中国科学院电子信息与通信系列规划教材

随机信号分析与应用

马文平　李兵兵
田红心　朱晓明　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统地介绍了随机信号、随机信号通过线性时不变系统和随机信号通过非线性系统的基本理论和分析处理方法。全书分为相互联系而又相互独立的五章，主要介绍随机过程的基本概念和一些重要的随机过程，随机信号的谱分析方法，随机信号通过线性系统分析，随机信号通过非线性系统分析，随机信号的变换和滤波。阅读本书要求读者具备一些线性系统理论、傅里叶变换及一般工程等方面的知识。

本书可作为电子工程、通信工程、信息工程和应用数学等专业高年级本科生和研究生的教材，也可供从事电子通信系统的研究、设计、开发和应用的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机信号分析与应用/马文平等编著.—北京:科学出版社,2006
(中国科学院电子信息与通信系列规划教材)
ISBN 7-03-017802-5

Ⅰ.随… Ⅱ.马… Ⅲ.随机信号-信号分析-高等学校-教材
Ⅳ.TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第092894号

责任编辑:匡 敏 余 江 于宏丽/责任校对:李奕萱
责任印制:张克忠/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2006年9月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2006年9月第一次印刷 印张:13 1/4
印数:1—4 000 字数:241 000

定价:18.00元
(如有印装质量问题,我社负责调换〈科印〉)

从 书 序

信息技术的高速发展及广泛应用，使信息技术成为当今国际竞争中最重要的战略技术。信息技术对经济建设、社会变革乃至国家安全、起着关键性的作用，它是经济发展的“倍增器”和社会进步的“催化剂”，是体现综合国力的重要标志。在人类历史上，没有一种技术像信息技术这样引起社会如此广泛、深刻的变革。在20世纪末和21世纪前半叶，信息技术乃是社会发展最重要的技术驱动力，可以说，21世纪人类已经步入了信息时代。信息产业在世界范围内正在由先导产业逐步变为主导产业。从微观上看，表现为单位产品的价格构成中，能源和材料的消耗减少而信息技术和信息服务的比重上升；从宏观上看，表现为国民生产总值（GDP）中信息产业所占的比重增加。一个国家信息产业的发展水平将是衡量该国社会经济总体发展和现代化程度的重要标志之一。

目前，信息科学已成为世界各国最优先发展的科学之一。党的十六大提出了“加速发展信息产业，大力推进信息化，以信息化带动工业化”的发展战略，以及“优先发展信息产业，在经济和社会领域广泛应用信息技术”的基本国策，使我国信息产业得到了前所未有的重视，信息产业呈现出飞速发展的势头。信息产业的发展离不开信息化人才，信息化人才建设将是信息产业可持续发展的关键。然而，有关调查表明，我国国家信息化指数为38.46，而信息化人才资源指数仅为13.43。据权威机构预测，从2005年到2009年，中国信息行业将以18.5%的年复合增长率高速增长，中国信息市场将迎来又一个“黄金年代”。

为了适应新世纪信息学科尤其是电子信息与通信学科的长足发展，在规模上、素质上更好地满足我国信息产业和信息科学技术的发展需要，更好地实现电子信息与通信学科专业人才的培养目标，推进国内信息产业的发展，中国科学院教材建设专家委员会和科学出版社组织电子信息与通信领域的院士、专家、教学指导委员会成员、国家级教学名师及电子信息与通信学科院校的相关领导等组成编委会，共同组织编写这套《中国科学院电子信息与通信系列规划教材》。

本套教材主要面向全国范围内综合性院校电子信息工程、通信工程、信息工程等相关专业的本科生。本套教材的编委会成员具有国内电子信息与通信方面的较高学术水平，他们负责对本套教材的编写大纲及内容进行审定，可使本套教材的质量得以保证。

本套教材主要有以下几方面的特点：

1. 适应多层次的需要。依据最新专业规范，系列教材主要根据教育部最新公布的电子信息与通信学科相关专业的“学科专业规范”和“基础课程教学基本要求”进行教材内容的安排与设置。同时，根据各类型高校学生的实际需要，编写不同层次的教材。

2. 结构体系完备。本套教材覆盖本科、研究生教学层次，各门课程的知识点之间相互衔接，以便完整掌握学科基本概念、基本理论，了解学科整体发展趋势。

3. 作者水平较高。我们将邀请设有电子、通信国家重点学科的院校，以及国家级、省级教学名师或国家级、省级精品课程负责人编写教材。

4. 借鉴国外优秀教材。编委会为每门课程推荐一本国外相关的经典原版教材，作为教师编写的参考书。

5. 理论与实际相结合，加强实践教学。教材编写注重案例和实践环节，着力于学生实际动手能力的培养。

6. 教材形式多样。本套教材除主教材外，还配套有辅导书、教师参考书、多媒体课件、习题库及网络课程等。

根据电子信息与通信学科专业发展的战略要求，我们将对本套系列教材不断更新，以保持教材的先进性和适用性。热忱欢迎全国同行以及关注电子信息与通信领域教育及教材建设的广大有识之士对我们的工作提出宝贵意见和建议。

北京交通大学校长　谈振辉

2005 年 10 月

前　　言

本书是编者在多年教学实践积累的基础上编写的。在编写过程中，既考虑了“随机信号分析与应用”本身的体系和基本要求，又考虑了非无线电专业的实际需求，并吸收了国内外有关教材的长处。与国内外目前常用教材相比，本书具有如下特点：

(1) 本书采用连续时间信号分析和离散时间信号分析交叉安排的体系。这样既有助于读者了解两者之间的相同点和不同点，也可适当压缩学时。

(2) 增加了随机信号分析方法在数字通信中的应用的介绍。

(3) 增加了随机信号变换和滤波的内容，对线性均方估计中的正交性原理及其应用作了详细的介绍。

(4) 在内容的取舍上，本书主要讲授随机信号的分析方法和在通信中的应用，对有关方法的直接应用，如白噪声和色噪声的产生等内容，则放在习题中，这样既可保持精炼又可适当压缩学时。

本书共分 5 章，参考学时约为 46 学时，与本书配套有 16 学时的《随机信号分析与应用》实验。第一章介绍随机过程的基本概念及重要的随机过程，特别对平稳随机过程的相关函数、遍历性、通信中常用到的正态随机过程、马尔可夫过程和泊松过程作了全面的论述。第二章介绍随机过程的谱分析方法，分别对连续时间平稳随机过程的功率谱密度函数和离散时间的平稳随机过程的功率谱密度函数进行了详细的介绍，对沟通连续与离散随机信号的抽样定理做了证明，并讨论了带宽受限的连续时间信号与其抽样信号功率谱密度之间的关系。第三章对连续时间和离散时间随机信号通过线性系统的性能进行了分析，对窄带信号及其有关特性进行了详细的论述。第四章主要介绍了随机信号通过非线性系统的分析方法——直接法和特征函数法，对高斯噪声和准正弦振荡信号通过非线性系统的性能进行了详细的分析。第五章对离散时间随机信号的变换和滤波进行了介绍，并对线性均方估计中的正交性原理和维纳-柯尔莫哥洛夫理论及其应用做了详细的论述。

学习本书前，读者需具备微积分、概率论、信号与系统分析基础、电子线路和数字信号处理等基础课程的知识。

本书第一章由李兵兵编写，第二章由朱晓明编写，第三章由田红心编写，第四、

五章由马文平编写。马文平统编全稿。

本书由潘进教授详细审阅,并提出很多宝贵意见。在本书的出版过程中,得到了西安电子科技大学通信工程学院领导的热情支持及学校主管教材工作的领导的热情帮助,在此深表谢意。科学出版社的匡敏和余江两位编辑对本书的出版也做了大量的工作,在此表示感谢。

