国家工科基地教材
工程数学与教学软件

概率论与数理统计

（第二版）

上海交通大学数学系　编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书介绍概率论与数理统计的基本概念、基本理论和方法,并结合计算机使学生能利用数学软件解决一些简单的概率统计问题.内容包括随机事件及其概率,随机变量及其分布,多维随机变量及其分布,随机变量的数字特征,大数定律和中心极限定理,数理统计的基本概念,参数估计,假设检验,方差分析和回归分析初步等.每个章末均有习题,供学生练习之用.

本书可作为工科、理科(非数学)类各专业本科学生的教材和相关课程教师的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/上海交通大学数学系编.—2版.—北京:科学出版社,2007

国家工科基地教材·工程数学与教学软件

ISBN 978-7-03-018498-6

Ⅰ.概… Ⅱ.上… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第012823号

责任编辑:姚莉丽/责任校对:张 琪

责任印制:张克忠/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2000年1月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2007年2月第 二 版 印张:18

2007年2月第十二次印刷 字数:334 000

印数:45 001—51 000

定价:20.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

第二版前言

本教材是《概率论与数理统计》(科学出版社,2000)的第二版.

近年来,随着科学技术的发展,概率论与数理统计在众多的学科与行业中得到了越来越广泛的应用,另一方面,对学生数学素养和应用能力的要求明显提高.在这种情况下,在多年教学实践的基础上,再版编写一本突出基本思想方法、简明扼要、便于学习和适应教学新形势的概率论与数理统计教材是十分必要的.

本教材在保持第一版特点的基础上,努力将概率论和数理统计的基本思想和方法融入各部分内容的阐述之中,力求做到科学性与通俗性相结合,在内容的处理上由具体到一般,由直观到抽象,由浅入深,循序渐进.书中对主要的内容和方法做了归纳总结,略去了一些较难或叙述较繁琐的证明.修改了一些例题和习题,以使学生能较好地掌握概率统计的基本概念和方法.

本教材课内教学需要 36～45 学时,教师可根据需要酌情选用标注“*”的章节.

本书由贺才兴教授主编.第一、四章由贺才兴撰写,第二、三章由王纪林撰写,第五～九章由童品苗撰写,第十章由刘小军修撰.希望本书更有利于学生数学素养的培养和提高,更有利于概率论教学的改革和发展.希望广大读者提出宝贵的意见.

本书的再版得到了科学出版社鼎力帮助与上海交通大学教务处及数学系领导的关心和支持,在此深表感谢.

编　者

2006 年 10 月于上海交通大学

第一版前言

本书可作为高等学校工科、理科（非数学专业）概率论与数理统计课程的教材，也可供成人教育的广大师生和工程技术人员使用．

本书分三个部分．第一章至第五章为概率论部分，作为基础知识，为读者提供了必要的理论基础．第六章至第九章为数理统计部分，主要介绍了有广泛应用意义的参数估计、假设检验和简单的方差分析与一元回归分析．第十章为数学软件部分，可用于计算机辅助教学，读者可根据需要选用．

我们在选材和叙述上尽量联系工科专业的实际，力图做到叙述简洁，清晰易懂，便于教学．例题和习题的配置注意启发性和应用性．全书以基础概念和基本思想方法为核心，突出重点，简明扼要．

我们认为，一本教材不能是教学材料的简单堆砌，为适用工科专业的学生，在选材上进行了全面的探索，同时为了进行理性思维训练，教材内容又具有必要的系统性和严谨性．我们注意到体现数学的活力，讲概念注意其背景，讲思想又有演化过程．合理运用“推导”与“归纳”方法，注意分析典型例子，教会学生如何思考和分析，使学生从不同内容的内在联系上体会数学思维和应用的精髓，同时注意培养使用计算机解决问题的能力，加强动手能力的训练．

面向21世纪我国的人才培养和大学的数学教育是一个十分重大的研究和实践课题．我校多年来在教育思想研究、课程体系和内容改革、教学方案的设计与实践等多方面做了一些探索和工作，本书的出版也是一个探索、改革的结果，希望广大读者提出宝贵的意见．

本书的出版得到了科学出版社鼎力帮助与上海交通大学教务处以及应用数学系的关心和支持，乐经良教授参加了第十章数学软件的编写，在此一并深表感谢．

编著者

1999年8月于上海交通大学

目　录

引　　言

客观世界中发生的现象多种多样，归纳起来不外乎两种：确定性的和随机性的．在一定的条件下必然发生的现象，称之为确定性现象．例如，水在 1 个大气压下温度达到 100℃时必然沸腾，温度为 0℃时必然结冰，等等．另有一类现象，在一定的条件下，具有多种可能的结果，但事先又不能预知确切的结果，此类现象称为随机现象．例如，在相同条件下抛掷同一枚硬币，其结果可能是国徽面朝上，也可能是国徽面朝下，并且在抛掷之前无法预知抛掷的结果．

