

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

国家理科基地教材

解析几何教程

(第二版)

廖华奎 王宝富 编著

2002 年全国普通高等学校优秀教材二等奖
国家理科基地创建名牌课程项目资助

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本教材作为普通高等教育“十一五”国家级规划教材之一,是在四川大学数学学院各专业多次讲授解析几何课程的基础上形成并修订的.主要内容包括向量代数,直线与平面,常见曲面,二次曲线和二次曲面,正交变换和仿射变换,平面射影几何简介等.

本教材各章节的主要数学思想显著、突出,脉络清晰分明.丰富的历史背景的介绍,穿插在各章节的开放性的思考题、练习题使教材更加充实.本教材强调几何的直观性,努力处理好几何与代数的关系,内容详略得当,注重与后继课程的衔接,为学生建立了一个整体的框架.

本教材可供综合性大学和师范院校数学系的教师和学生使用,也可作为科技工作者学习解析几何课程的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

解析几何教程/廖华奎,王宝富编著. —2版. —北京:科学出版社,2007
普通高等教育“十一五”国家级规划教材·国家理科基地教材
ISBN 978-7-03-019068-0

I.解… II.①廖… ②王… III.解析几何-高等学校-教材 IV.O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 083468 号

责任编辑:赵 靖/责任校对:李奕莹

责任印制:张克忠/封面设计:陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2000年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2007年6月第 二 版 印张:12

2007年6月第八次印刷 字数:226 000

印数:16 501—20 500

定价:18.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

第二版前言

本教材自出版以来,受到许多高校同行的关注和支持,对作者在解析几何课程的改革思路给予充分的肯定,并有幸于 2002 年获得全国普通高等学校优秀教材二等奖.根据许多同行的建议,我们曾对教材作过一次修订,在修订过程中增加了习题的简要解答,以便于教师和学生在教学过程中更方便地使用本教材.

随着高等学校教学改革的进一步深入,培养高素质、创新型的人才已是社会普遍关注的问题.四川大学是一所综合性大学,目标定位在创国际知名、国内一流的研究型大学.在这样一种氛围中,如何通过课堂教学培养学生的创造性,适应研究型大学的需要是我们一直在思考的问题.为此,在教学过程中,我们力求以“传道、授业、解惑”为根本,引导学生了解数学发展历史、理论联系实际以激发学生的学习兴趣,提高数学修养.针对解析几何课程,较原版内容,我们加强了如下几点.

1. 加强具有应用背景的几何问题的教学.回顾几何的发展史.几何学源于实践,而高于实践,我们应当在教学中让学生体会这种从实际问题中抽象建立几何模型的思想和方法.

2. 强调几何的直观性和形象化.代数学的知识确实能为解析几何的教学带来很多的便利.我们不能因为这些便利而丧失几何学的特点,为此,我们在教学过程中增加了部分命题和定理的几何方法证明.

3. 了解历史才能掌握未来.几何学的发展史是数学科学发展史的一个重要组成部分,对激发学生学习的兴趣,启迪学生的思维十分有益.我们精选了几何学发展过程中的代表性人物介绍,穿插在教学过程中很有益处.

四川大学和科学出版社给予了我们很大的支持,在此我们表示衷心的感谢.这次能够入选普通高等教育“十一五”国家级规划教材为我们再版《解析几何教程》这本书创造了契机,也使我们下决心将教学过程中的几点想法写入教材,是否妥当还有待于实践的检验.

由于我们的水平有限,即使是再版,也难免会有错误,希望读者能一如既往地提出宝贵意见.

作者

2007 年 3 月于成都

第一版修订本前言

本教材自出版以来已经多次印刷,得到许多高校教师的支持,被列为国家理科基地创建名牌课程项目.很多读者就教材内容给我们提出许多宝贵的意见.根据这些意见,结合我们的教学实践对本教材作了较全面的修订.

1. 调整了部分内容.比如:(1)在仿射坐标系下,平面方程的系数与平面法向量的表示法的关系作为一个注解,使读者对平面方程有更清晰的认识.(2)由于本教材对曲面的参数方程的阐述较少,将单叶双曲面和双曲抛物面的参数方程列为思考题,为读者提供一个用参数方程描述曲面的训练机会.

2. 修正了发现的印刷错误和其他错误.

3. 添加了习题的参考答案和提示,以便读者在解答问题时有一个参考和比较.

4. 增加了名词索引,以利于读者查阅基本概念.

我们衷心感谢所有读者的大力支持和宝贵意见.敬请读者一如既往地为本教材提出更多和更好的修改建议.

作 者

2006年2月

第一版前言

解析几何是高等院校各专业的重要基础课程,不仅数学、物理学等的许多后继课程要以此为基础,更为重要的是,它的思想方法和几何直观性可为许多抽象的、高维的数学物理问题提供模型和背景.

在面向 21 世纪教学内容和课程体系改革中,关于解析几何课程的改革已产生许多好的设想和教材.在我校,解析几何也被作为省级重点课程建设项目进行教改尝试.本教材的编写旨在对这几年的改革实践作一总结.

在该课程的教学过程中,常常能够感受到,现代的学生虽然有良好的素质,但受应试教育的影响,对数学的学习显得较为机械,对教师的依赖性较强,除了模仿例题做习题外,在怎样读书,特别是主动提出问题,思考问题,理解和掌握数学的思想方法,动手实践方面较为欠缺.为此,我们在教学过程中作了一些有益的尝试,并试图通过教材的改革来弥补这一点.

首先,我们期盼通过教材改革来引导学生学会看书,我们在全书的每一个章节中穿插了许多的思考题,这些思考题直接与内容相关,但又是学生易忽视的问题,有些是开放性的,想以此来培养学生良好的读书习惯,学会主动思考,动手实践.

第二,按照人们的思维习惯,我们对教学内容进行调整,按照从点到线,到面,再讨论其关系的思路,从简单到复杂,循序渐进,使学生的思维有一个自然的升华过程,以培养学生探索未知的数学素养.

第三,我们试图突出各章节的主要教学思想,立足为学生建立一个整体框架,并努力阐述几何与代数的关系,用代数的手段解决几何的问题,而省略去许多繁琐的运算,其中部分留给学生动手解决.

第四,我们更多地注重与后继课程密切相关的二次曲面阐述,而对二次曲线的讨论则因为思想方法相同而简略.

实事求是地讲,新生刚进校后,有很多地方并不能适应本书思路的讲法,但我们还是坚持这样,只希望通过我们的努力,让学生在后继的课程学习中学得主动、愉快.

解析几何课程是省重点课程建设项目,得到学校及数学学院的大力支持.李安民教授对几何学的许多深刻见解促进了本教材编写思想的形成,与彭联刚教授的多次讨论使编者获益匪浅.赵国松教授仔细审阅了本教材,并提出了许多宝贵意

见,在此一并表示感谢.由于编者水平有限,仍会有许多不足之处,另外,本书的编写思想也只是一家之观念,难免有不当之处,还请读者多提宝贵意见.

作 者

2000 年 3 月

目 录

第 1 章 向量代数	1
1.1 向量及其线性运算	1
1.2 标架与坐标	9
1.3 向量的内积	13
1.4 向量的外积	16
1.5 向量的混合积	21
近代科学的始祖——笛卡儿	23
第 2 章 直线与平面	25
2.1 直线、平面的方程	25
2.2 位置关系	30
2.3 度量关系	37
业余数学家之王——费马	41
第 3 章 常见曲面	43
3.1 空间曲面和空间曲线的方程	43
3.2 柱面和锥面	46
3.3 旋转面	51
3.4 二次曲面	54
3.5 直纹面	59
3.6 作简图	64
几何之父——欧几里得	67
第 4 章 二次曲线和二次曲面	69
4.1 坐标变换	69
4.2 二次曲面和二次曲线方程的化简	75
4.3 不变量	81
4.4 中心,渐近方向	87
4.5 二次曲面的直径面、对称面,二次曲线的直径、对称轴	91
4.6 切线、切平面	100
罗巴切夫斯基与非欧几何	102
第 5 章 正交变换和仿射变换	104
5.1 映射与变换	104

5.2	平面的正交变换	107
5.3	平面的仿射变换	111
5.4	二次曲线的度量分类与仿射分类	117
5.5	空间的正交变换与仿射变换	120
	数学王子——高斯	125
第 6 章	平面射影几何简介	127
6.1	齐次坐标,射影平面	127
6.2	对偶原理	130
6.3	交比	131
6.4	射影变换与二次曲线的射影分类	135
6.5	极点和配极	138
	几何学发展简史	143
	问题探索	151
	习题答案与提示	153
	参考文献	168
	附录 矩阵和线性方程组简介	169
	名词索引	176

第1章 向量代数

解析几何是利用代数方法来研究几何图形性质的一门学科,它包括平面解析几何和空间解析几何两部分.通过在几何空间中建立坐标系,就可将空间中的点用坐标表出,从而图形的几何性质可以表为图形上点的坐标之间的关系,特别是代数关系.17世纪初,法国数学家笛卡儿(Descartes R)和费马(Fermat)利用这种关系研究几何图形,创立了解析几何.从此变量被引进了数学,成为数学发展中的转折点,为微积分的出现创造了条件.