本书的编写得到西安电子科技大学教材基金资助;本书的部分工作也得到了教育部“新世纪优秀人才支持计划”资助。

由于编者水平有限,本书在内容的选择、体系的安排、文字的叙述上会有疏漏,恳请读者指正。

编　者

2006 年 6 月

目　　录

第一章　随 机 过 程

1.1　随机过程的基本概念及统计特性

随机过程是数学的一个重要分支，它产生于 20 世纪的初期，它研究随“时间”变化的“动态”的随机现象，是对一系列随机事件之间动态关系的定量描述。它是在自然科学、工程科学、社会科学各领域研究随机现象的有力工具。随机过程与概率论的关系类似于物理学中动力学与静力学的关系。它在自然科学、工程技术及社会科学中日益呈现出广泛的应用前景和蓬勃的发展前景，例如，在气象预报、天文观测、通信工程、原子物理、宇航遥控、生物医学、管理科学、运筹决策、计算机科学、经济分析、人口理论、可靠性与质量控制等众多领域都得到了广泛的应用。

在研究随机过程时，人们需要透过表面的偶然性找出必然的内在规律并以概率的形式来描述这些规律。从偶然中寻找必然是这一学科的魅力所在。

1.1.1　随机过程的定义

在概率论中，所研究的随机变量在试验中的结果与每次试验 ξ 有关而与时间 t 无关。在实际中，经常会遇到随机变量在试验中的结果不仅与每次试验 ξ 有关而且与时间 t 有关，例如，无线通信中的接收机的噪声电压就随着时间 t 而随机地变化。这时的随机变量就称为随机过程，可记为 $X(\xi,t)$。更为一般的情况，参量 t 不一定表示时间，而表示其他的参量，如随高度而变化的气温图表中的高度，此时 $X(\xi,t)$ 就被称为随机函数。由于 $X(\xi,t)$ 与 ξ 和 t 相关联，因此可以从不同的角度来描述随机过程。首先从假定 ξ 确定，而 t 变化可给出以下定义。

定义 1　设随机试验的样本空间 $S=\{\xi\}$，如果对于每个 ξ，对应有参数 t 的函数 $X(\xi,t)$，$t\in T$，那么，对于所有的 ξ，得到一族 t 的函数 $\{X(\xi,t),t\in T\}$，这个 t 的函数族称为随机过程，简记为 $X(\xi,t)$ 或 $X(t)$。族中每个函数称为该过程的一个样本，它是随机过程的一次试验的物理实现，是一个确知的时间函数。

假定 ξ 确定时，这相当于对随机过程作单次观察，这时得到 $X(\xi,t)$ 的一个随 t 变化的样本函数。

若固定某个观察时刻 t_i，此时 $X(\xi,t_i)$ 是一个取决于 ξ 的随机变量。此时可给出下面的定义。

定义 2　若对于每个任意给定的时间 $t_i(i=1,2,\cdots)$，$X(\xi,t_i)$ 都是随机变量，

则称 $X(\xi,t)$为随机过程。

这个定义是从多维随机变量的角度来对随机过程进行描述,而多维随机变量的概念是分析随机过程的重要理论基础。

以上两种定义从不同的角度来描述随机过程,但本质是相同的,互为补充。在对随机过程作实际观测时,常用定义1,随着观测样本次数的增加,所得的样本数目也越多,则越能掌握随机过程的统计规律。在对随机过程作理论分析时,常用定义2,这样随着采样间隔的减小,所得的维数越大,则越能掌握随机过程的统计规律。

例 1.1 具有随机初相位的正弦波 $X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Phi)$,$-\infty<t<\infty$,其中 A 与 ω_0 是正常数,而 Φ 服从在区间$[0,2\pi]$上的均匀分布。判断 $X(t)$是否为一随机过程。

解 因为 t 取某一固定值时,$X(t)$是随机变量,所以$\{X(t),-\infty<t<\infty\}$是一族随机变量。另一方面,对随机变量 Φ 做一次试验可得到一个试验值 φ,$X(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$就是一个样本函数。如 $\varphi=0$ 时,$X_1(t)=A\cos(\omega_0 t)$;$\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$时,$X_2(t)=A\cos\left(\omega_0 t+\dfrac{2\pi}{3}\right)$;而 $\varphi=\dfrac{4\pi}{3}$时,$X_3(t)=A\cos\left(\omega_0 t+\dfrac{4\pi}{3}\right)$等(图 1.1)。因而,从两种不同角度来看,$X(t)$都是随机过程。

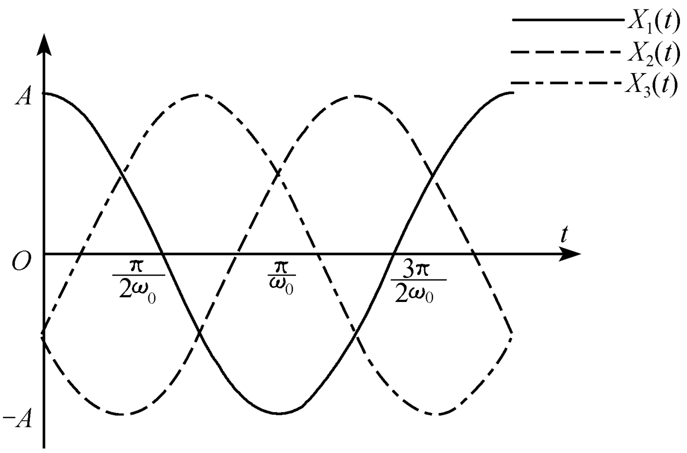

图 1.1

1.1.2 随机过程的分类

对于随机过程按照不同的特性,可以得到不同的分类方法。

当把随机过程 $X(\xi,t)$,$t\in T$ 解释为一个物理系统时,对于固定的 ξ 和 t,$X(\xi,t)$为一实数,表示系统在时刻 t 所处的状态。例如,"$X(t)=x$"表示 t 时刻系统位于状态 x,$X(\xi,t)$所有可能状态所构成的集合称为状态空间或相空间,记为 E。

1. 根据参数集 T 和状态空间 E 的情况进行分类

T 和 E 都可分为离散集和连续集两种情况,因此随机过程可分成下列四类:

(1) 若 T 和 E 都取连续集时,$X(t)$称为连续型随机过程。例 1.1 给出的随机过程就是连续型随机过程。

(2) 若 T 取连续集而 E 取离散集时,$X(t)$称为离散型随机过程。例如,某电话交换台在时间段$[0,t]$内接到的呼唤次数是与 t 有关的随机变量 X,对固定的 t,X 是一取非负整数值的随机变量,此时的随机过程就是离散型随机过程。这种情况也可通过对连续型随机过程的状态空间 E 进行量化而得到。

(3) 若 T 取离散集而 E 取连续集时,$X(t)$称为连续型随机序列。这种情况可通过对连续型随机过程进行等间隔采样而得到。例如,在 $T=\{\Delta t,2\Delta t,\cdots,n\Delta t,\cdots\}$上观测接收机的噪声电压过程 $V(t)$,可得到一个随机序列$\{v_1,v_2,\cdots,v_n,\cdots\}$,此序列就是一个连续型随机序列。

(4) 若 T 和 E 都取离散集时,$X(t)$称为离散型随机序列,也称为随机数字序列或数字信号。这种情况可通过对连续型随机过程进行等间隔采样和对采样值进行量化而得到。例如,有一生物群体,由于繁殖而产生下一代,令 $X(n)$表示第 n 代生物体个数,$X(n)$可取非负整数值,则序列$\{X(n),n=1,2,\cdots\}$就是一个随机数字序列。

2. 按照随机过程的样本函数的形式进行分类

(1) 若随机过程的任意样本函数的未来值,不能由过去的观测值准确地预测,则称此过程为不确定的随机过程。例如,接收机的噪声电压过程 $V(t)$就是一个不确定的随机过程。