经典的数学理论如微积分学、微分方程等都是研究确定性现象的有力的数学工具．随着社会生产与科学技术的发展，研究随机现象的统计规律性的理论和方法获得了迅速的发展，形成了数学的一个重要分支，并被广泛应用于工业、农业、军事和科学技术中．概率论与数理统计就是现代数学理论中研究和揭示随机现象统计规律性的一门基础学科．

经典数学和概率论与数理统计是相辅相成、互相渗透的．若视炮弹为一个质点，且不考虑阻力及其他因素的微小影响，则一枚炮弹在空中飞行的曲线——弹道曲线可归结为微分方程问题，从而得到一条确定的抛物线．若把空气阻力按一定方式考虑进去，则仍可由微分方程的方法得到一条确定的弹道曲线．然而，在实际发射中会发现炮弹的飞行路线与弹道曲线存在着明显的差异，这些差异正是由于飞行路线受到捉摸不定的空气阻力、炮弹本身的不均匀性及弹身振动等的影响而造成的．概率统计的方法就是研究将这些次要因素加以考虑而造成飞行路线的不确定性的规律．

必须指出，若没有了用经典数学方法求出的弹道曲线，则考察飞行路线的偏差就毫无意义．这说明某些概率统计的问题必须辅之以经典数学的方法；经典数学研究的某些问题又必须用概率统计的方法加以补充解决．应正确认识两者之间这种相辅相成的关系．

第一章　随机事件及其概率

1.1　随机事件及其运算

1.1.1　随机试验

在进行个别试验或观察时其结果具有不确定性,但在大量的重复试验中其结果又具有统计规律性的现象,称为**随机现象**.为对随机现象加以研究所进行的观察或实验,称为**试验**.若一个试验满足下列三个特点:

(1) 在相同条件下可以重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且事先可以知道试验的所有可能结果;

(3) 进行一次试验之前不能确定出现的是哪个结果,

则称这一试验为**随机试验**,记为 E.例如,

E_1:抛掷一枚硬币,观察正面和反面出现的情况;

E_2:掷一颗骰子,观察出现的点数;

E_3:对某一目标发射一发炮弹,观察弹着点到目标的距离;

E_4:记录电话交换台在上午 9 时到 10 时接到的电话呼唤次数;

E_5:测试某种型号的灯泡的寿命;

等等.

1.1.2　随机事件与样本空间

在随机试验中,可能发生也可能不发生的结果,称为**随机事件**,简称**事件**.

在一个试验中,不论可能的结果有多少个,总可以从中找出这样一组基本结果,满足:

(1) 每进行一次试验,必然出现且只能出现其中的一个基本结果;

(2) 任何事件,都是由其中的一些基本结果所组成.

随机试验中的每一个基本结果是一个随机事件,称为**基本事件**,或称为**样本点**,记为 ω.

随机事件 E 的全体样本点组成的集合称为试验 E 的**样本空间**,记为 Ω.

随机事件可表述为样本空间中样本点的某个集合,一般记为 A,或 B,C 等等.

所谓事件 A 发生,是指在一次试验中,当且仅当 A 中包含的某个样本点出现.

在每次试验中一定发生的事件称为**必然事件**.样本空间 Ω 包含所有的样本点,每次试验它必然发生,它就是一个必然事件.必然事件用 Ω 表示,它是样本空间 Ω 的一个子集.

在每次试验中一定不发生的事件称为**不可能事件**,记为 $\varnothing$.它是样本空间的一个空子集.

下面写出 1.1.1 节中随机试验 E 的样本空间及随机事件的例子.

E_1:$\Omega=\{(\text{正面}),(\text{反面})\}$.

E_2:$\Omega=\{(1\text{ 点}),(2\text{ 点}),\cdots,(6\text{ 点})\}$.

E_3:$\Omega=\{(\text{弹着点到目标的距离 } w \text{ 米})\mid 0\leqslant w<+\infty\}$.

E_4:$\Omega=\{(0\text{ 次}),(1\text{ 次}),\cdots\}$.

E_5:$\Omega=\{t\text{ 小时}\mid t_1\leqslant t\leqslant t_2\}$.

