)=0,f^{(m)}(x^*)\neq 0.$$

证　必要性.设 x^* 是 $f(x)$ 的 m 重零点,则

$$f(x)=(x-x^*)^m g(x),\quad 且\quad g(x^*)\neq 0,$$

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{i=0}^{k} C_k^i[(x-x^*)^m]^{(i)} g^{(k-i)}(x) \\ &= \sum_{i=0}^{k} C_k^i m(m-1)\cdots(m-i+1)(x-x^*)^{m-i} g^{(k-i)}(x). \end{aligned}$$

当 $0\leqslant k\leqslant m-1$ 时,

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x^*) &= \sum_{i=0}^{k} C_k^i m(m-1)\cdots(m-i+1)(x^*-x^*)^{m-i} g^{(k-i)}(x^*) \\ &= 0; \end{aligned}$$

当 $k=m$ 时,

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x^*) &= \sum_{i=0}^{m} C_m^i m(m-1)\cdots(m-i+1)(x^*-x^*)^{m-i} g^{(m-i)}(x^*) \\ &= m\,!g(x^*)\neq 0. \end{aligned}$$

充分性.设 x^* 使得

$$f(x^*)=0,\ f'(x^*)=0,\ \cdots,f^{(m-1)}(x^*)=0,f^{(m)}(x^*)\neq 0.$$

由泰勒公式得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x^*)+f'(x^*)(x-x^*)+\cdots+\frac{f^{(m-1)}(x^*)}{(m-1)\,!}(x-x^*)^{m-1} \\ &\quad +\frac{f^{(m)}[x^*+\theta(x-x^*)]}{m\,!}(x-x^*)^m \\ &= \frac{f^{(m)}[x^*+\theta(x-x^*)]}{m\,!}(x-x^*)^m, \end{aligned}$$

其中 $0<\theta<1$.令

$$g(x)=\frac{1}{m!}f^{(m)}[x^*+\theta(x-x^*)],$$

则有

$$f(x)=(x-x^*)^m g(x)\quad 且\quad g(x^*)=\frac{1}{m!}f^{(m)}(x^*)\neq 0.$$

根据定义 x^* 为 $f(x)$ 的 m 重零点.

例 2.3　设 $f(x)=0$ 在$[a,b]$上有根 x^*.根的第 k 次近似值为 x_k,且 $x_k\in[a,b]$,证明

$$|x^*-x_k|\leqslant\frac{|f(x_k)|}{m},$$

其中 $m=\min\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$.

证　由泰勒展开式得

$$f(x^*)=f(x_k)+f'(\xi_k)(x^*-x_k)=0,$$

其中 ξ_k 介于 x_k 和 x^* 之间.由上式解得

$$x^*-x_k=-\frac{f(x_k)}{f'(\xi_k)},$$

两边取绝对值得到

$$|x^*-x_k|=\frac{|f(x_k)|}{|f'(\xi_k)|}\leqslant\frac{|f(x_k)|}{m}.$$

2.2.2　二分法

例 2.4　证明方程

$$e^x+10x-2=0$$

存在唯一实根 $x^*\in(0,1)$.用二分法求出此根,要求误差不超过$\frac{1}{2}\times10^{-2}$.

解　记 $f(x)=e^x+10x-2$,则对任意 $x\in\mathbf{R}$,$f'(x)=e^x+10>0$.因而 $f(x)$是严格单调的,$f(x)=0$ 最多有一根.又因为 $f(0)=-1<0$,$f(1)=e+8>0$,所以 $f(x)=0$ 有唯一实根 $x^*\in(0,1)$.

用二分法求解.要使$|x_k-x^*|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-2}$,只要

$$\frac{1-0}{2^{k+1}}\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-2},$$

解得 $k \geqslant \frac{2}{\lg 2} = 6.64$.取 $k = 7$.所以只要二等分 7 次,即可求得满足精度要求的根.计算过程列于表 2.1.所以, $x^* \approx \frac{1}{2}(0.0859375 + 0.09375) \approx 0.09$.

表 2.1

k	a_k［$f(a_k)$的符号］	x_k［$f(x_k)$的符号］	b_k［$f(b_k)$的符号］
0	0(－)	0.5(＋)	1(＋)
1	0(－)	0.25(＋)	0.5(＋)
2	0(－)	0.125(＋)	0.25(＋)
3	0(－)	0.0625(－)	0.125(＋)
4	0.0625(－)	0.09375(＋)	0.125(＋)
5	0.0625(－)	0.078125(－)	0.09375(＋)
6	0.078125(－)	0.0859375(－)	0.09375(＋)
7	0.0859375(－)		0.09375(＋)

2.2.3 迭代法

例 2.5　用迭代法求方程 $e^x - 4x = 0$ 的根,精确至 3 位有效数.

解　记 $f(x) = e^x - 4x$, $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = 4x$.

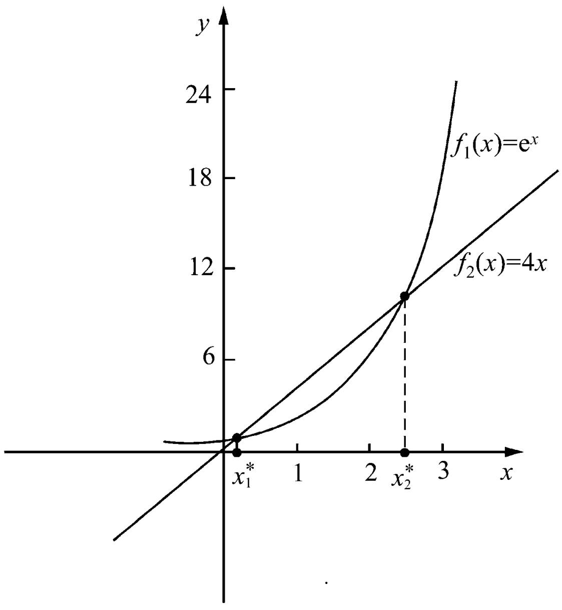


图 2.5

作 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的图像,见图2.5.由图 2.5 可知,两曲线有两个交点,其横坐标分别为 $x_1^* \in (0,1)$, $x_2^* \in (2,3)$. 因而 $f(x) = 0$ 有两个根 x_1^* 和 x_2^*.