(2) 若随机过程的任意样本函数的未来值,可以由过去的观测值准确地预测,则称此过程为确定的随机过程。例 1.1 给出的随机过程就是一个确定的随机过程。

3. 按照随机过程的概率结构和特性来分类

(1) 按分布函数或概率密度特性,可分为平稳随机过程、马尔可夫过程、正态随机过程、独立增量过程、独立随机过程和瑞利过程等。

(2) 按照遍历性,可分为遍历过程和非遍历过程。

(3) 按照平稳性,可分为平稳过程和非平稳过程。

(4) 按照随机过程的功率谱密度特性,可分为宽带过程和窄带过程、白色或非白色过程。

1.1.3 随机过程的概率分布

在概率论中我们知道,一个随机变量的概率统计特性由它的分布函数决定。随机向量的概率论统计特性由它的联合分布函数决定。按照定义 2,当对随机过程进行采样时,便得到无穷多个随机变量(多维随机变量),当采样间隔满足一定条

件时,则可用由此而得到的无穷多个随机变量的全部可能的有限维联合分布函数来决定它的概率统计特性。也就是说随机过程可看作为多维随机变量在维数趋于无穷(不可列)情况下的自然推广。

基于以上的理解,我们可以将在概率论里对随机变量的概率统计特性的研究方法推广到随机过程。下面给出描述随机过程统计特性的概率分布函数和概率密度函数。

1. 一维概率分布

由于随机过程 $X(t)$在任一时刻 t_1 的状态 $X(t_1)$是一维随机变量,可按以下定义给出随机过程 $X(t)$的一维概率分布定义。

定义 3 设$\{X(t), t\in T\}$为随机过程,对任意固定的 $t_1\in T$,及实数 $x_1\in R$,称

$$F_X(x_1;t_1)=P\{x(t_1)\leqslant x_1\}$$

为随机过程$\{X(t), t\in T\}$的一维分布函数。

若 $F_X(x_1;t_1)$对 x_1 的一阶偏导数存在,则称

$$f_X(x_1;t_1)=\frac{\partial F_X(x_1;t_1)}{\partial x_1}$$

为随机过程$\{X(t), t\in T\}$的一维概率密度函数。

若 $P\{X(t_1)=x_k\}=p_k$, $k=1,2,\cdots$,满足条件

$$p_k\geqslant 0 \quad 且 \quad \sum_{k=1}^{\infty}p_k=1$$

则称 $P\{X(t_1)=x_k\}=p_k$ 为随机过程$\{X(t), t\in T\}$的一维概率分布(分布律)。

由定义 3 可以看出,$F_X(x_1;t_1)$和 $f_X(x_1;t_1)$都是取值 x_1 和时刻 t_1 的函数。对应不同时刻 t_1,通常 $F_X(x_1;t_1)$是不相同的,同样 $f_X(x_1;t_1)$也是不相同的。随机过程的一维分布函数和一维概率密度函数具有一维随机变量的分布函数和概率密度函数的各种性质,不同的是随机过程还是 t_1 的函数。

2. 二维概率分布

定义 4 设$\{X(t), t\in T\}$为随机过程,对任意固定的 $t_1, t_2\in T$,及实数 $x_1, x_2\in R$,称

$$F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)=P\{X(t_1)\leqslant x_1, X(t_2)\leqslant x_2\}$$

为随机过程$\{X(t), t\in T\}$的二维分布函数。

若 $F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)$对 x_1、x_2 的二阶混合偏导数存在,则称

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)=\frac{\partial F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial x_1\partial x_2}$$

为随机过程$\{X(t), t\in T\}$的二维概率密度函数。

二维概率分布描述了随机过程 $X(t)$在任意两时刻的状态之间的联系。通过二维概率密度函数 $f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)$分别对 x_1、x_2 从$-\infty$到$+\infty$积分可得到两个一维边沿概率密度函数 $f_X(x_2;t_2)$和 $f_X(x_1;t_1)$,因此,二维概率分布包含比一维概率分布更多的信息,对随机过程$\{X(t),t\in T\}$的描述更细致。但是,二维概率分布不能反映两个以上的任意时刻的状态之间的联系,从而也不能完整地描述出随机过程的全部统计特性。为了描述随机过程 $X(t)$在任意 n个时刻 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 的状态 $X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)$之间的联系,引入随机过程的 n维分布函数与 n维概率密度函数的概念。

3. n维概率分布

定义 5 设$\{X(t),t\in T\}$为随机过程,对任意固定的 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$,及实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in R$,称

$$F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=P\{X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2,\cdots,X(t_n)\leqslant x_n\}$$

为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的 n维分布函数。

若 $F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$对 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n阶混合偏导数存在,则称

$$f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=\frac{\partial F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}$$

为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的 n维概率密度函数。

随机过程的 n维分布函数(或概率密度)能够近似地描述随机过程的统计特性,而且 n越大,n维分布函数就可以越趋完善地描述随机过程的统计特性。

随机过程 $X(t)$的所有有限维概率密度函数的集合

$$\{f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n),\quad t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,\quad n\geqslant 1\}$$

称为 $X(t)$的有限维概率密度函数族。类似可定义 $X(t)$的有限维分布函数族

$$\{F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n),\quad t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,\quad n\geqslant 1\}$$

许多数学家研究了随机过程 $X(t)$与其有限维分布函数族的关系。1931 年,苏联数学家柯尔莫哥洛夫证明了关于有限维分布函数族的重要性的定理。定理表明有限维分布函数族或概率密度函数族可以完全确定随机过程的全部统计特性。

1.1.4 随机过程的数字特征

虽然随机过程的有限维分布函数族或概率密度函数族可以完全确定随机过程的全部统计特性,但是在实际应用中,要确定随机过程的有限维分布函数族,并加以分析常常是困难的,有时甚至是不可能的。随机过程可看成是在一定条件下取样而得到的多元随机变量组,因此可将随机变量的数字特征概念推广到随机过程。随机过程的数字特征既能描述随机过程的重要特性,又便于实际测量和进行运算。随机过程常用的数字特征包括数学期望(均值)、方差、相关函数等。

1. 数学期望

设随机过程$\{X(t), t\in T\}$的一维概率密度函数为$f_X(x;t)$，在固定时刻$t\in T$时$X(t)$是一个随机变量，它的数学期望一般是一个与t有关的函数。根据随机变量的数学期望的定义可得定义 6。

定义 6 随机过程$\{X(t), t\in T\}$的数学期望可表征为

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x;t)\mathrm{d}x$$

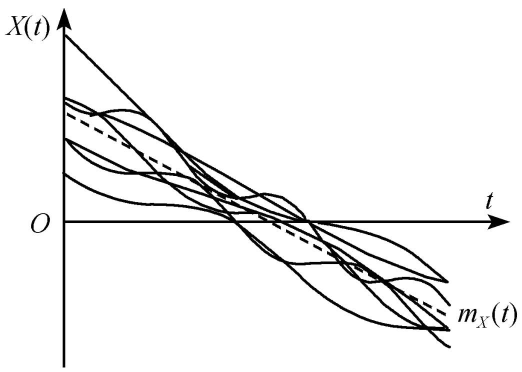

图 1.2

数学期望是随机过程的所有样本函数在t时刻的函数值的平均，这是统计平均或称集合平均。直观上，$m_X(t)$表示随机过程$X(t)$的波动中心，如图 1.2 所示。当随机过程$X(t)$表征的是接收机输出端的噪声电压时，则$m_X(t)$表示了噪声电压的统计平均值，即表征了噪声电压的直流分量。

2. 均方值与方差

定义 7 随机过程$\{X(t), t\in T\}$的二阶原点矩

$$\Psi_X^2(t) = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x;t)\mathrm{d}x$$