我们将从物理学中的力、速度及加速度等量中抽取出共性的东西而得到向量的概念及向量的加法的运算法则.进一步,研究数与向量的乘法运算;从力做功的现象中抽象出向量的内积;由力矩引出向量的外积;从平行六面体的体积计算引进向量的混合积.从而形成向量代数,使向量成为具有广泛应用的基本工具之一.

1.1 向量及其线性运算

1.1.1 向量的概念

我们从力学中知道,力、速度这些量既有大小,又有方向,它们可以用有向线段来表示.不仅如此,力(速度)的合成还可以通过有向线段来进行.这类既有大小,又有方向的量称为向量(或矢量).我们将代数运算引到向量中去,来研究图形性质.这种方法具有直观性,更容易理解图形性质的几何意义,并且它在物理学等学科中有重要的应用.此外向量的概念及其运算也为线性代数中深入理解向量空间提供了直观的几何背景.

既有大小,又有方向的量称为**向量(或矢量)**.我们用符号 $a, b, c, \dots$ 表示.

一个向量 a 可以用一有向线段 $\overline{AB}$ 来表示,有向线段的长度 $|\overline{AB}|$ 表示向量 a 的大小,从始点 A 到终点 B 的指向表示 a 的方向(图 1.1).

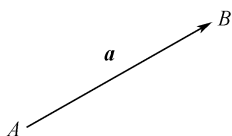


图 1.1

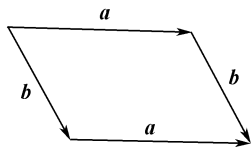


图 1.2

向量 a 的大小称为向量的**长度(或模)**,记为 $|a|$.

长度为零的向量称为**零向量**,记为 $\mathbf{0}$.

长度为 1 的向量称为**单位向量**.

如果一个向量能够由另一个向量经平行移动得到,则称这两个向量**相等**(图 1.2).

如果从同一个始点 A 在同一条直线上作等于向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的有向线段 $\overline{AB}, \overline{AC}$, 其终点 B, C 分布在点 A 的同一侧(两侧), 则称向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ **同向(反向)**. 同向或反向的两向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 称为**平行的向量**, 记为 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$. 与非零向量 $\mathbf{a}$ 同向的单位向量记为 $\mathbf{a}^0$.

与 $\mathbf{a}$ 的长度相等但反向的向量称为 $\mathbf{a}$ 的**反向量**或**负向量**, 记为 $-\mathbf{a}$.

思考题: 平面(空间)中具有同一始点的所有单位向量的终点的几何轨迹是什么图形?

1.1.2 向量的加法

回忆物理学中力、速度、位移的合成法.

定义 1.1.1 对于向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, 作有向线段 $\overline{AB} = \mathbf{a}, \overline{BC} = \mathbf{b}$, 把 $\overline{AC}$ 表示的向量 $\mathbf{c}$ 称为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的**和**, 记为 $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ (图 1.3), 即

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

由此公式表示的向量加法规则称为**三角形法则**.

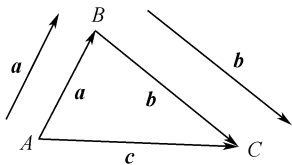


图 1.3

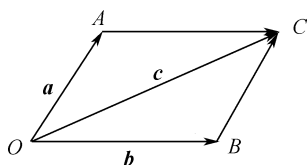


图 1.4

注: 从同一始点 O 作 $\overline{OA} = \mathbf{a}, \overline{OB} = \mathbf{b}$, 再以 OA 和 OB 为边作平行四边形 $OACB$, 则对角线 $\overline{OC}$ 也表示向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的和(图 1.4), 这称为向量的**平行四边形法则**.

向量的加法满足以下规律:

- (1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (交换律);
- (2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (结合律);
- (3) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$;
- (4) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

其中, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为任意向量. 这些规律可由加法运算的定义直接得出, 请读者自己证明.

作为加法的逆运算, 可定义减法如下.

定义 1.1.2 向量的减法 $a - b = a + (-b)$.

减法的几何意义如图 1.5, 即 $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.

由向量加法的三角形法则容易得到三角不等式

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

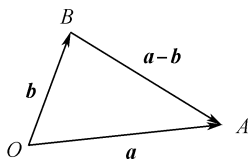


图 1.5

其中, a, b 为任意向量. 其几何意义是, 三角形两边之和大于第三边. 这个不等式可以推广到任意有限多个向量和的情形:

$$|a + b + \cdots + l| \leq |a| + |b| + \cdots + |l|.$$

思考题: 1. 三角不等式中等号成立的条件是什么?

2. $|a + b| = |a| - |b|$ 成立的条件是什么?

3. 证明平面上封闭折线所表示的向量和 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$ 一定为 $\mathbf{0}$. 将此结论推广至空间.

1.1.3 数量与向量的乘法

定义 1.1.3 实数 λ 与向量 a 的乘积 λa 是一个向量, 它的长度为 $|\lambda a| = |\lambda| \cdot |a|$, 它的方向当 $\lambda > 0$ 时与 a 相同, 当 $\lambda < 0$ 时与 a 相反. 当 $\lambda = 0$ 或 $a = \mathbf{0}$ 时, 则 $\lambda a = \mathbf{0}$.

设 $a \neq \mathbf{0}$, 因为 $|a|^{-1}a$ 与 a 同向, 且

$$||a|^{-1}a| = |a|^{-1}|a| = 1,$$

所以 $a^0 = |a|^{-1}a$. 这称为把 a 单位化.

思考题: 若 $a \parallel b$, 那么 a, b 之间的关系如何?

对于任意的向量 a, b 和任意实数 λ, μ , 数量与向量的乘法满足以下规律:

$$(1) \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a;$$

$$(2) (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a;$$

$$(3) \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b.$$

(1) 可以用定义 1.1.3 直接验证.

(2) 的证明. 若 $a = \mathbf{0}$ 或 λ, μ 中有一个为零时, 则 (2) 显然成立. 下面设 $\lambda\mu \neq 0, a \neq \mathbf{0}$.

情形 1 若 $\lambda\mu > 0$, 则 λa 与 μa 同向, 且 $(\lambda + \mu)a$ 与 $\lambda a + \mu a$ 同向, 因此有

$$|\lambda a + \mu a| = |\lambda a| + |\mu a| = (|\lambda| + |\mu|)|a|,$$

又有

$$|(\lambda + \mu)a| = |\lambda + \mu||a| = (|\lambda| + |\mu|)|a|.$$

因此

$$|(\lambda + \mu)a| = |\lambda a + \mu a|,$$

故

$$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}.$$

情形 2 若 $\lambda\mu < 0$, 不妨设 $\lambda > 0, \mu < 0$.

1° 若 $\lambda + \mu = 0$, 则 $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \mathbf{0}$, 而

$$\begin{aligned}\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a} &= \lambda\mathbf{a} + (-\lambda)\mathbf{a} = (\lambda\mathbf{a}) + (-1)(\lambda\mathbf{a}) \\ &= (\lambda\mathbf{a}) - (\lambda\mathbf{a}) = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

故(2)成立.