在 E_2 中,若 A 为"出现奇数点"的事件,则 $A=\{(1\text{ 点}),(3\text{ 点}),(5\text{ 点})\}$;若 B 为"出现的点数小于 5"的事件,则 $B=\{(1\text{ 点}),(2\text{ 点}),(3\text{ 点}),(4\text{ 点})\}$.

在 E_3 中,若 A 为"弹着点到目标的距离在 1 米到 3 米之间"的事件,则 $A=\{w\mid 1\leqslant w\leqslant 3\}$.

1.1.3 事件之间的关系及其运算

事件是一个集合,因此事件之间的关系及其运算可用集合之间的关系及运算来处理.下面我们通过例 1 来加以说明.

例 1 袋中装有 2 只白球和 1 只黑球,从袋中依次任意地摸出 2 只球.设球是编号的:白球为 1 号、2 号,黑球为 3 号.(i,j)表示第一次摸得 i 号球、第二次摸得 j 号球的基本事件,则这一试验的样本空间

$$\Omega=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}.$$

且可得下列随机事件:

$A=\{(3,1),(3,2)\}=\{\text{第一次摸得黑球}\}$;

$B=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3)\}=\{\text{第一次摸得白球}\}$;

$C=\{(1,2),(2,1)\}=\{\text{两次都摸得白球}\}$;

$D=\{(1,3),(2,3)\}=\{\text{第一次摸得白球,第二次摸得黑球}\}$;

$G=\{(1,2),(2,1)\}=\{\text{没有摸到黑球}\}$.

下面我们讨论事件之间的关系及运算.

设 Ω 为某试验 E 的样本空间,$A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$为随机事件.

1. 事件的包含与相等

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,即 A 中的样本点一定属于 B,则称事件 B **包含**事件 A,记为 $A\subset B$.

如在例 1 中,事件 C 发生必然导致事件 B 发生,故 $C\subset B$.

显然对任意事件 A,都有$\varnothing\subset A\subset\Omega$.

若 $A\subset B$,且 $B\subset A$,则称事件 A 与事件 B 是**相等**的,记为 $A=B$.

如在例 1 中,$G\subset C$,且 $C\subset G$,故 $C=G$.

2. 事件的和、积、差

事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的事件,称为事件 A 与事件 B 的**和**,记为 $A\cup B$.事件的和也称为事件的**并**.事件 A 与 B 的和是由 A 与 B 的样本点合并而成的事件.

类似地,可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的和可记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$,或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$. n个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和可记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

事件 A 与事件 B 同时发生的事件,称为事件 A 与事件 B 的**积**,记为 $A\cap B$,也可简写为 AB.事件的积也称为事件的**交**.事件 A 与 B 的积是由 A 与 B 的公共的样本点所构成的事件.

类似地,可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的积可记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$. n个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积可记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件,称为事件 A 与 B 的**差**,记为 $A-B$.事件 A 与 B 的差是由属于 A 而不属于 B 的样本点所构成的事件.

如在例 1 中,$B=C\cup D$, $C=B\cap C$, $D=B-C$.

3. 事件的互不相容(互斥)

若 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 是**互不相容**的,或称 A 与 B 是**互斥**的.A 与 B 互不相容,是指事件 A 与事件 B 不能同时发生.例如,基本事件是两两互不相容的.

在例 1 中,$A\cap B=\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$,即事件 A 分别与事件 B 和事件 C 互不相容.

4. 对立事件

若 $A\cap B=\varnothing$,且 $A\cup B=\Omega$,则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**,或称 A 与 B 互为**逆事件**.A 与 B 对立,是指事件 A 与事件 B 既不能同时发生又不能同时不发生,即在每次试验中,A 与 B 有且仅有一个发生.A 的对立事件记为$\bar{A}$.显然,$\bar{A}=\Omega-A$.

如在例 1 中,A 与 B 互为对立事件,即$\bar{A}=B$.

由定义可知,对立事件必为互不相容事件,反之,互不相容的两个事件未必为对立事件.

以上事件之间的关系及运算可以用**文氏(Venn)图**来直观地表示.若用平面上的一个矩形表示样本空间 Ω,矩形内的点表示基本事件,圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B,则 A 与 B 的各种关系及运算如图(图 1-1～图 1-6)所示.