称为随机过程$X(t)$的均方值函数，简称均方值。

定义 8 随机过程$\{X(t), t\in T\}$的二阶中心矩

$$\sigma_X^2(t) = D[X(t)] = E[(X(t) - m_X(t))^2]$$

称为随机过程$X(t)$的方差函数，简称方差。$\Psi_X^2(t)$和$\sigma_X^2(t)$都是t的确定函数。

定义 9 方差$\sigma_X^2(t)$的平方根

$$\sigma_X(t) = \sqrt{\sigma_X^2(t)} = \sqrt{D[X(t)]}$$

称为随机过程$X(t)$的标准差、方差根或均方差。方差和均方差描述了随机过程$X(t)$的所有样本函数在t时刻的函数值相对于$m_X(t)$的偏离程度。

当随机过程$X(t)$表征的是接收机输出端的噪声电压时，则$\Psi_X^2(t)$和$\sigma_X^2(t)$分别表示了消耗在单位电阻上的瞬时功率统计平均值和瞬时交流功率统计平均值，而$m_X^2(t)$表示了瞬时直流功率统计平均值。$\sigma_X(t)$表示了噪声电压的交流分量。

3. 自相关函数与自协方差函数

均值和方差刻画了随机过程在各个孤立时刻的统计特性，但不能描述过程在不同时刻之间的相关关系。事实上，对不同随机过程，不同时刻之间的相关关系是

有明显差别的。如图 1.3 所示的两个随机过程 $X_1(t)$和 $X_2(t)$，它们具有相近的均值和方差，但 $X_1(t)$的样本函数变化缓慢、平稳、规律性强，即 $X_1(t)$在任意两个不同时刻的函数值之间有较明显的相关性。而 $X_2(t)$的样本函数变化激烈，波动性大，$X_2(t)$在任意两个不同时刻的函数值之间的关系不明显，并且两个时刻间隔越大时，联系越弱。

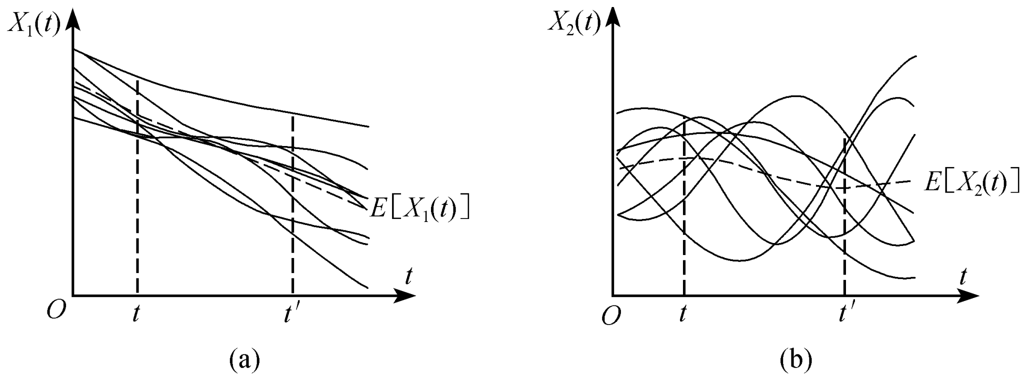

图 1.3

因此，必须引入描述随机过程在不同时刻之间相关程度的数字特征。

定义 10　设$\{X(t), t\in T\}$为随机过程，对任意固定的 $t_1, t_2\in T$，随机变量 $X(t_1)$和 $X(t_2)$的混合原点矩

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, x_2; t_1, t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

称为随机过程 $X(t)$的自相关函数，简称相关函数。相关函数描述了 $X(t)$在任意两个不同时刻的状态之间的相关程度。当取 $t_1 = t_2 = t$ 时，则有

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t, t) = E[X(t)X(t)] = E[X^2(t)]$$

此时 $X(t)$的自相关函数等于 $X(t)$均方值，所以 $X(t)$的均方值是其自相关函数的特例。

定义 11　设$\{X(t), t\in T\}$为随机过程，对任意固定的 $t_1, t_2\in T$，随机变量 $X(t_1)$和 $X(t_2)$的混合中心矩

$$\begin{aligned}K_X(t_1, t_2) &= E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][X(t_2) - m_X(t_2)]\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x_1 - m_X(t_1)][x_2 - m_X(t_2)] f_X(x_1, x_2; t_1, t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\end{aligned}$$

称为随机过程 $X(t)$的自协方差函数，简称协方差函数。自协方差函数 $K_X(t_1, t_2)$描述了 $X(t)$在任意两个不同时刻的起伏值之间的相关程度。$K_X(t_1, t_2)$与 $R_X(t_1, t_2)$之间存在如下关系：

$$\begin{aligned}K_X(t_1, t_2) &= E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][X(t_2) - m_X(t_2)]\} \\ &= E[X(t_1)X(t_2)] - m_X(t_1)E[X(t_2)] - m_X(t_2)E[X(t_1)] + m_X(t_1)m_X(t_2) \\ &= R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)\end{aligned}$$

当取 $t_1=t_2=t$ 时,则有

$$K_X(t_1,t_2)=K_X(t,t)=E\left[\left(X(t)-m_X(t)\right)^2\right]=D[X(t)]=\sigma_X^2(t)$$

此时 $X(t)$的协方差函数等于 $X(t)$的方差。

从以上的关系式中可以看出,均值 $m_X(t)$和相关函数 $R_X(t_1,t_2)$是随机过程最基本的两个数字特征,协方差 $K_X(t_1,t_2)$和方差 $\sigma_X^2(t)$都可以由它们来确定。在随机过程理论中,仅研究 $m_X(t)$和 $R_X(t_1,t_2)$的有关的理论,称为相关理论。特别当随机过程为正态过程或近似正态过程时,它们能完整地描述这些过程的统计特性。

例 1.2 设 $g(t)$是如图 1.4 所示的周期为 L 的矩形波,Y 为服从两点分布的随机变量,其概率分布为

Y	1	-1
P_Y	1/2	1/2

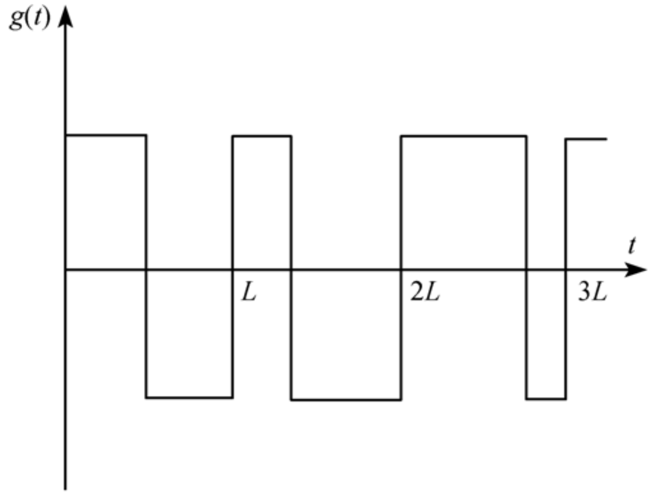

图 1.4

令 $X(t)=Yg(t),t\in T=(0,\infty)$,则 $X(t)$为具有随机振幅、周期为 L 的矩形波过程,求 $X(t)$的数字特征。

解 根据随机过程数字特征的定义有

$$m_X(t)=E[Yg(t)]=g(t)E[Y]=g(t)\left(-1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\begin{aligned}K_X(t_1,t_2)&=R_X(t_1,t_2)=E[g(t_1)Yg(t_2)Y]=g(t_1)g(t_2)E[Y^2]\\&=g(t_1)g(t_2)\left(1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}\right)=g(t_1)g(t_2)\end{aligned}$$

$$\sigma_X^2(t)=R_X(t,t)-m_X^2(t)=g^2(t)$$

例 1.3 已知随机相位正弦波 $X(t)=a\cos(\omega t+\theta)$,其中 $a>0$,ω 为常数,θ 为在$(0,2\pi)$内均匀分布的随机变量,求随机过程$\{X(t),t\in(0,\infty)\}$的 $m_X(t)$,$R_X(t_1,t_2)$和