2° 若 $\lambda + \mu > 0$, 则由情形 1 知

$$[(\lambda + \mu) + (-\mu)]\mathbf{a} = (\lambda + \mu)\mathbf{a} + (-\mu)\mathbf{a},$$

即得

$$\lambda\mathbf{a} = (\lambda + \mu)\mathbf{a} + (-\mu\mathbf{a}) = (\lambda + \mu)\mathbf{a} - \mu\mathbf{a},$$

从而有

$$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}.$$

3° 若 $\lambda + \mu < 0$, 则由情形 1 知

$$\begin{aligned}[(\lambda + \mu) + (-\lambda)]\mathbf{a} &= (\lambda + \mu)\mathbf{a} + (-\lambda)\mathbf{a} \\ &= (\lambda + \mu)\mathbf{a} - (\lambda\mathbf{a}),\end{aligned}$$

类似于 2° 可得(2)式.

(3)的证明. 若 $\lambda = 0$ 或者 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 中有一个为 $\mathbf{0}$, 则(3)显然成立. 下面设 $\lambda \neq 0, \mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

情形 1 若 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 平行, 则由定义 1.1.3 后面的思考题结论知存在实数 μ 使 $\mathbf{b} = \mu\mathbf{a}$, 于是

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \lambda(\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}) = \lambda[(1 + \mu)\mathbf{a}] \\ &= [\lambda(1 + \mu)]\mathbf{a} = [\lambda + \lambda\mu]\mathbf{a} \\ &= \lambda\mathbf{a} + (\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \lambda(\mu\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}.\end{aligned}$$

情形 2 若 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不平行, 那么当 $\lambda > 0$ 时, 如图 1.6 作 $\overline{OA} = \mathbf{a}, \overline{AB} = \mathbf{b}$, 于是 $\overline{OB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, 作 $\overline{OC} = \lambda\mathbf{a}$, $\overline{CD} = \lambda\mathbf{b}$, 则 $\triangle OAB \sim \triangle OCD$, 从而 D 必在直线 OB 上. 于是 $\overline{OD} = \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, 又 $\overline{OD} = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$. 故有

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}.$$

当 $\lambda < 0$ 时, 可作类似的讨论.

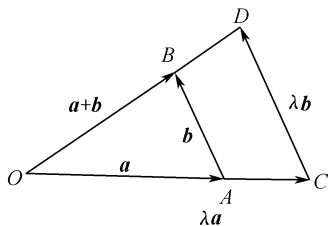


图 1.6

1.1.4 共线、共面的向量组

向量的加法和数量与向量乘法统称为向量的线性运算.

设 $\mathbf{a}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是一组向量, $k_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是一组实数, 则 $\sum_{i=1}^n k_i \mathbf{a}_i$ 是一个向量, 称它为向量组 $\mathbf{a}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的一个线性组合.

定义 1.1.4 平行于同一直线(平面)的向量组称为**共线的(共面的)向量组**. 两个向量共线等价于它们平行. 因而共线向量组实质上是一组互相平行的向量. 零向量与任意向量共线; 共线的向量组一定共面; 若 $a = \lambda b$ 或 $b = \mu a$, 则 a 与 b 共线.

思考题: 两个向量是否一定共面?

定义 1.1.5 若对于向量组 $a_i (i=1, 2, \dots, n)$, 存在不全为 0 的实数 $k_i (i=1, 2, \dots, n)$, 使

$$\sum_{i=1}^n k_i a_i = 0,$$

则称向量组 $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ **线性相关**, 否则称向量组**线性无关**.

思考题: 对照此定义, 采用陈述的方式, 写出向量组线性无关的定义.

命题 1.1.1 两个向量 a, b 共线的充要条件是 a, b 线性相关.

证明 必要性 若 a, b 中有一个为零向量, 不妨设 $a = 0$, 则对实数 $k_1 = 1, k_2 = 0$, 有

$$k_1 a + k_2 b = 1 \cdot 0 + 0 \cdot b = 0,$$

因而 a, b 线性相关.

若 a, b 都不为 0, 且同向, 则 $a^0 = b^0$, 从而有

$$b = |b| b^0 = |b| a^0 = |b| (|a|^{-1} a) = |b| (|a|^{-1}) a.$$

令 $k_1 = |b| |a|^{-1}, k_2 = -1$, 则有

$$k_1 a + k_2 b = 0.$$

故 a, b 线性相关. 若 a, b 反向, 可作类似的讨论.

充分性 设存在不全为 0 的实数 k_1, k_2 使 $k_1 a + k_2 b = 0$. 不妨设 $k_1 \neq 0$, 则有 $a = (-k_1^{-1} k_2) b$, 故 a, b 共线.

思考题: 请用几何方法证明命题 1.1.1.

思考题: 请考虑两向量线性无关的充要条件及其几何特征.

推论 1.1.1 若 a, b 共线且 $a \neq 0$, 则存在唯一的实数 λ 使得 $b = \lambda a$.

命题 1.1.2 三向量 a, b, c 共面(不共面)的充要条件是 a, b, c 线性相关(线性无关).

此命题的证明留作习题.

思考题: 在平面和空间中各画出一线性相关和线性无关的向量组.

定理 1.1.1 设 a, b 不共线, 则 c 与 a, b 共面的充要条件是存在唯一的一对实数 λ, μ 使得

$$c = \lambda a + \mu b.$$

证明 必要性 由 c 与 a, b 共面及命题 1.1.2 知, 存在不全为 0 的实数 k_1, k_2, k_3 使

$$k_1 \mathbf{a} + k_2 \mathbf{b} + k_3 \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

我们断定 $k_3 \neq 0$. 否则有不全为 0 的实数 k_1, k_2 , 使得

$$k_1 \mathbf{a} + k_2 \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

这与 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不共线矛盾. 因而我们得到

$$\mathbf{c} = (-k_3^{-1} k_1) \mathbf{a} + (-k_3^{-1} k_2) \mathbf{b}.$$

令 $\lambda = -k_3^{-1} k_1, \mu = -k_3^{-1} k_2$, 那么

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}.$$

假如另有 λ', μ' 使 $\mathbf{c} = \lambda' \mathbf{a} + \mu' \mathbf{b}$, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{c} - \mathbf{c} = (\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) - (\lambda' \mathbf{a} + \mu' \mathbf{b}) \\ &= (\lambda - \lambda') \mathbf{a} + (\mu - \mu') \mathbf{b}. \end{aligned}$$

因为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不共线, 所以必有

$$\lambda - \lambda' = 0, \quad \mu - \mu' = 0,$$

于是 $\lambda = \lambda', \mu = \mu'$. 唯一性得证.

充分性是显然的.

定理 1.1.2 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面, 则对空间中任一向量 $\mathbf{d}$ 均存在唯一的数组 (λ, μ, γ) , 使得

$$\mathbf{d} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}.$$

证明 如图 1.7, 取一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}, \overrightarrow{OD} = \mathbf{d}$. 过 D 作一直线与 OC 平行, 且与 OA 和 OB 决定的平面交于 M . 过 M 作一直线与 OB 平行, 且与 OA 交于 N . 因为

$$\overrightarrow{ON} \parallel \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{NM} \parallel \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{MD} \parallel \mathbf{c},$$

所以分别存在实数 λ, μ, γ 使得

$$\overrightarrow{ON} = \lambda \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{NM} = \mu \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{MD} = \gamma \mathbf{c}.$$

从而

$$\mathbf{d} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MD} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}.$$

唯一性 若

$$\overrightarrow{OD} = \lambda_1 \mathbf{a} + \mu_1 \mathbf{b} + \gamma_1 \mathbf{c} = \lambda_2 \mathbf{a} + \mu_2 \mathbf{b} + \gamma_2 \mathbf{c},$$

则得

$$(\lambda - \lambda_1) \mathbf{a} + (\mu - \mu_1) \mathbf{b} + (\gamma - \gamma_1) \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面, 所以

$$\lambda = \lambda_1, \quad \mu = \mu_1, \quad \gamma = \gamma_1.$$

思考题: 平面上的任意三个向量是否线性相关? 空间中的任意四个向量是否线性相关?