$A\subset B$

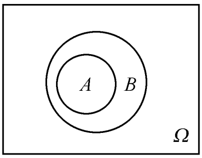

图 1-1

$A\cup B$

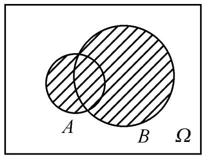

图 1-2

$A\cap B$

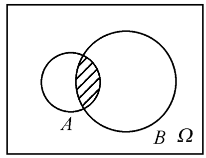

图 1-3

$A-B$

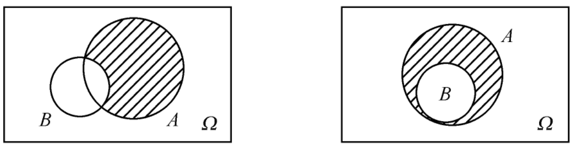

图 1-4

$\overline{A}$

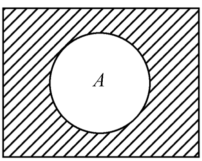

图 1-5

$AB=\varnothing$

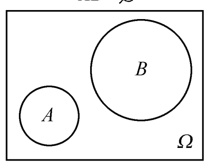

图 1-6

5. 事件的运算律

设 $A,B,C,A_k(k=1,2,\cdots)$为事件,则有

交换律　$A\cup B=B\cup A$;$A\cap B=B\cap A$.

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$;$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

德 · 摩根(De Morgan)律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$;$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

一般地,对有限个事件及可列无限个事件也有

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}; \qquad \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k};$$
$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}; \qquad \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}.$$

例 2　设 A,B,C 为三个事件,试用 A,B,C 表示下列事件:

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生;

(2) A 与 B 都发生而 C 不发生;

(3) A,B,C 都发生;

(4) A,B,C 恰有一个发生;

(5) A,B,C 中至少有一个发生;

(6) A,B,C 中不多于两个发生;

(7) A,B 至少有一个发生而 C 不发生;

(8) A,B,C 恰有两个发生.

解　(1) $A\overline{BC}$或 $A-B-C$.

(2) $AB\overline{C}$或 $AB-C$.

(3) ABC.

(4) $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$ * .

(5) $A\cup B\cup C$,或 $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$.

(6) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$,或$\overline{ABC}$.

(7) $(A\cup B)\overline{C}$,或 $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+AB\overline{C}$.

(8) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$.

例 3　试求事件"甲种产品滞销,且乙种产品畅销"的对立事件.

解　设 A 表示"甲种产品畅销",B 表示"乙种产品畅销",则由题意,有

$$\overline{\overline{A}\cap B} = \overline{\overline{A}} \cup \overline{B} = A \cup \overline{B},$$

即所求对立事件为"甲种产品畅销或乙种产品滞销".

1.2　概率的定义及其运算

除必然事件与不可能事件外,任一随机事件在一次试验中都有发生的可能性,人们常常通过实际观察来确定某个事件发生的可能性的大小.例如遇到某种天气,人们常会说"今天十之八九要下雨",这个"十之八九"就是表示"今天下雨"这一事件发生可能性的大小.这是人们通过大量实践所得出的一种统计规律,即已经历过 n 次这种天气,下雨的天数在这 n 天中所占比例大约是 $\frac{8}{10}$ 到 $\frac{9}{10}$.一般地,人们希望

* 若 A 与 B 为互不相容事件,则 $A\cup B$ 可记为 $A+B$.

用一个适当的数字来表示事件在一次试验中发生的可能性的大小.这是就下面所讨论的随机事件发生的频率与概率.

1.2.1 频率

定义 1.1 设在相同的条件下,进行了 n 次试验.若随机事件 A 在这 n 次试验中发生了 n_A 次,则比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**,记为 $f_n(A)$.

频率具有如下性质:

1° 对任一事件 A,有 $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$;

2° 对必然事件 Ω,有 $f_n(\Omega)=1$;

3° 若事件 A,B 互不相容,则

$$f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B).$$

一般地,若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容,则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f_n(A_i).$$

事件 A 发生的频率表示 A 发生的频繁程度.频率越大,事件 A 发生得越频繁,即 A 在一次试验中发生的可能性越大.但是,频率具有随机波动性,即使同样进行了 n 次试验,n_A 却会不同.但这种波动不是杂乱无章的,在第五章大数定律中,我们将看到若增加试验次数 n,则随机波动性将会减小.随着 n 逐渐增大,频率 $f_n(A)$ 也就逐渐稳定于某个常数 $P(A)$.这样,常数 $P(A)$ 客观上反映了事件 A 发生的可能性的大小.

历史上著名的统计学家蒲丰(Buffon)和皮尔逊(Pearson)曾进行过大量掷硬币的试验,所得结果如下:

试验者	掷硬币次数	出现正面的次数	出现正面的频率
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

可见出现正面的频率总在 0.5 附近波动.随着试验次数的增加,它逐渐稳定于 0.5.这个 0.5 就能反映正面出现的可能性的大小.