一维概率密度函数 $f_X(x;t)$。

解　随机变量 θ的概率密度为

$$f(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0<\theta<2\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

所以

$$m_X(t)=E[X(t)]=E[a\cos(\omega t+\theta)]=a\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\theta)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta=0$$

$$\begin{aligned}R_X(t_1,t_2)&=E[X(t_1)X(t_2)]=E[a^2\cos(\omega t_1+\theta)\cos(\omega t_2+\theta)]\\&=\int_0^{2\pi}a^2\cos(\omega t_1+\theta)\cos(\omega t_2+\theta)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{a^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\{\cos[\omega(t_2-t_1)]+\cos[\omega(t_2+t_1)+2\theta]\}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{a^2}{2}\cos(\omega t_2-\omega t_1)=\frac{a^2}{2}\cos\omega\tau\qquad(\tau=t_2-t_1)\end{aligned}$$

在$(0,2\pi)$范围内,有满足 $0<\omega t+\theta\leqslant\pi$ 和 $\pi<\omega t+\theta<2\pi$ 两个 θ值,使得 $x=a\cos(\omega t+\theta)$成立,所以利用随机变量函数的概率密度函数公式有

$$f(x;t)=f(\theta_1)\mid\theta_1'(x)\mid+f(\theta_2)\mid\theta_2'(x)\mid=\frac{f(\theta_1)}{\mid x'(\theta_1)\mid}+\frac{f(\theta_2)}{\mid x'(\theta_2)\mid}$$

当$|x|\leqslant a$时,有

$$x'(\theta)=-a\sin(\omega t+\theta)=-a\sqrt{1-\cos^2(\omega t+\theta)}=-\sqrt{a^2-x^2}$$

则

$$f(x;t)=\frac{1}{2\pi\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{1}{2\pi\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}\qquad(\mid x\mid<a)$$

从而得到 $X(t)$的一维概率密度函数为

$$f_X(x;t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & \mid x\mid<a\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

1.2　连续时间随机过程的微分和积分

在实际中,我们经常要涉及随机过程的微分与积分问题。如同普通函数的情况一样,这些运算也是极限运算。但是对随机过程而言,它们涉及随机变量序列的极限与收敛的问题,这些极限都是在均方意义下定义的。为了讨论随机过程的微分与积分,首先讨论随机过程的连续性。

1.2.1 随机过程连续性

定义 12 如果随机过程 $X(t)$在 $\Delta t \to 0$ 时满足

$$E\left[\left|X(t+\Delta t)-X(t)\right|^2\right] \to 0 \tag{1.1}$$

则称随机过程在 t时刻在均方意义下连续(简称为 m.s 连续)。

对式(1.1)的箭头左边用 $X(t)$的相关函数表示有

$$\begin{aligned} E\left[\left|X(t+\Delta t)-X(t)\right|^2\right] = & R_X(t+\Delta t, t+\Delta t) - R_X(t, t+\Delta t) \\ & - R_X(t+\Delta t, t) + R_X(t,t) \end{aligned} \tag{1.2}$$

也就是说,如果 $R_X(t_1, t_2)$在 $t_1 = t_2 = t$点上连续,那么随机过程 $X(t)$必在 t点上连续。因为只有这样,式(1.2)的右边才随同 Δt一起趋于零。如果 $R_X(t_1, t_2)$沿着 $t_1 = t_2$ 线处处连续,则随机过程 $X(t)$对于每个 t都是连续的。

如果随机过程 $X(t)$是 m.s 连续的,则它的数学期望也必定连续,即

$$E[X(t+\Delta t)] \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} E[X(t)]$$

证 设随机变量

$$Y = X(t+\Delta t) - X(t)$$

因

$$\sigma_Y^2 = E[Y^2] - E^2[Y]$$

故

$$E[Y^2] = \sigma_Y^2 + E^2[Y] \geqslant E^2[Y]$$

也就是

$$E\left[\left|X(t+\Delta t)-X(t)\right|^2\right] \geqslant E^2[X(t+\Delta t)-X(t)]$$

由于 $X(t)$连续,不等式左边随着 $\Delta t \to 0$ 而趋于零,因此,当 $\Delta t \to 0$ 时不等式的右边必有

$$E[X(t+\Delta t)-X(t)] = E[X(t+\Delta t)] - E[X(t)] \to 0$$

这个结果可以写成如下形式

$$\lim_{\Delta t \to 0} E[X(t+\Delta t)] = E[\lim_{\Delta t \to 0} X(t+\Delta t)]$$

这一结果表明:求极限和求数学期望的次序可以交换。这是一个非常有用的结果。

1.2.2 随机过程的微分及其数学期望与相关函数

1. 随机过程的微分(导数)

定义 13 随机过程 $X(t)$的导数可以定义为一个极限

$$\dot{X}(t) = \frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t} \tag{1.3}$$

如果这个极限对于过程 $X(t)$的所有样本函数都存在,那么 $\dot{X}(t)$具有导数的通常意义。如果极限式(1.3)在 m. s 意义下存在,那么我们就称 $X(t)$具有均方意义下的导数。

定义 14　如果我们能找到另一个过程 $\dot{X}(t)$满足

$$\lim_{\Delta t\to 0} E\left[\left(\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}-\dot{X}(t)\right)^2\right]=0 \tag{1.4}$$

则称过程 $X(t)$在时刻 t有均方(m. s)导数。

为了检验收敛性,我们应用柯西(Cauchy)准则,此时只要证明下式

$$\lim_{\Delta t_1,\Delta t_2\to 0} E\left[\left(\frac{X(t+\Delta t_1)-X(t)}{\Delta t_1}-\frac{X(t+\Delta t_2)-X(t)}{\Delta t_2}\right)^2\right]=0$$

成立即可。而

$$\begin{aligned}
&E\left[\left(\frac{X(t+\Delta t_1)-X(t)}{\Delta t_1}-\frac{X(t+\Delta t_2)-X(t)}{\Delta t_2}\right)^2\right]\\
&=\frac{1}{\Delta t_1^2}[R_X(t+\Delta t_1,t+\Delta t_1)+R_X(t,t)-R_X(t+\Delta t_1,t)-R_X(t,t+\Delta t_1)]\\
&\quad+\frac{1}{\Delta t_2^2}[R_X(t+\Delta t_2,t+\Delta t_2)+R_X(t,t)-R_X(t+\Delta t_2,t)-R_X(t,t+\Delta t_2)]\\
&\quad-\frac{2}{\Delta t_1\Delta t_2}[R_X(t+\Delta t_1,t+\Delta t_2)+R_X(t,t)-R_X(t+\Delta t_1,t)-R_X(t,t+\Delta t_2)]
\end{aligned}$$

上式等号右端不包含任何随机变量,因此当 $\Delta t_1\to 0$ 和 $\Delta t_2\to 0$ 时,其极限可按一般方法来求。

若偏导数 $\dfrac{\partial R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1}$、$\dfrac{\partial R_X(t_1,t_2)}{\partial t_2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}$ 存在,则有

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t_1,\Delta t_2\to 0} E\left[\left(\frac{X(t+\Delta t_1)-X(t)}{\Delta t_1}-\frac{X(t+\Delta t_2)-X(t)}{\Delta t_2}\right)^2\right]\\
&=\left[\frac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_1}+\frac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial t_2\partial t_2}-2\frac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}\right]_{t_1=t_2=t}=0
\end{aligned}$$

因此可得结论:随机过程在均方意义下有导数的充分条件是相关函数在它的自变量相等时,存在二阶偏导数,即

$$\left.\frac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}\right|_{t_1=t_2}$$