例 1.1.1 设 A, B 是不同的两点, 则点 P 在直线 AB 上的充要条件是存在唯

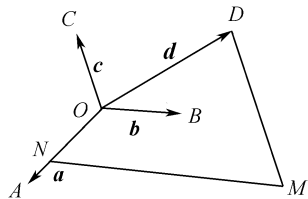


图 1.7

一的一对实数 λ, μ , 使得

$$\begin{cases} \overline{OP} = \lambda \overline{OA} + \mu \overline{OB}, \\ \lambda + \mu = 1, \end{cases} \quad (*)$$

其中 O 是任意取定的一点. 而 P 在线段 AB 上的充要条件是 $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ 且 $(*)$ 成立.

证明 必要性 设 P 在直线 AB 上, 则 $\overline{AP}$ 与 $\overline{AB}$ 共线, 显然 $\overline{AB} \neq \mathbf{0}$. 由推论 1.1.1 得存在唯一的 k 使

$$\overline{AP} = k \overline{AB}.$$

任取一点 O (图 1.8), 由上式得

$$\overline{OP} - \overline{OA} = k(\overline{OB} - \overline{OA}),$$

即有

$$\overline{OP} = (1-k) \overline{OA} + k \overline{OB}.$$

令 $\lambda = 1-k, \mu = k$, 因而 $\lambda + \mu = 1$, 且

$$\overline{OP} = \lambda \overline{OA} + \mu \overline{OB}.$$

由 k 的唯一性知 λ, μ 是唯一的.

充分性 若对某一点 O , $(*)$ 式成立, 则

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \overline{OP} - \overline{OA} = \lambda \overline{OA} + \mu \overline{OB} - (\lambda + \mu) \overline{OA} \\ &= \mu \overline{OB} - \mu \overline{OA} = \mu(\overline{OB} - \overline{OA}) = \mu \overline{AB}, \end{aligned}$$

因而 $\overline{AP}$ 与 $\overline{AB}$ 共线, 所以 P 在直线 AB 上.

对于后半部分, 由于 P 在线段 AB 上, 所以 $\overline{AP}$ 与 $\overline{AB}$ 同向, 故 $(*)$ 成立且有 $0 \leq |\overline{AP}| \leq |\overline{AB}|$, 即 $0 \leq k \leq 1$, 从而 $(*)$ 中的 $\lambda = 1-k \geq 0, \mu = k \geq 0$. 反之, 若 $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$, 由 $\lambda + \mu = 1$, 知 $0 \leq \mu \leq 1$, 因而 $0 \leq |\overline{AP}| \leq |\overline{AB}|$, 即 P 在线段 AB 上.

例 1.1.2 如图 1.9, 已知 $\triangle ABC$ 及一点 O , 试证 O 是 $\triangle ABC$ 的重心的充要条件是 $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \mathbf{0}$.

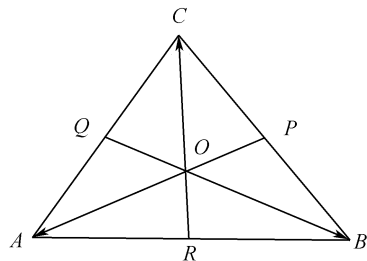


图 1.9

证明 必要性 设 O 是 $\triangle ABC$ 的重心, P, Q, R 分别是三边 BC, CA, AB 的中点, 则

$$\begin{aligned} \overline{OA} &= \frac{2}{3} \overline{PA} = \frac{2}{3} (\overline{PB} + \overline{BA}) \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \overline{CB} + \overline{BA} \right) \\ &= \frac{1}{3} \overline{CB} + \frac{2}{3} \overline{BA}, \end{aligned}$$

同理得到

$$\overline{OB} = \frac{1}{3} \overline{AC} + \frac{2}{3} \overline{CB},$$

$$\overline{OC} = \frac{1}{3} \overline{BA} + \frac{2}{3} \overline{AC}.$$

于是

$$\begin{aligned} \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} &= \frac{1}{3}(\overline{CB} + \overline{AC} + \overline{BA}) + \frac{2}{3}(\overline{BA} + \overline{CB} + \overline{AC}) \\ &= \overline{CB} + \overline{BA} + \overline{AC} = \overline{CA} + \overline{AC} = \overline{CC} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

充分性 设 $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \mathbf{0}$, 而 $\triangle ABC$ 的重心为 O^* , 则由必要性知 $\overline{O^*A} + \overline{O^*B} + \overline{O^*C} = \mathbf{0}$. 但是

$$\begin{aligned} \overline{OA} &= \overline{OO^*} + \overline{O^*A}, & \overline{OB} &= \overline{OO^*} + \overline{O^*B}, \\ \overline{OC} &= \overline{OO^*} + \overline{O^*C}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 3 \overline{OO^*} + \overline{O^*A} + \overline{O^*B} + \overline{O^*C} \\ &= 3 \overline{OO^*}. \end{aligned}$$

故 $\overline{OO^*} = \mathbf{0}$, 即 $O^* = O$.

习题 1.1

1. 试证向量加法的结合律, 即对任意向量 a, b, c , 成立

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

2. 设 a, b, c 两两不共线, 试证顺次将它们的终点与始点相连而成一个三角形的充要条件是 $a + b + c = \mathbf{0}$.

3. 试证三角形的三中线可以构成一个三角形.

4. 用向量法证明梯形两腰中点连线平行于上、下底且等于它们长度和的一半.

5. 试证命题 1.1.2.

6. 设 A, B, C 是不共线的三点, 它们决定一平面 Π , 则点 P 在 Π 上的充要条件是存在唯一的数组 (λ, μ, γ) 使得

$$\begin{cases} \overline{OP} = \lambda \overline{OA} + \mu \overline{OB} + \gamma \overline{OC}, \\ \lambda + \mu + \gamma = 1, \end{cases} \quad (*)$$

其中, O 是任意一点. P 在 $\triangle ABC$ 内的充要条件是 $(*)$ 与 $\lambda \geq 0, \mu \geq 0, \gamma \geq 0$ 同时成立.

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 分别在边 BC 与 CA 上, 且 $BD = \frac{1}{3} BC, CE = \frac{1}{3} CA$, AD 与 BE 交于 R , 试证

$$RD = \frac{1}{7} AD, \quad RE = \frac{4}{7} BE.$$

8. 用向量法证明 $\triangle ABC$ 的三条中线交于一点 P , 并且对任意一点 O 有

$$\overline{OP} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}).$$

9. 用向量法证明四面体 $ABCD$ 的对棱中点连线交于一点 P , 且对任意一点 O 有

$$\overline{OP} = \frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}).$$

10. 设 $A_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是正 n 边形的顶点, O 是它的中心, 试证 $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} = \mathbf{0}$.

11. 试证: 三点 A, B, C 共线的充要条件是存在不全为零的实数 λ, μ, γ , 使得

$$\lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC} = \mathbf{0} \quad \text{且} \quad \lambda + \mu + \gamma = 0,$$

其中, O 是任意取定的一点.

1.2 标架与坐标

向量法的优点在于比较直观, 但是向量的运算不如数的运算简洁, 为了取长补短, 我们给向量引进坐标, 同时也给点引进坐标, 把向量法与坐标法结合起来使用.

1.2.1 标架, 向量和点的坐标

空间中任意三个有次序的不共面的向量组 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 称为空间中的一个基. 根据定理 1.1.2, 对于空间中任一向量 $\mathbf{a}$, 存在唯一的数组 (x, y, z) , 使

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3,$$

我们把有序三元实数组 (x, y, z) 称为 $\mathbf{a}$ 在基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 下的坐标, 记为 $\mathbf{a} = (x, y, z)$.

在空间中任意取定一点 O , 则任意一点 M 与向量 $\overrightarrow{OM}$ 一一对应, 我们把向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 的位置向量 (或径矢).

定义 1.2.1 空间中一个点 O 和一个基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 合在一起称为空间的一个仿射标架或仿射坐标系, 简称标架, 记为 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, 其中 O 称为标架的原点, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 称为标架的坐标向量. 对于空间中任一点 M , 把它的位置向量 $\overrightarrow{OM}$ 在基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 下的坐标称为点 M 在仿射标架 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 中的坐标. 若 $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$, 则点 M 的坐标记为 $M(x, y, z)$.