每个事件都有这样一个常数与之对应.这就是说频率具有**稳定性**.因而可将事件 A 的频率 $f_n(A)$ 在 n 无限增大时所逐渐趋向稳定的那个常数 $P(A)$ 定义为事件 A 发生的概率.这就是概率的**统计定义**.

1.2.2 概率的统计定义

定义 1.2 设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生的次数为 n_A.若当试验次数

n 很大时，频率 $\frac{n_A}{n}$ 稳定地在某一数值 p 的附近摆动，且随着试验次数 n 的增加，其摆动的幅度越来越小，则称数 p 为随机事件 A 的**概率**，记为 $P(A)=p$.

由定义，显然有

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1, \quad P(\Omega)=1, \quad P(\varnothing)=0.$$

概率的统计定义本身存在着很大的缺陷，即定义中的“稳定地在某一数值 p 的附近摆动”含义不清，如何理解“摆动的幅度”？或多或少地带有人为的主观性. 是否能抓住一个事件所对应的客观上表示该事件发生可能性大小的一个数，及它所固有的性质来作为概率的定义呢？概率的公理化定义解决了这一问题.

1.2.3　概率的公理化定义

定义 1.3　设随机试验 E 的样本空间为 Ω. 若按照某种方法，对 E 的每一事件 A 赋于一个实数 $P(A)$，且满足以下公理：

1°　**非负性**：$P(A)\geqslant 0$；

2°　**规范性**：$P(\Omega)=1$；

3°　**可列(完全)可加性**：对于两两互不相容的可列无穷多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots) = P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots,$$

则称实数 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

由概率的定义可以推得概率的如下一些性质.

性质 1　不可能事件的概率为零，即 $P(\varnothing)=0$.

证　因为令 $A_n=\varnothing, n=1,2,\cdots$，且 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j$，则 $\varnothing=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$，于是

$$P(\varnothing) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\varnothing),$$

从而由 $P(\varnothing)\geqslant 0$，得 $P(\varnothing)=0$.

性质 2　概率具有有限可加性，即若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

证　因为

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots,$$

所以由概率的可列可加性及性质 1，得

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

性质 3　对任何事件 A，有

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

证　因为

$$A \cup \overline{A} = \Omega, \quad A \cap \overline{A} = \varnothing,$$

所以由

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}),$$

即得

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

同时,由 $P(\overline{A}) \geqslant 0$ 可推得:对任一事件 A,有

$$P(A) \leqslant 1.$$

性质 4 对事件 A,B,若 $A \subset B$,则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A), \qquad P(B) \geqslant P(A).$$

证 由 $A \subset B$ 及图 1-1 可知

$$B = A \cup (B - A) \quad 且 \quad A \cap (B - A) = \varnothing,$$

因此由性质 2,得

$$P(B) = P(A) + P(B - A),$$

即

$$P(B - A) = P(B) - P(A).$$

再由 $P(B - A) \geqslant 0$,得

$$P(B) \geqslant P(A).$$

性质 5 对任意两事件 A,B,有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证 由图 1-2 可知

$$A \cup B = A \cup (B - A), \qquad B = AB \cup (B - A),$$

且

$$A \cap (B - A) = \varnothing, \qquad AB \cap (B - A) = \varnothing,$$

故得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A),$$

及

$$P(B) = P(AB) + P(B - A),$$

将以上两式相减,并将 $P(B)$移至等号右端,即得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

性质 5 还可推广到 n 个事件的情况.当 $n=3$ 时,有

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = {} & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) \\ & - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3). \end{aligned}$$

一般地,设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个事件,则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) - \cdots$$

$$+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

例 1　某人外出旅游两天.据天气预报,第一天下雨的概率为 0.6,第二天下雨的概率为 0.3,两天都下雨的概率为 0.1.试求:

(1) 第一天下雨而第二天不下雨的概率;

(2) 第一天不下雨而第二天下雨的概率;

(3) 至少有一天下雨的概率;

(4) 两天都不下雨的概率;

(5) 至少有一天不下雨的概率.