首先,求 x_1^*.将 $f(x) = 0$ 在区间[0,1]内改写成等价形式:

$$x = \frac{1}{4}e^x.$$

记 $\varphi(x) = \frac{1}{4}e^x$, 则 $\varphi'(x) = \frac{1}{4}e^x$. 当 $x \in (0,1)$ 时, $\varphi(x) \in [\varphi(0), \varphi(1)] = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}e\right] \in [0,1]$, $|\varphi'(x)| \leqslant \varphi'(1) = \frac{e}{4} < 1$, 因而迭代格式

$$x_{k+1}=\frac{1}{4}e^{x_k}, \qquad k=0,1,2,\cdots$$

对任意 $x_0\in[0,1]$ 均收敛.取 $x_0=0.5$,计算得 $x_1=0.4122$,$x_2=0.3775$,$x_3=0.3675$,$x_4=0.3600$,$x_5=0.3583$,$x_6=0.3577$,$x_7=0.3575$.所以 $x_1^*=0.358$.

其次,求 x_2^*.将 $f(x)=0$ 在区间[2,3]内改写成等价形式

$$x=\ln(4x).$$

记 $\varphi(x)=\ln(4x)$,则 $\varphi'(x)=\frac{1}{x}$.当 $x\in[2,3]$ 时,$\varphi(x)\in[\varphi(2),\varphi(3)]=[\ln8,\ln12]\subset[2,3]$,$|\varphi'(x)|\leqslant\frac{1}{2}<1$,因而迭代格式

$$x_{k+1}=\ln(4x_k), \qquad k=0,1,2,\cdots$$

对任意 $x_0\in[2,3]$ 均收敛.取 $x_0=2.5$,计算得 $x_1=2.303$,$x_2=2.221$,$x_3=2.184$,$x_4=2.167$,$x_5=2.156$,$x_7=2.155$.所以 $x_2^*=2.16$.

例 2.6 证明对任何初始值 $x_0\in\mathbf{R}$,由迭代公式

$$x_{k+1}=\cos x_k, \qquad k=0,1,2,\cdots \tag{2.6}$$

所产生的序列$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$都收敛于方程 $x=\cos x$ 的根.

证 记 $\varphi(x)=\cos x$,则 $\varphi'(x)=-\sin x$.

(1) 先考虑区间$[-1,1]$.当 $x\in[-1,1]$ 时,$\varphi(x)=\cos x\in[-1,1]$,$|\varphi'(x)|\leqslant|\varphi'(1)|=\sin1<1$.故对任意初值 $x_0\in[-1,1]$,由迭代公式(2.6)产生的序列$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$都收敛于方程 $x=\cos x$ 的根.

(2) 对任意初值 $x_0\in\mathbf{R}$,有 $x_1=\cos x_0\in[-1,1]$.将此 x_1 看成新的迭代初值,则由(1)可知,由迭代公式(2.6)产生的序列$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$都收敛于方程 $x=\cos x$ 的根.

例 2.7 证明由迭代格式

$$x_{k+1}=\frac{x_k}{2}+\frac{1}{x_k}, \qquad k=0,1,2,\cdots \tag{2.7}$$

产生的序列对于 $x_0\geqslant1$ 均收敛于$\sqrt{2}$.

证 记 $\varphi(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$,则 $\varphi'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}$.取正数 $L\geqslant1+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

考虑区间$[1,L]$,其中 $L>\sqrt{2}$.当 $x\in[1,L]$时,$\varphi(x)\geqslant2\sqrt{\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x}}=\sqrt{2}$.又当

$x \in [1, \sqrt{2}]$ 时，$\varphi(x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \leqslant L$；当 $x \in [\sqrt{2}, L]$ 时，$\varphi(x) = x + \frac{2 - x^2}{2x} \leqslant x \leqslant L$. 故当 $x \in [1, L]$ 时，有 $\varphi(x) \in [1, L]$. 另外当 $x \in [1, L]$ 时，$\left|\varphi'(x)\right| \leqslant \frac{1}{2} < 1$. 所以对任意 $x_0 \in [1, L]$，由迭代格式(2.7)产生的序列收敛于方程

$$x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \tag{2.8}$$

在$[1, L]$内的唯一根 x^*. 由 L 的任意性，对任意 $x_0 \geqslant 1$，由迭代格式(2.7)产生的序列均收敛于方程(2.8)在$[1, \infty)$内的唯一根. 在(2.7)的两边令 k 趋向于无穷，得

$$x^* = \frac{x^*}{2} + \frac{1}{x^*},$$

于是 $x^* = \sqrt{2}$.

例 2.8　利用适当的迭代格式证明

$$\lim_{k \to \infty} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{k\text{ 个 }2} = 2.$$

证　考虑迭代格式

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \end{cases} \tag{2.9}$$

则

$$x_1 = \sqrt{2},$$

$$x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_k = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{k\text{ 个 }2}.$$

记 $\varphi(x) = \sqrt{2 + x}$，则 $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2 + x}}$. 当 $x \in [0, 2]$ 时，$\varphi(x) \in [\varphi(0),$