由定义 1.2.1 知, 点 M 在标架 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 中的坐标为 (x, y, z) 当且仅当

$$\overrightarrow{OM} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.$$

以后我们把向量 $\mathbf{a}$ 在基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 中的坐标也称为 $\mathbf{a}$ 在仿射标架 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 中的坐标.

空间中取定一个标架后, 由定理 1.1.2 知, 空间中全体向量的集合与全体有序三元实数组的集合之间就建立了一一对应; 通过位置向量, 空间中全体点的集合与全体有序三元实数组的集合之间也建立了一一对应的关系.

设 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 为空间的一个标架, 过原点 O , 且分别以 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 为方向的有向直线分别称为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 统称为坐标轴. 由每两条坐标轴决定的平面称为坐标平面, 它们分别是 xOy, yOz, zOx 平面. 坐标平面把空间分成八个部分, 称为八个卦限 (图 1.10), 在每个卦限内, 点的坐标的符号不变.

将右手四指 (拇指除外) 从 x 轴方向弯向 y 轴方向 (转角小于 π), 如果拇指所

指的方向与 z 轴方向在 xOy 平面同侧, 则称此坐标系为右手系, 否则称为左手系 (图 1.11).

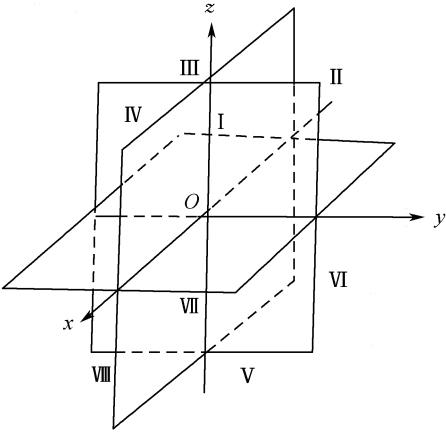


图 1.10

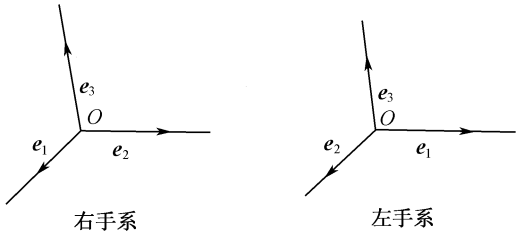


图 1.11

各卦限内点的坐标符号如下表(右手系).

卦限 坐标	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	-	-	+	+	-	-	+
y	+	+	-	-	+	+	-	-
z	+	+	+	+	-	-	-	-

思考题: 请确定坐标轴和坐标面上点的符号.

定义 1.2.2 如果 e_1, e_2, e_3 是两两垂直的单位向量, 则 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 称为直角标架或直角坐标系.

注:如果 e_1, e_2, e_3 仅是两两垂直的向量,则 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 称为笛卡儿标架.

直角标架是特殊的仿射标架.点(或向量)在直角标架中的坐标称为它的直角坐标,在仿射标架中的坐标称为它的仿射坐标.

思考题:如何定义平面上的仿射标架和直角标架?

1.2.2 用坐标作向量的线性运算

取定标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$, 设向量 $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3)$, 则容易证明下列命题.

命题 1.2.1 (1) $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.

(2) $a - b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$.

(3) 对于任意实数 λ , 有 $\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$.

定理 1.2.1 向量的坐标等于其终点坐标减去其始点坐标.

证明 对于向量 $\overline{AB}$, 设 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\overline{OA} = (x_1, y_1, z_1), \quad \overline{OB} = (x_2, y_2, z_2).$$

因为 $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$, 所以

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

定理 1.2.2 a 与 b 共线当且仅当对应坐标成比例.

思考题: 设 $P_i(x_i, y_i, z_i), i=1, 2, 3$, 推导三点 P_i 共线的充要条件.

对于线段 $P_1 P_2 (P_1 \neq P_2)$, 如果点 P 满足 $\overline{P_1 P} = \lambda \overline{P P_2}$, 则称点 P 分线段 $P_1 P_2$ 成定比 λ , 当 $\lambda > 0$ 时, $\overline{P_1 P}$ 与 $\overline{P P_2}$ 同向, 点 P 在线段 $P_1 P_2$ 内, 称 P 为内分点; 当 $\lambda < 0$ 时, $\overline{P_1 P}$ 与 $\overline{P P_2}$ 反向, 点 P 在线段 $P_1 P_2$ 外, 称 P 为外分点; 当 $\lambda = 0$ 时, P 与 P_1 重合. 假若 $\lambda = -1$, 则 $\overline{P_1 P} = -\overline{P P_2}$, 即 $\overline{P_1 P_2} = \mathbf{0}$, 这与 $P_1 \neq P_2$ 矛盾, 所以 $\lambda \neq -1$.

请读者自证下列命题.

命题 1.2.2 设 $P_i(x_i, y_i, z_i), i=1, 2$, 则分线段 $P_1 P_2$ 成定比 $\lambda (\lambda \neq -1)$ 的分点 P 的坐标是

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (1.2.1)$$

推论 1.2.1 线段 $P_1 P_2$ 的中点坐标为

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (1.2.2)$$

例 1.2.1 用坐标法证明四面体对棱中点的连线交于一点.

证明 设四面体 $ABCD$ (图 1.12) 的棱 AB, AC, AD, BC, CD, DB 的中点分别为 B', C', D', E, F, G .

取仿射标架 $\{A; \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\}$, 则各点的坐标分别为

$$A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(0, 1, 0), D(0, 0, 1),$$

$$B'\left[\frac{1}{2}, 0, 0\right], C'\left[0, \frac{1}{2}, 0\right], D'\left[0, 0, \frac{1}{2}\right], \\ E\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right], F\left[0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], G\left[\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right].$$

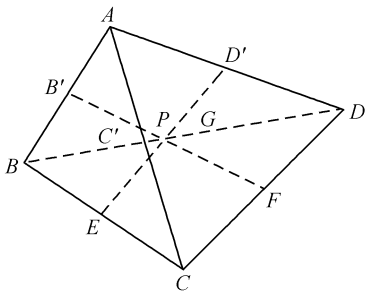


图 1.12

假设 $B'F$ 与 $D'E$ 交于点 $P(x, y, z)$, 设 $\overline{B'P} = k \overline{PF}$, $\overline{D'P} = l \overline{PE}$, 则 P 的坐标为

$$x = \frac{\frac{1}{2} + k \cdot 0}{1 + k}, \quad y = \frac{0 + k \cdot \frac{1}{2}}{1 + k}, \quad z = \frac{0 + k \cdot \frac{1}{2}}{1 + k}, \\ x = \frac{0 + l \cdot \frac{1}{2}}{1 + l}, \quad y = \frac{0 + l \cdot \frac{1}{2}}{1 + l}, \quad z = \frac{\frac{1}{2} + l \cdot 0}{1 + l},$$

解得 $k = l = 1$, 从而交点 P 存在, 且 P 的坐标为 $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

设 $B'F$ 与 $C'G$ 交于 P' , 同理可得 $P'\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, 所以 P 与 P' 重合, 即 $B'F$, $D'E$, $C'G$ 交于一点.

另法: 先后求出 $B'F$, $D'E$, $C'G$ 的中点坐标, 知道它们的坐标都相同, 因而三线交于一点.

习题 1.2

1. 给定直角坐标系, 设 $P(x, y, z)$, 求 P 分别关于 xOy 平面, x 轴与原点的对称点的坐标.
2. 设平行四边形 $ABCD$ 的对角线交于点 P , 设

$$\overline{DM} = \frac{1}{5} \overline{DB}, \quad \overline{CN} = \frac{1}{6} \overline{CA}.$$

在仿射标架 $\{A; \overline{AB}, \overline{AD}\}$ 下, 求点 P, M, N 的坐标以及向量 $\overline{MN}$ 的坐标.