这里需要指出,若随机过程存在导数,首先该过程必须是连续的,但随机过程的连续性保证不了过程有导数。实际上连续性存在而导数不存在的随机过程在应用中是经常存在的。

2. 随机过程导数的数学期望与相关函数

设 $Y(t)$为可微过程 $X(t)$的导数,即

$$Y(t)=\dot{X}(t)=\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}$$

此时 $Y(t)$的数学期望可表示为

$$\begin{aligned}m_Y(t)&=E[Y(t)]=E[\dot{X}(t)]=E\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}\right]\\&=\lim_{\Delta t\to 0}E\left[\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}\right]\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{m_X(t+\Delta t)-m_X(t)}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}m_X(t)}{\mathrm{d}t}=\dot{m}_X(t)\end{aligned}$$

上式表明:随机过程导数的数学期望等于过程数学期望的导数,即有

$$E\left[\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}\right]=\frac{\mathrm{d}E[X(t)]}{\mathrm{d}t}\tag{1.5}$$

也就是说,随机过程的导数运算与数学期望的运算次序可以交换。

根据相关函数的定义,可给出 $X(t)$与 $Y(t)$的互相关函数为

$$\begin{aligned}R_{XY}(t_1,t_2)&=E[X(t_1)Y(t_2)]=E\left[X(t_1)\cdot\lim_{\Delta t_2\to 0}\frac{X(t_2+\Delta t_2)-X(t_2)}{\Delta t_2}\right]\\&=\lim_{\Delta t_2\to 0}\frac{R_X(t_1,t_2+\Delta t_2)-R_X(t_1,t_2)}{\Delta t_2}=\frac{\partial R_X(t_1,t_2)}{\partial t_2}\end{aligned}\tag{1.6}$$

而 $Y(t)$的自相关函数为

$$\begin{aligned}R_Y(t_1,t_2)&=E[Y(t_1)Y(t_2)]=E[\dot{X}(t_1)\dot{X}(t_2)]=R_{\dot{X}}(t_1,t_2)\\&=E\left[\lim_{\Delta t_1\to 0}\frac{X(t_1+\Delta t_1)-X(t_1)}{\Delta t_1}\cdot Y(t_2)\right]\\&=\lim_{\Delta t_1\to 0}\frac{R_{XY}(t_1+\Delta t_1,t_2)-R_{XY}(t_1,t_2)}{\Delta t_1}=\frac{\partial R_{XY}(t_1,t_2)}{\partial t_1}\end{aligned}\tag{1.7}$$

将式(1.6)代入式(1.7),可得

$$R_Y(t_1,t_2)=\frac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}\tag{1.8}$$

式(1.8)表明:随机过程导数的相关函数,等于可微随机过程的相关函数的二阶混合偏导数。

例 1.4 数学期望为 $m_X(t)=5\sin t$、相关函数为 $R_X(t_1,t_2)=3\mathrm{e}^{-0.5(t_2-t_1)^2}$ 的随机信号 $X(t)$输入微分电路,该电路输出随机信号 $Y(t)=\dot{X}(t)$,求 $Y(t)$的均值和相关函数。

解 根据式(1.5)所表明的意义:随机过程导数的数学期望等于过程数学期望的导数,可得

$$m_Y(t)=\frac{\mathrm{d}m_X(t)}{\mathrm{d}t}=\dot{m}_X(t)=5\cos t$$

然后根据式(1.8)所表明的意义:随机过程导数的相关函数,等于可微随机过

程的相关函数的二阶混合偏导数,可得

$$R_Y(t_1,t_2)=R_{\dot X}(t_1,t_2)=\frac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}=\frac{\partial^2\left[3\mathrm{e}^{-0.5(t_2-t_1)^2}\right]}{\partial t_1\partial t_2}$$

$$=\frac{\partial\left[(t_2-t_1)\cdot 3\mathrm{e}^{-0.5(t_2-t_1)^2}\right]}{\partial t_2}=3\mathrm{e}^{-0.5(t_2-t_1)^2}\left[1-(t_2-t_1)^2\right]$$

1.2.3　随机过程的积分及其数学期望与相关函数

1. 随机过程的积分

定义 15　对于给定的实随机过程 $X(t)$,若在确定区间$[a,b]$上每一个样本函数的下列积分都存在

$$Y=\int_a^b X(t)\mathrm{d}t \tag{1.9}$$

则称 Y 为随机过程 $X(t)$的积分。

由于对每个试验结果 ξ,积分都可以得到一个数 $Y(\xi)$;但对不同的 ξ,积分值 $Y(\xi)$是不同的,于是对所有的实验结果,Y 是一个随机变量。而对每一个样本函数,此积分是通常意义下的积分。

在更一般的情况下,$X(\xi,t)$的积分并不对每一个 ξ 都存在,此时需要用以下方式来定义 Y。

定义 16　对于给定的实随机过程 $X(t)$,若在确定区间$[a,b]$上每一个样本函数的下列积分

$$Y=\int_a^b X(t)\mathrm{d}t$$

满足

$$\lim_{\Delta t_i\to 0}E\left[\left(Y-\sum_{i=1}^n X(t_i)\Delta t_i\right)^2\right]=0 \tag{1.10}$$

则称随机变量

$$Y=\int_a^b X(t)\mathrm{d}t=\lim_{\Delta t_i\to 0}\sum_{i=1}^n X(t_i)\Delta t_i$$

为随机过程 $X(t)$在确定区间$[a,b]$上的均方积分。这里虽然沿用了一般确知函数的积分符号,但其意义为均方意义下的积分。以后所讨论的所有过程积分都是在均方意义下存在的。

对于式(1.9),可以推广到带有“权函数”的随机过程的积分。

定义 17　对于给定的实随机过程 $X(t)$和普通函数 $h(\lambda,t)$,在确定区间$[a,b]$上的积分

$$Y(t)=\int_a^b X(\lambda)h(\lambda,t)\mathrm{d}\lambda \tag{1.11}$$

称为随机过程 $X(t)$在确定区间$[a,b]$上的加权积分。$Y(t)$是一个新的随机过程。

定义 18 对于给定的实随机过程 $X(t)$

$$Y(t)=\int_a^t X(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \tag{1.12}$$

为随机过程 $X(t)$在区间$[a,t]$上的变上限积分。

2. 随机过程积分的数学期望与相关函数

随机过程积分的数学期望为

$$E[Y]=m_Y=E\left[\int_a^b X(t)\,\mathrm{d}t\right]=E\left[\lim_{\Delta t_i\to 0}\sum_{i=1}^n X(t_i)\Delta t_i\right]$$

$$=\lim_{\Delta t_i\to 0}\sum_{i=1}^n E[X(t_i)]\Delta t_i=\int_a^b E[X(t)]\mathrm{d}t=\int_a^b m_X(t)\,\mathrm{d}t$$

上式表明:随机过程积分的数学期望等于随机过程数学期望的积分。也就是说,积分运算与数学期望的运算次序可以互换。

加权随机过程积分的数学期望为

$$E[Y(t)]=m_Y(t)=E\left[\int_a^b X(\lambda)h(\lambda,t)\,\mathrm{d}\lambda\right]$$

$$=\int_a^b E[X(\lambda)]h(\lambda,t)\,\mathrm{d}\lambda=\int_a^b m_X(\lambda)h(\lambda,t)\,\mathrm{d}\lambda$$

随机过程的变上限积分的数学期望为

$$E[Y(t)]=E\left[\int_a^t X(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\right]=\int_a^t E[X(\lambda)]\mathrm{d}\lambda=\int_a^t m_X(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

由于式(1.9)和式(1.10)所定义的积分是一个随机变量,所以该积分的均方值为

$$E[Y^2]=E\left[\int_a^b X(t_1)\,\mathrm{d}t_1\int_a^b X(t_2)\,\mathrm{d}t_2\right]=\int_a^b\int_a^b E[X(t_1)X(t_2)]\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2$$

$$=\int_a^b\int_a^b R_X(t_1,t_2)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2$$