解　设 A_i 表示第 i 天下雨的事件,$i=1,2$.由题意,有

$$P(A_1)=0.6,\quad P(A_2)=0.3,\quad P(A_1A_2)=0.1.$$

(1) 设 B 表示第一天下雨而第二天不下雨的事件,则由

$$B=A_1\overline{A_2}=A_1-A_2=A_1-A_1A_2,\qquad A_1A_2\subset A_1,$$

得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1-A_1A_2)=P(A_1)-P(A_1A_2)\\&=0.6-0.1=0.5.\end{aligned}$$

(2) 设 C 表示第一天不下雨而第二天下雨的事件,则同(1)的解法,有

$$\begin{aligned}P(C)&=P(A_2-A_1A_2)=P(A_2)-P(A_1A_2)\\&=0.3-0.1=0.2.\end{aligned}$$

(3) 设 D 表示至少有一天下雨的事件,则由

$$D=A_1\cup A_2,$$

得

$$\begin{aligned}P(D)&=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)\\&=0.6+0.3-0.1=0.8.\end{aligned}$$

(4) 设 E 为两天都不下雨的事件,则由

$$E=\overline{A_1}\,\overline{A_2}=\overline{A_1\cup A_2},$$

得

$$P(E)=P(\overline{A_1\cup A_2})=1-P(A_1\cup A_2)=1-0.8=0.2.$$

(5) 设 F 表示至少有一天不下雨的事件,则

$$P(F)=P(\overline{A_1A_2})=1-P(A_1A_2)=1-0.1=0.9.$$

例 2　某地发行 A,B,C 三种报纸.已知在市民中订阅 A 报的有 45%,订阅 B 报的有 35%,订阅 C 报的有 30%,同时订阅 A 及 B 报的有 10%,同时订阅 A 及 C 报的有 8%,同时订阅 B 及 C 报的有 5%,同时订阅 A,B,C 报的有 3%.试求下列事件的概率:

(1) 只订 A 报;

(2) 只订 A 及 B 报;

(3) 至少订一种报纸；

(4) 不订任何报纸；

(5) 恰好订两种报纸；

(6) 恰好订一种报纸；

(7) 至多订一种报纸.

解 设 A,B,C 分别表示订 A 报、订 B 报、订 C 报的事件，则由题设，有

$$P(A)=0.45,\quad P(B)=0.35,\quad P(C)=0.30,$$
$$P(AB)=0.10,\quad P(AC)=0.08,\quad P(BC)=0.05,$$
$$P(ABC)=0.03.$$

(1) $$\begin{aligned}P(A\overline{B}\overline{C})&=P(A-B-C)=P(A-AB-AC)=P(A-A(B\cup C))\\&=P(A)-P(AB\cup AC)=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)\\&=0.45-0.10-0.08+0.03=0.30.\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}P(AB\overline{C})&=P(AB-C)=P(AB-ABC)=P(AB)-P(ABC)\\&=0.10-0.03=0.07.\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)\\&\quad+P(ABC)\\&=0.45+0.35+0.30-0.10-0.08-0.05+0.03\\&=0.90.\end{aligned}$$

(4) $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-0.90=0.10.$

(5) 由(2)，可知

$$P(A\overline{B}C)=P(AC)-P(ABC)=0.08-0.03=0.05,$$
$$P(\overline{A}BC)=P(BC)-P(ABC)=0.05-0.03=0.02,$$

故所求概率为

$$\begin{aligned}P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)&=P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)\\&=0.07+0.05+0.02=0.14.\end{aligned}$$

(6) $$\begin{aligned}P(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C)&=1-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})-P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)\\&\quad-P(ABC)\\&=1-0.10-0.14-0.03=0.73.\end{aligned}$$

(7) 由(4)与(6)，得

$$P(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}\overline{B}\overline{C})=0.73+0.10=0.83.$$

1.2.4 古典概型

定义 1.4 设随机试验 E 满足下列条件：

1° 试验的样本空间只有有限个样本点，即 $\Omega=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$；

2° 每个样本点的发生是等可能的，即

$$P(w_1)=P(w_2)=\cdots=P(w_n),$$

则称此试验为**古典概型**,也称为**等可能概型**.

由于每个样本点所表示的基本事件是互不相容的,因此有

$$\begin{aligned}1=P(\Omega)&=P\{(w_1)\cup(w_2)\cup\cdots\cup(w_n)\}\\&=P(w_1)+P(w_2)+\cdots+P(w_n),\end{aligned}$$

再由 2°,即得

$$P(w_i)=\frac{1}{n},\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

设事件 A 包含了 k 个基本事件 $w_{i_1},w_{i_2},\cdots,w_{i_k}$,即

$$A=(w_{i_1})\cup(w_{i_2})\cup\cdots\cup(w_{i_k})\qquad(1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n),$$

则有

$$\begin{aligned}P(A)&=P\{(w_{i_1})\cup(w_{i_2})\cup\cdots\cup(w_{i_k})\}\\&=P(w_{i_1})+P(w_{i_2})+\cdots+P(w_{i_k})\\&=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 所包含的基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件总数}}.\end{aligned}$$

古典概型中事件的概率称为**古典概率**,即如上述的 $P(A)$.古典概率的计算关键在于计算基本事件总数和所求事件包含的基本事件数.由于样本空间的设计可有各种不同的方法,因此古典概率的计算就变得五花八门、纷繁多样了.