3. 设 $\mathbf{a} = (1, 5, 2)$, $\mathbf{b} = (0, -3, 4)$, $\mathbf{c} = (-2, 3, -1)$, 求下列向量的坐标:

$$(1) 2\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}; \quad (2) -3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 4\mathbf{c}.$$

4. 判断下列各组的三个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是否共面? 能否将 $\mathbf{c}$ 表示成 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的线性组合? 若能表

示,则写出表示式.

$$(1) \mathbf{a}=(5,2,1), \mathbf{b}=(-1,4,2), \mathbf{c}=(-1,-1,5);$$

$$(2) \mathbf{a}=(6,4,2), \mathbf{b}=(-9,6,3), \mathbf{c}=(-3,6,3);$$

$$(3) \mathbf{a}=(1,2,-3), \mathbf{b}=(-2,-4,6), \mathbf{c}=(1,0,5).$$

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 设 D, E 是边 BC 的三等分点, 试用 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 表出 $\overline{AD}$ 与 $\overline{AE}$.

6. 设在一平面 Π 上取一个仿射标架 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, Π 上三点 $P_i(x_i, y_i), i=1, 2, 3$, 共线当且仅当

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 设 P, Q, R 分别是直线 AB, BC, CA 上的点, 并且

$$\overline{AP} = \lambda \overline{PB}, \quad \overline{BQ} = \mu \overline{QC}, \quad \overline{CR} = \nu \overline{RA}.$$

证明 P, Q, R 共线当且仅当 $\lambda\mu\nu = -1$.

8. 试证命题 1.2.1.

1.3 向量的内积

物理学中, 一个质点在力 $\mathbf{f}$ 的作用下, 经过位移 $\mathbf{s}$, 图 1.13 中 $\mathbf{f}$ 所做的功为

$$W = |\mathbf{f}| |\mathbf{s}| \cos \alpha,$$

其中, α 是 $\mathbf{f}$ 与 $\mathbf{s}$ 的夹角. 类似于功 W 这样的量, 我们引进向量的内积.

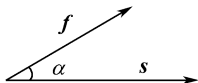


图 1.13

1.3.1 向量内积的定义和性质

定义 1.3.1 两向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的内积, 记为 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 规定为一个实数:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

其中 $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 是 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角, 且 $0 \leq \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \pi$.

若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 中有一个是零向量, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

由定义 1.3.1 可得

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}. \quad (1.3.1)$$

当 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 时,

$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}. \quad (1.3.2)$$

命题 1.3.1 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 互相垂直当且仅当 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

(1.3.1) 和 (1.3.2) 表明了向量的内积, 向量的长度和向量的夹角之间的关系. 对任意的向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 及任意实数 λ , 向量的内积满足以下规律:

$$(1) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a},$$

$$(2) (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

$$(3) (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c},$$

$$(4) \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0, \text{ 等号当且仅当 } \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ 时成立.}$$

证明 (1), (2), (4) 由定义容易证明, 请读者自证之.

对于(3), 若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 中有零向量, 则等式成立. 以下设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 皆为非零向量.

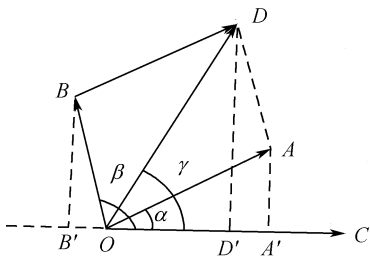


图 1.14

如图 1.14, 设 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{OD} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \alpha$, $\angle(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \beta$, $\angle(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}) = \gamma$. 过 A, B, D 分别向 OC 所在直线作垂线, 垂足分别为 A', B', D' , 则

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot \cos \gamma,$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{c}| (|\mathbf{a}| \cos \alpha + |\mathbf{b}| \cos \beta).$$

由平面几何知识易证 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \cos \gamma =$

$$|\mathbf{a}| \cos \alpha + |\mathbf{b}| \cos \beta, \text{ 因而}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}.$$

例 1.3.1 证明三角形的三条高交于一点.

证明 设 $\triangle ABC$ 边 AB, CA 上的高交于 O 点, 以 O 为始点, 以 A, B, C 为终点的向量分别记为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ (图 1.15).

由 $CO \perp BA$, 得 $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$.

由 $BO \perp AC$, 得 $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0$.

以上两式相加, 可得 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = 0$. 所以 $OA \perp BC$, 即 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高通过 O 点. 这就证明了三高相交于一点.

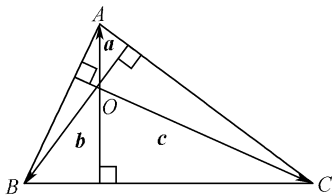


图 1.15

例 1.3.2 用向量法证明余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

证明 如图 1.16 所示,

$$\mathbf{c} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \mathbf{a} - \mathbf{b},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} &= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \end{aligned}$$

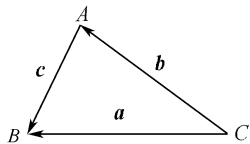


图 1.16

故

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

例 1.3.3 设密度为 ρ 的液体流过平面 Π 上面积为 S 的一个区域, 液体在此区域上各点处的流速均为 $\mathbf{v}$, 设 $\mathbf{n}$ 为垂直于平面 Π 的单位向量 (图 1.17), 求单位时间内经过该区域流向 $\mathbf{n}$ 所指一侧的液体的质量 M .

解 单位时间内流过该区域的液体组成一个底面积为 S , 斜高为 $|\mathbf{v}|$ 的斜柱

体.该柱体的斜高与底面的垂线的夹角就是向量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角 θ , 所以这柱体的高为 $|\boldsymbol{v}| \cos \theta$, 体积为 $S|\boldsymbol{v}| \cos \theta = S\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$. 因而单位时间内经过该区域流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一侧的液体的质量为 $M = \rho S\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$.

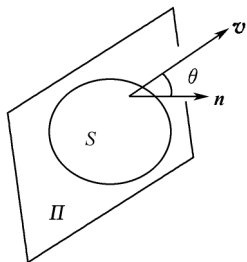


图 1.17

1.3.2 用坐标计算向量的内积

取仿射标架 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 设向量 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \left[\sum_{i=1}^3 a_i \boldsymbol{e}_i \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^3 b_j \boldsymbol{e}_j \right] = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j. \quad (1.3.3)$$

可见只要知道坐标向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 之间的内积(9个数, 实质上只有6个数)就可以求出任意两个向量的内积. 这九个数称为仿射标架 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 的度量参数.

如果 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 是直角标架, 则有

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

于是由(1.3.3)式得到

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i. \quad (1.3.4)$$

定理 1.3.1 在直角坐标系中, 两向量的内积等于它们的对应坐标的乘积之和.

在直角坐标系中, 由定理 1.3.1 得到, 向量 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 的长度为

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \quad (1.3.5)$$

由此得空间两点 $P_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i=1, 2$) 的距离公式为

$$|\overline{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1.3.6)$$

思考题: (1.3.4), (1.3.5), (1.3.6) 三式成立的前提条件是什么? 现在你对距离这一概念有何新认识?

1.3.3 方向角和方向余弦

在直角坐标系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 中, 向量 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 与坐标向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 的交角(大于等于 0, 小于等于 π)称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角, 分别用 α, β, γ 来表示, 它们的余弦 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

因为

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_1 = a_1 = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{e}_1| \cos \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1) = |\boldsymbol{a}| \cos \alpha,$$

所以

$$\cos \alpha = \frac{a}{|\mathbf{a}|}.$$

同理

$$\cos \beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}.$$

由此可得

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (1.3.7)$$

因而

$$\mathbf{a}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

与方向余弦成比例的任一个数组 (λ, μ, ν) , 都称为向量 $\mathbf{a}$ 的一组方向数. 即如

$$\lambda : \mu : \nu = \cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma,$$

则 (λ, μ, ν) 为 $\mathbf{a}$ 的一组方向数. 一个向量的方向余弦是唯一的, 但方向数有无数多组.

习题 1.3

1. 设 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 1$, $|\mathbf{c}| = 4$, 求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$.

2. 已知 $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 2$, $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\pi}{6}$, 求 $(3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{a} - 5\mathbf{b})$.