进一步可求得 Y 的方差为

$$\sigma_Y^2=E[Y^2]-E^2[Y]=\int_a^b\int_a^b R_X(t_1,t_2)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2-\int_a^b E[X(t_1)]\mathrm{d}t_1\int_a^b E[X(t_2)]\mathrm{d}t_2$$

$$=\int_a^b\int_a^b R_X(t_1,t_2)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2-\int_a^b\int_a^b m_X(t_1)m_X(t_2)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2=\int_a^b\int_a^b K_X(t_1,t_2)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2$$

对于式(1.11)所定义的积分 $Y(t)$的相关函数为

$$R_Y(t_1,t_2)=E[Y(t_1)Y(t_2)]=E\left[\int_a^b X(\lambda_1)h(\lambda_1,t_1)\,\mathrm{d}\lambda_1\int_a^b X(\lambda_2)h(\lambda_2,t_2)\,\mathrm{d}\lambda_2\right]$$

$$=\int_a^b\int_a^b R_X(\lambda_1,\lambda_2)h(\lambda_1,t_1)h(\lambda_2,t_2)\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_2$$

对于式(1.12)所定义的积分 $Y(t)$的相关函数为

$$R_Y(t_1, t_2) = E[Y(t_1)Y(t_2)] = E\left[\int_a^{t_1} X(\lambda_1)\mathrm{d}\lambda_1 \int_a^{t_2} X(\lambda_2)\mathrm{d}\lambda_2\right]$$

$$= \int_a^{t_1}\int_a^{t_2} R_X(\lambda_1, \lambda_2)\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2$$

例 1.5 设随机信号 $X(t) = V\mathrm{e}^{3t}\cos 2t$,其中 V 是均值为 5、方差为 1 的随机变量。现设新的随机信号 $Y(t) = \int_a^t X(\lambda)\mathrm{d}\lambda$,试求 $Y(t)$的均值、相关函数、协方差函数和方差。

解 因为 $E[V]=5, D[V]=1$,于是

$$E[V^2] = D[V] + E^2[V] = 1 + 5^2 = 26$$

所以 $X(t)$的均值和相关函数分别为

$$m_X(t) = E[X(t)] = E[V\mathrm{e}^{3t}\cos 2t] = \mathrm{e}^{3t}\cos 2t E[V] = 5\mathrm{e}^{3t}\cos 2t$$

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[V\mathrm{e}^{3t_1}\cos 2t_1 V\mathrm{e}^{3t_2}\cos 2t_2]$$

$$= E[V^2]\mathrm{e}^{3t_1}\cos 2t_1\mathrm{e}^{3t_2}\cos 2t_2 = 26\mathrm{e}^{3t_1+3t_2}\cos 2t_1\cos 2t_2$$

因此 $Y(t)$的均值为

$$m_Y(t) = \int_0^t m_X(\lambda)\mathrm{d}\lambda = 5\int_0^t \mathrm{e}^{3\lambda}\cos 2\lambda\mathrm{d}\lambda = \frac{5}{13}[\mathrm{e}^{3t}(2\sin 2t + 3\cos 2t) - 3]$$

$Y(t)$的相关函数为

$$R_Y(t_1, t_2) = E[Y(t_1)Y(t_2)] = \int_a^{t_1}\int_a^{t_2} R_X(\lambda_1, \lambda_2)\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2$$

$$= 26\int_a^{t_1}\int_a^{t_2} \mathrm{e}^{3(\lambda_1+\lambda_2)}\cos 2\lambda_1\cos 2\lambda_2\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2$$

$$= \frac{26}{169}[\mathrm{e}^{3t_1}(2\sin 2t_1 + 3\cos 2t_1) - 3]\times[\mathrm{e}^{3t_2}(2\sin 2t_2 + 3\cos 2t_2) - 3]$$

$Y(t)$的协方差函数为

$$K_Y(t_1, t_2) = R_Y(t_1, t_2) - m_Y(t_1)m_Y(t_2)$$

$$= \frac{1}{169}[\mathrm{e}^{3t_1}(2\sin 2t_1 + 3\cos 2t_1) - 3]\times[\mathrm{e}^{3t_2}(2\sin 2t_2 + 3\cos 2t_2) - 3]$$

$Y(t)$的方差函数为

$$\sigma_Y^2(t) = K_Y(t, t) = \frac{1}{169}[\mathrm{e}^{3t}(2\sin 2t + 3\cos 2t) - 3]^2$$

1.3 平稳随机过程及其遍历性

1.3.1 平稳随机过程

平稳随机过程 $X(t)$是在时间平移下概率性质不变的随机过程。这是为了对没

有固定时间(空间)起点的物理系统中的最自然的现象进行描述而提出来的,概括了这些现象的基本特性。例如,纺织过程中棉纱横截面积的变化,军舰在海浪中的颠簸,通信中的噪声等,它们都可用平稳随机过程进行描述。因而平稳随机过程 $X(t)$ 在通信理论、天文学、生物学、生态学和经济学等各个领域中得到了广泛的应用。这类过程一方面受随机因素的影响产生波动,同时又有一定的惯性,使在不同时刻的波动特性基本保持不变。其统计特性是,任意有限维分布函数不随时间的推移而改变;当过程随时间的变化而产生随机波动时,其前后状态是相互联系的,即不但它的当时情况,而且它的过去情况对未来都有不可忽视的影响。按照描述平稳随机过程的统计特性的不同,平稳随机过程可分为严平稳随机过程和宽平稳随机过程。

1. 严平稳随机过程及其数字特征

定义 19　一个随机过程 $X(t)$,如果它的 n 维概率密度(或 n 维分布函数)$f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$不随时间起点选择的不同而改变,就是说对于任何的 n 和 τ,$X(t)$的 n 维概率密度满足

$$f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau) \tag{1.13}$$

则称 $X(t)$为严(格)平稳随机过程(或称狭义平稳随机过程)。

严平稳随机过程的统计特性与所选取的时间起点无关。或者说,整个过程的统计特性不随时间的推移而变化。例如,我们今天测出的某个平稳过程的统计特性和前些时候(如上个月)所测得同一过程的统计特性相同。

通常按照式(1.13)来判定一个随机过程的平稳性是困难的。在实际中,如果产生随机过程的主要物理条件在时间进程中不变化,那么此过程就可以被认为是平稳的。在无线电电子学的实际应用中所遇到的过程,有很多都可以认为是平稳随机过程。例如,一个工作在稳定状态下的接收机;其输出噪声就可以认为是平稳随机过程。但当刚接上电源时,该接收机还工作在过渡状态,此时的输出噪声是非平稳随机过程。另外,有些非平稳过程,在一定的时间范围内可以作为平稳过程来处理。实际上,在很多问题的研究中往往并不需要在所有时间都平稳,只要在我们所观测的有限时间内过程平稳就可以了。

将随机过程划分为平稳和非平稳有着重要的实际意义。若过程是属于平稳的,可使问题的分析大为简化。例如,测量电阻热噪声的统计特性,它是平稳过程,因而在任何时间进行测试都能得到相同的结果。

平稳随机过程的 n 维概率密度不随时间平移而变化的特性,反映在其一、二维概率密度及数字特征上具有以下性质:

(1) 若 $X(t)$为平稳过程,则它的一维概率密度与时间无关。

在式(1.13)中,令 $n=1$ 和 $\tau=-t_1$,则有

$$f_X(x_1;t_1)=f_X(x_1;t_1+\tau)=f_X(x_1;0)=f_X(x_1) \tag{1.14}$$

这样 $X(t)$的均值、均方值和方差显然应与时间无关。可分别表示为

$$m_X=E[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x_1 f_X(x_1)\mathrm{d}x_1 \tag{1.15}$$

$$\Psi_X^2=E[X^2(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x_1^2 f_X(x_1)\mathrm{d}x_1 \tag{1.16}$$

$$\sigma_X^2=D[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-m_X)^2 f_X(x_1)\mathrm{d}x_1 \tag{1.17}$$