一般地,当基本事件总数相当大的时候,可利用排列、组合及乘法原理、加法原理的知识计算基本事件数,进而求得相应的概率.

例 3　一只口袋中装有 5 只乒乓球,其中 3 只是白色的,2 只是黄色的.现从袋中取球两次,每次 1 只,取出后不再放回.试求:

(1) 两只球都是白色的概率;

(2) 两只球颜色不同的概率;

(3) 至少有一只白球的概率.

解　设 A 表示“两只球都是白色”的事件,B 表示“两只球颜色不同”的事件,C 表示“至少有一只白球”的事件,则由

基本事件总数　$n=\mathrm{P}_5^2=5\times4=20$;

A 所包含的基本事件数　$k_A=\mathrm{P}_3^2=3\times2=6$;

B 所包含的基本事件数　$k_B=\mathrm{P}_3^1\mathrm{P}_2^1+\mathrm{P}_2^1\mathrm{P}_3^1=3\times2+2\times3=12$;

C 所包含的基本事件数　$k_C=\mathrm{P}_3^1\mathrm{P}_2^1+\mathrm{P}_2^1\mathrm{P}_3^1+\mathrm{P}_3^2=12+6=18$,

得

(1) $P(A)=\dfrac{k_A}{n}=\dfrac{3}{10}$.

(2) $P(B)=\frac{k_B}{n}=\frac{3}{5}$.

(3) $P(C)=\frac{k_C}{n}=\frac{9}{10}$.

在(3)中,若利用 $P(\overline{C})$来求 $P(C)$则更为简单.因为 $\overline{C}$ 是表示两只球均为黄色的事件,所以

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{\mathrm{P}_2^2}{20}=1-\frac{2}{20}=\frac{9}{10}.$$

本例也可另外设计样本空间.若对于取出的两只球不考虑其先后次序,则有

$$n=\mathrm{C}_5^2=\frac{5\times 4}{2\,!}=10,\quad k_A=\mathrm{C}_3^2=3,$$

$$k_B=\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_2^1=6,\quad k_{\overline{C}}=\mathrm{C}_2^2=1.$$

于是

$$P(A)=\frac{k_A}{n}=\frac{3}{10},\quad P(B)=\frac{k_B}{n}=\frac{3}{5},$$

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}.$$

应特别注意的是,为了便于问题的解决,样本空间可以作不同的设计,但必须满足等可能性的要求.本例若视白球间是无区别的,黄球间也是无区别的话,则得

$$\Omega=\{(白,白),(白,黄),(黄,白),(黄,黄)\},$$

在这个样本空间中,基本事件的发生不是等可能的,因此不能用古典概率的方法来计算事件的概率.

例 4　袋中有 a 只白球、b 只红球,依次将球一只只摸出,取出后不放回.求第 k 次摸出白球的概率($1\leqslant k\leqslant a+b$).

解　本题可用选排列的方法求解.设想球是编号的,一只只摸取直至第 k 次取球为止,则基本事件总数就是从 $a+b$ 个编号的球中选出 k 个球进行排列的个数,即 $n=\mathrm{P}_{a+b}^k$.

设 A 为第 k 次摸出白球的事件,则 A 的发生相当于从 a 只白球中选出一只放在第 k 个位置上,从 $a+b-1$ 只球中任选 $k-1$ 只球放在前面 $k-1$ 个位置上,于是由乘法原理,可得

$$k_A=\mathrm{P}_a^1\mathrm{P}_{a+b-1}^{k-1},$$

从而

$$P(A)=\frac{\mathrm{P}_a^1\mathrm{P}_{a+b-1}^{k-1}}{\mathrm{P}_{a+b}^k}=\frac{a(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-k+1)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-k+1)}$$

$$=\frac{a}{a+b}.$$

本题也可用全排列的方法求解.设每次试验为将摸出的 $a+b$ 只编号的球依次排列在 $a+b$ 个位置上,则有

$$n=(a+b)!,\qquad k_A=(a+b-1)!a,$$

于是

$$P(A)=\frac{(a+b-1)!a}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

本题还可用组合的方法求解.设基本事件是从 $a+b$ 个排列好的编号球中选出 k 个球的事件,则样本空间所含的基本事件总数

$$n=\mathrm{C}_{a+b}^{k}\cdot k!,$$

事件 A 所含的基本事件数

$$k_A=\mathrm{C}_a^1\mathrm{C}_{a+b-1}^{k-1}\cdot(k-1)!,$$

于是

$$P(A)=\frac{a}{a+b}.$$

本题不用排列组合的方法也可求解.设球编号,前 a 个球为白球,后 b 个球为红球,则样本空间为第 k 次摸出球的全部可能的结果,$\Omega=\{w_1,w_2,\cdots,w_{a+b}\}$,其中 w_i 表示第 k 次摸出第 i 号球($i=1,2,\cdots,a+b$),而事件