3. 已知 $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ 与 $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ 垂直, $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ 与 $7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ 垂直, 求 $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

4. 证明: 对任意向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 都有

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}|^2.$$

当 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线时, 说明此等式的几何意义.

5. 下列等式是否正确? 说明理由 (习惯上把 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ 记为 $\mathbf{a}^2$).

$$(1) |\mathbf{a}| \mathbf{a} = \mathbf{a}^2;$$

$$(2) \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a}\mathbf{b}^2;$$

$$(3) \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 \mathbf{b};$$

$$(4) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2;$$

$$(5) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}); \quad (6) \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{c} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

6. 证明: 三角形三边的垂直平分线交于一点, 且交点到三顶点的距离相等.

7. 证明: 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面, 如果向量 $\mathbf{r}$ 满足

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{c} = 0,$$

则 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

8. 用几何方法证明: 若 $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n; c_1, c_2, \dots, c_n$ 都是实数, 则有

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2 + c_n^2} \\ \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2 + (c_1 + c_2 + \dots + c_n)^2}.$$

等号成立的充分必要条件是 $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2 = \dots = a_n : b_n : c_n$.

1.4 向量的外积

在力学中, 我们遇见过这样的问题: 一个力 $\mathbf{f}$ 作用在棒的一端 P , 使棒绕其支

点 O 转动,这就产生了力矩 M ,其大小为

$$|M| = |f| |\overline{OP}| \sin \angle(f, \overline{OP}),$$

其方向为:让右手四指从 $\overline{OP}$ 弯向 f (转角小于 π),则拇指指向为 M 的方向(图 1.18).类似于从 $\overline{OP}$ 和 f 求力矩 M 这样的向量运算,我们引进向量的外积运算.

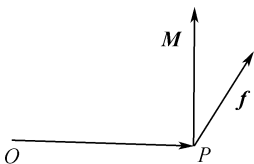


图 1.18

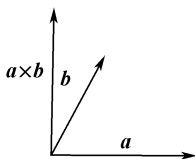


图 1.19

1.4.1 向量外积的定义及性质

定义 1.4.1 两个向量 a 与 b 的外积仍是一个向量,记作 $a \times b$,它的长度规定为

$$|a \times b| = |a| |b| \sin \angle(a, b), \quad (1.4.1)$$

它的方向规定为:与 a, b 均垂直,并且使 $\{a, b, a \times b\}$ 成右手系(图 1.19)的指向.

如果 a, b 中有一个为零向量,则规定 $a \times b = 0$.

两向量外积模的几何意义: $|a \times b|$ 是以 a, b 为邻边的平行四边形的面积.

思考题: $a \times b = 0$ 的充要条件是什么?

外积满足以下运算规律.

定理 1.4.1 对于任意向量 a, b, c 和任意实数 λ ,有

$$(1) a \times b = -b \times a, \quad (\text{反交换律})$$

$$(2) (\lambda a) \times b = \lambda(a \times b),$$

$$(3) a \times (b + c) = a \times b + a \times c, \quad (\text{左分配律})$$

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c. \quad (\text{右分配律})$$

证明 (1)由定义 1.4.1 立即得到.

(2)当 $a \parallel b$ 或 $\lambda = 0$ 时,显然成立.

因此,设 a, b 不共线, $\lambda \neq 0$.

$$\begin{aligned} |(\lambda a) \times b| &= |\lambda a| |b| \sin \angle(\lambda a, b) \\ &= |\lambda| |a| |b| \sin \angle(a, b) \\ &= |\lambda| |a \times b| = |\lambda(a \times b)|, \end{aligned}$$

当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 同向,所以 $(\lambda a) \times b$ 与 $\lambda(a \times b)$ 同向;当 $\lambda < 0$ 时, $(\lambda a) \times b$ 与 $a \times b$ 反向,从而 $(\lambda a) \times b$ 与 $\lambda(a \times b)$ 同向,故有

$$(\lambda a) \times b = \lambda(a \times b).$$

为证明(3),我们引入向量在直线、平面上的投影的概念.

定义 1.4.2 设 $\overline{a} = \overline{AB}$, b 所在直线为 l . 由 A, B 分别向 l 引垂线(图 1.20), 其垂足分别为 A', B' , 则向量 $\overline{A'B'}$ 称为 a 在 b 上的射影. 如果 $\overline{A'B'} = x\overline{b}$, 那么实数 x 称为 a 在方向 b 上的分量, 记为 $\Pi_b(a)$.

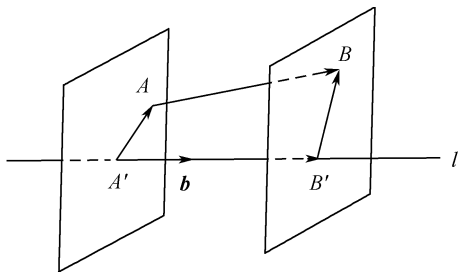


图 1.20

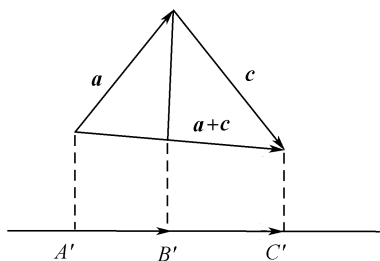


图 1.21

从图 1.20 和图 1.21 容易得出

$$\Pi_b a = |a| \cos \angle(a, b), \quad (1.4.2)$$

$$\Pi_b(a+c) = \Pi_b a + \Pi_b c. \quad (1.4.3)$$

另外对任意实数 λ 还有

$$\Pi_b(\lambda a) = \lambda \Pi_b a. \quad (1.4.4)$$

(1.4.4) 由 (1.4.2) 容易推得.

由向量的内积的定义和 (1.4.2) 得, 当 $a \neq 0, b \neq 0$ 时, 有

$$a \cdot b = |b| \Pi_b(a) = |a| \Pi_a(b). \quad (1.4.5)$$

类似地, 以向量 a 的始点在平面上的投影作为始点, 以 a 的终点在平面上的投影为终点的向量 a' 称为向量 a 在此平面上的投影. 显然, 相等的向量有相等的投影, 向量和的投影等于向量投影的和(图 1.22).

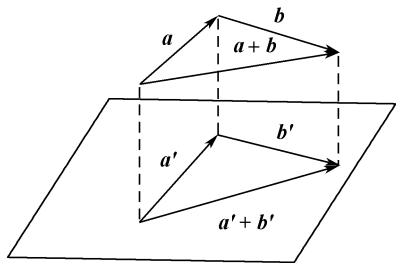


图 1.22

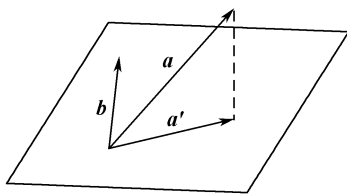


图 1.23

设有两个向量 a 和 b , 用 a' 表示向量 a 在与向量 b 垂直的平面上的投影(图 1.23), 这时有

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}' \times \mathbf{b} \quad (\text{或 } \mathbf{b} \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}'),$$

其证明是容易的,留作习题.

(3)的证明 先证左分配律.如果 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, 则结论是明显的.其次只须证明当 $\mathbf{a}$ 为单位向量时(3)成立即可,因为在一般情形下,将由性质(2)得出.因而设 $\mathbf{a}$ 为单位向量.我们用 $\mathbf{b}'$ 和 $\mathbf{c}'$ 表示向量 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 在与向量 $\mathbf{a}$ 垂直的平面上的投影(图 1.24).这时向量 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}'$, $\mathbf{a} \times \mathbf{c}'$ 和 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b}' + \mathbf{c}')$ 可以相应地由向量 $\mathbf{b}', \mathbf{c}', \mathbf{b}' + \mathbf{c}'$ 绕 $\mathbf{a}$ 右转 90° 而得到.因此 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b}' + \mathbf{c}') = \mathbf{a} \times \mathbf{b}' + \mathbf{a} \times \mathbf{c}'$, 而由于 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}' = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{c}' = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b}' + \mathbf{c}') = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$, 因此 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.