(2) 平稳过程 $X(t)$的二维概率密度只与 t_1、t_2 的时间间隔有关,而与时间起点无关。

在式(1.13)中,令 $n=2$ 和 $\tau=-t_1$,$\eta=t_2-t_1$,则有

$$\begin{aligned}f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)&=f_X(x_1,x_2;t_1+\tau,t_2+\tau)\\&=f_X(x_1,x_2;0,t_2-t_1)=f_X(x_1,x_2;\eta)\end{aligned} \tag{1.18}$$

这样 $X(t)$的相关函数仅与时间间隔 $\eta=t_2-t_1$ 有关,即

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1,t_2)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2 f_X(x_1,x_2;\eta)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=R_X(\eta) \tag{1.19}$$

同理可得自协方差函数为

$$K_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-m_X^2=K_X(\eta) \tag{1.20}$$

当 $t_1=t_2=t$时

$$K_X(0)=R_X(0)-m_X^2=\sigma_X^2 \tag{1.21}$$

2. 宽平稳随机过程

在实际中,要确定一个对一切 n都成立的随机过程概率密度函数族是十分困难的,因而在工程上往往根据实际需要只在相关理论的范围内考虑平稳过程问题。所谓相关理论是指:只限于研究随机过程一阶和二阶矩的理论。换言之,主要研究随机过程的数学期望、相关函数以及第二章将要讨论的功率谱密度等。

随机过程的一、二阶矩函数虽然不能像多维概率分布那样全面地描述随机过程的统计特性,但它们在一定程度上相当有效地描述了随机过程的一些重要特性。我们以电子技术为例,若平稳过程 $X(t)$表示噪声电压(或电流),那么一、二阶矩函数实际可以给出噪声的平均功率的直流分量、交流分量、功率的频率分布和总平均功率等重要参数。对很多实际工程技术而言,往往获得了这些参数,就能解决问题了。此外,工程技术中经常遇到的最重要的随机过程是高斯过程,对这类随机过程,只要给定数学期望和相关函数,它的多维概率密度就完全确定了。

定义 20　若随机过程 $X(t)$的均值函数与协方差函数存在,且满足

(1)
$$E[X(t)]=m_X\text{（常数）} \tag{1.22}$$

(2)　　$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=R_X(\tau),\quad \tau=t_2-t_1$　　(1.23)

则称 $X(t)$为宽平稳过程(或广义平稳过程),简称平稳过程。

由定义可知,条件(1)表明平稳过程的均值不随时间的推移而改变,条件(2)表明过程在前后两个任意时刻的线性相关程度只依赖于这两个时刻之间的间隔,而与它们所在的位置无关。宽平稳过程反映了一个系统处于稳态工作条件下的统计性质。

宽平稳随机过程的定义只涉及与一、二维概率密度有关的数字特征,因此,一个严平稳过程只要均方值有界,就是广义平稳的。反之则不一定。不过有个重要的例外,这就是高斯过程,因为它的概率密度函数可由均值和自相关函数完全确定,所以,若均值与自相关函数不随时间平移而变化,则概率密度函数也不随时间的平移而变化。于是,一个广义平稳的高斯过程也必定是严平稳的。

不失一般性,今后我们总假定平稳过程的均值 $E[X(t)]=0$,这时平稳过程的协方差函数 $K_X(t_1,t_2)=K_X(\tau)$与相关函数 $R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=R_X(\tau)$相等。当 $X(t)$的均值函数 $E[X(t)]\neq 0$ 时,可通过定义 $Y(t)=X(t)-E[X(t)]$来得到均值 $E[Y(t)]=0$ 的平稳过程 $Y(t)$。

今后除特别指明外,“平稳随机过程”指的是宽平稳过程。

例 1.6　设随机过程 $X(t)$由下述三个样本函数组成,且等概率发生

$$X(\xi_1,t)=1,\quad X(\xi_2,t)=\sin t,\quad X(\xi_3,t)=\cos t$$

计算 $X(t)$的均值和自相关函数,并判断 $X(t)$是否平稳。

解　$m_X(t)=E[X(t)]=\frac{1}{3}(1+\sin t+\cos t)$

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\sin t_1\sin t_2+\frac{1}{3}\cos t_1\cos t_2$$

$$=\frac{1}{3}(1+\cos\tau)$$

由于 $m_X(t)$与时间 t 有关,故 $X(t)$是非平稳的。

例 1.7　设随机过程 $Z(t)=X\sin t+Y\cos t$,其中 X 和 Y 是相互独立的二元随机变量,它们都分别以 2/3 和 1/3 的概率取 −1 和 2,试求:

(1) $Z(t)$的均值和自相关函数;

(2) 证明 $Z(t)$是宽平稳,但不是严平稳的。

解　$m_Z(t)=E[Z(t)]=E[X]\sin t+E[Y]\cos t$

$$\begin{aligned}R_Z(t_1,t_2)&=E[Z(t_1)Z(t_2)]=E[(X\sin t_1+Y\cos t_1)(X\sin t_2+Y\cos t_2)]\\&=E[X^2]\sin t_1\sin t_2+E[XY]\cos t_1\sin t_2+E[XY]\cos t_1\sin t_2\\&\quad+E[Y^2]\cos t_1\cos t_2\end{aligned}$$

由于

$$E[X] = E[Y] = (-1)\times\frac{2}{3} + 2\times\frac{1}{3} = 0$$

$$E[X^2] = E[Y^2] = (-1)^2\times\frac{2}{3} + 2^2\times\frac{1}{3} = 2$$

$$E[XY] = E[X]E[Y] = 0$$

这样有

$$m_Z(t) = 0$$

$$R_Z(t_1, t_2) = 2\cos(t_2 - t_1) = 2\cos\tau = R_Z(\tau)$$

$$R_Z(0) = 2 < \infty$$

所以 $Z(t)$是宽平稳的。

如果 $Z(t)$是严平稳的，则它的任意阶矩应与时间 t无关，所以下面考查 $Z(t)$的三阶矩。

$$\begin{aligned} E[Z^3(t)] = {} & E[(X\sin t + Y\cos t)^3] = E[X^3]\sin^3 t + 3E[X^2Y]\sin^2 t\cos t \\ & + 3E[XY^2]\sin t\cos^2 t + E[Y^3]\cos^3 t \end{aligned}$$

因为

$$E[X^3] = E[Y^3] = (-1)^3\times\frac{2}{3} + 2^3\times\frac{1}{3} = 2$$

$$E[X^2Y] = E[X^2]E[Y] = 0$$

$$E[XY^2] = E[X]E[Y^2] = 0$$

这样有

$$E[Z^3(t)] = 2(\sin^3 t + \cos^3 t)$$

所以 $Z(t)$不是严平稳的。

1.3.2　平稳随机过程相关函数性质

数学期望和相关函数是随机过程的基本数字特征。对平稳过程而言，由于它的数学期望是常数，经中心化后为零，所以基本特征实际就是相关函数。相关函数不仅可向我们提供随机过程各随机变量（状态）间关联特性的信息，而且也是求取随机过程的功率谱密度以及从噪声中提取有用信息的工具。深入理解相关函数的性质将有助于我们深入研究平稳随机过程。

1. 自相关函数性质

(1)
$$R_X(0) = E[X^2(t)] = \Psi_X^2 \geqslant 0 \tag{1.24}$$

即自相关函数在 $\tau=0$ 处的值给出了平稳过程的均方值，它表示了平稳过程的“平均功率”。