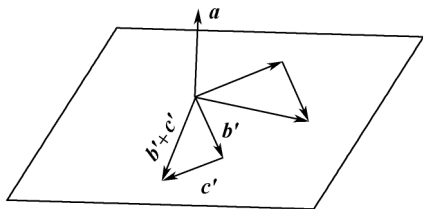


图 1.24

右分配律由性质(1)和左分配律立即得到.

例 1.4.1 设刚体以匀角速度 ω 绕 l 轴旋转,求刚体上一点 M 的线速度 $\mathbf{v}$ (图 1.25).

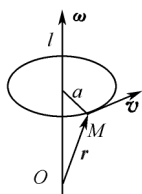


图 1.25

解 刚体绕 l 轴旋转时,可以用 l 轴上的一个向量 ω 表示角速度,它的大小等于角速度的大小,它的方向由右手法则决定:右手握住 l 轴,当右手的四个手指的指向与刚体的旋转方向一致时,大拇指的指向就是 ω 的方向.

设点 M 到旋转轴 l 的距离为 a ,在 l 轴上任取一点 O ,作向量 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, θ 表示 ω 与 $\mathbf{r}$ 的夹角,则 $a = |\mathbf{r}| \sin \theta$.由物理学知道线速度 $\mathbf{v}$ 的大小为 $|\mathbf{v}| = |\omega| a = |\omega| |\mathbf{r}| \sin \theta$; $\mathbf{v}$ 的方向垂直于通过点 M 与 l 轴的平面,且 $\mathbf{v}$ 的指向使 $\omega, \mathbf{r}, \mathbf{v}$ 符合右手规则,因此有 $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$.

1.4.2 用坐标计算向量的外积

空间中取一个仿射标架 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, 设向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \left[\sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i \right] \times \left[\sum_{j=1}^3 b_j \mathbf{e}_j \right] \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 \\ &\quad + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 \\ &\quad + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1, \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

由此可见,只要知道坐标向量之间的外积,就可求出 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

如果 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 是右手直角标架,那么有

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2,$$

于是

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 \\ &= \left[\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

作为一种记忆方式,(1.4.7)可以写成

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

此行列式按第一行展开后就可得(1.4.7)式.

例 1.4.2 已知 BC 是梯形 $ABCD$ 的一腰(图 1.26), E 是 BC 的中点. 证明 $\triangle AED$ 的面积是梯形面积的一半.

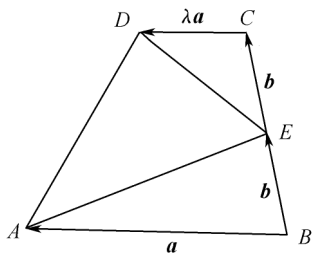


图 1.26

证明 设 $\overline{BA} = \mathbf{a}$, $\overline{BE} = \overline{EC} = \mathbf{b}$, $\overline{CD} = \lambda \mathbf{a}$ ($\lambda > 0$), 则

$$S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} |\overline{BA} \times \overline{BE}| = \frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|,$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle CDE} &= \frac{1}{2} |\overline{CD} \times \overline{CE}| = \frac{1}{2} |(\lambda \mathbf{a}) \times (-\mathbf{b})| \\ &= \frac{\lambda}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle AED} &= \frac{1}{2} |\overline{EA} \times \overline{ED}| = \frac{1}{2} |(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + \lambda \mathbf{a})| \\ &= \frac{1}{2} (1 + \lambda) |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|. \end{aligned}$$

所以 $S_{\triangle AED} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle CDE}$, 即 $S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} S_{\text{梯形 } ABCD}$.

思考题: 两向量外积后, 积向量仍可以与其他向量作外积, 请证明:

对任意向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, 有

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}. \quad (1.4.8)$$

(1.4.8) 称为 **二重外积公式**.

思考题: 一般情况下, 二重外积不满足结合律, 在什么条件下, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

习题 1.4

1. 设 $\mathbf{a}'$ 表示向量 $\mathbf{a}$ 在与向量 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 垂直的平面上的投影, 则有 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}$.

2. 证明: $(a \times b)^2 = a^2 b^2 - (a \cdot b)^2$.

3. 证明: 若 $a \times b = c \times d, a \times c = b \times d$, 则 $a - d$ 与 $b - c$ 共线.

4. 证明: $(a - b) \times (a + b) = 2(a \times b)$, 并说明其几何意义.

5. 在直角坐标系中, 已知 $a = (2, 3, -1), b = (1, -2, 3)$, 求与 a, b 都垂直, 且满足如下条件之一的向量 c :

(1) c 为单位向量;

(2) $c \cdot d = 10$, 其中 $d = (2, 1, -7)$.

6. 用向量法证明:

(1) 三角形的正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$;

(2) 三角形面积的海伦 (Heron) 公式 $\Delta^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, 式中 $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$,

Δ 为三角形的面积. 其中, a, b, c 为三角形三边的长.

7. 证明 Jacobi 恒等式

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0.$$

8. 设 $a \neq 0, \overline{OP} = x$, 求满足方程 $a \times x = b$ 的点 P 的轨迹.

1.5 向量的混合积

1.5.1 向量的混合积及其性质

我们先来讨论平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ (图 1.27) 的体积问题. 设 $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$, $\overline{AA'} = c$, 则底面积为 $|a \times b|$, 高为 $|\overline{AH}|$, 其中 $\overline{AH}$ 是 c 在 $a \times b$ 上的射影, 因此

$$|\overline{AH}| = |\Pi_{a \times b} c|.$$

从而平行六面体的体积为

$$\begin{aligned} V &= |a \times b| |\Pi_{a \times b} c| \\ &= ||a \times b| \Pi_{a \times b} c| = |(a \times b) \cdot c|. \end{aligned}$$

定义 1.5.1 $(a \times b) \cdot c$ 称为向量 a, b, c 的混合积, 记为 (a, b, c) .

由上述讨论知道下述定理.

定理 1.5.1 三个不共面向量 a, b, c 的混合积的绝对值等于以 a, b, c 为棱的平行六面体的体积.

思考题: $(a \times b) \cdot c$ 的符号与 $\{a, b, c\}$ 为右手系或左手系有什么关系?

混合积有以下两条常用的性质:

(1) $(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a = (c \times a) \cdot b$;

(2) $(a \times b) \cdot c = a \cdot (b \times c)$.

性质(1), (2)的证明较简单, 留作习题.

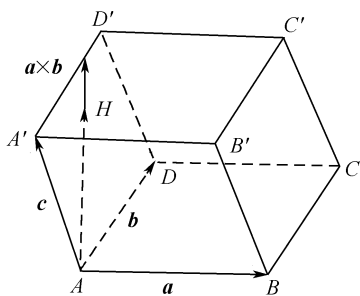


图 1.27

性质(2)表明三个有序向量的混合积中的外积与内积运算可以交换,因此混合积记作 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

1.5.2 用坐标计算向量的混合积

取仿射标架 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, 设 $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c}=(c_1, c_2, c_3)$, 则

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= \left[\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 \right. \\
 &\quad \left. + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 \right] \cdot \left[\sum_{i=1}^3 c_i \mathbf{e}_i \right] \\
 &= \left[c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \right] \\
 &\quad \cdot (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\
 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3). \tag{1.5.1}
 \end{aligned}$$

于是,只要知道 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$,就可按(1.5.1)计算 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

思考题:三个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面的充要条件与其混合积 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ 的关系如何?

如果 $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 是右手直角标架,则 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)=1$,从而得到下面的定理.

定理 1.5.2 在右手直角坐标系中,设 $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c}=(c_1, c_2, c_3)$, 则

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{1.5.2}$$

定理 1.5.2 表明了三阶行列式的几何意义:三阶行列式的绝对值等于其三个行(或列)向量在右手直角坐标系中构成的平行六面体的体积.

思考题:设四个点 $P_i (i=1, 2, 3, 4)$ 的仿射坐标为 (x_i, y_i, z_i) , $i=1, 2, 3, 4$, 利用行列式性质推证 $P_i (i=1, 2, 3, 4)$ 共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

习题 1.5

1. 证明: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$.
2. 证明: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面当且仅当 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ 不共面.