$$A=\{w_1,w_2,\cdots,w_a\}.$$

因为每个球被摸到的可能性相同,都可能在第 k 次被摸到,所以

$$P(A)=\frac{a}{a+b}.$$

本题的各种解法均抓住了所求事件的本质特点,而把与之无关的因素都加以排除.

本题是求第 k 次摸到白球的概率,然而结果却与 k 无关,即与摸球的次序无关,摸到白球的概率总是$\dfrac{a}{a+b}$.这一结果表明,在进行与此类似的抽签活动时,中签的概率与抽签的先后次序无关,机会是均等的.

若将本题改为放回抽样,即每次取出一球记录下颜色后,再将其放回袋中.如此接连摸取,求第 k 次摸出白球的概率.

设抽取 k 只球的结果为一基本事件,则基本事件总数为$(a+b)^k$,第 k 次摸出白球的事件 A 所包含的基本事件数为$(a+b)^{k-1}a$,于是

$$P(A)=\frac{(a+b)^{k-1}a}{(a+b)^k}=\frac{a}{a+b}.$$

例 5　某批产品有 a 件正品,b 件次品.从中用放回和不放回两种抽样方式抽取 n 件产品,问其中恰有 $k(k\leqslant n)$件次品的概率是多少?

解　(1) 放回抽样.

从 $a+b$ 件产品中有放回地抽取 n 件产品，所有可能的取法有 $(a+b)^n$ 种．取出的 n 件产品中有 k 件次品，它们可以出现在不同的位置，所有可能的取法有 C_n^k 种．对于取定的一种位置，由于取正品有 a 种可能，取次品有 b 种可能，即有 $a^{n-k}b^k$ 种可能，于是取出的 n 件产品中恰有 k 件次品的可能取法共有 $C_n^k a^{n-k}b^k$ 种，故所求概率为

$$P_1=\frac{C_n^k a^{n-k}b^k}{(a+b)^n}=C_n^k\left(\frac{a}{a+b}\right)^{n-k}\left(\frac{b}{a+b}\right)^k.$$

(2) 不放回抽样．

从 $a+b$ 件产品中抽取 n 件(不计次序)的所有可能的取法有 C_{a+b}^n 种．在 a 件正品中取 $n-k$ 件的所有可能的取法有 C_a^{n-k} 种，在 b 件次品中取 k 件的所有可能的取法有 C_b^k 种，于是取出的 n 件产品中恰有 k 件次品的所有可能的取法有 $C_a^{n-k}C_b^k$ 种．故所求概率为

$$P_2=\frac{C_a^{n-k}C_b^k}{C_{a+b}^n}.$$

这个公式称为**超几何分布**的概率公式．

例 6　设有 n 个颜色互不相同的球，每个球都以概率 $\frac{1}{N}$ 落在 $N(n\leqslant N)$ 个盒子中的每一个盒子里，且每个盒子能容纳的球数是没有限制的．试求下列事件的概率：

$A=\{$某指定的一个盒子中没有球$\}$，

$B=\{$某指定的 n 个盒子中各有一个球$\}$，

$C=\{$恰有 n 个盒子中各有一个球$\}$，

$D=\{$某指定的一个盒子中恰有 m 个球$\}(m\leqslant n)$．

解　因为每个球落在 N 个盒子中的可能均有 N 种，所以基本事件总数相当于从 N 个元素中选取 n 个的重复排列数，即为 N^n．事件 A、B、C、D 所包含的基本事件数分别为

$$k_A=(N-1)^n,\ k_B=n!,\qquad k_C=C_N^n\cdot n!,$$
$$k_D=C_n^m\cdot(N-1)^{n-m},$$

于是

$$P(A)=\frac{(N-1)^n}{N^n}=\left(1-\frac{1}{N}\right)^n,\qquad P(B)=\frac{n!}{N^n},$$

$$P(C)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n},\qquad P(D)=\frac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}.$$

上述问题称为球在盒中的分布问题．有好些实际问题可以归结为球在盒中的分布问题，但必须分清问题中的“球”与“盒”，不可弄错．

例如，有 $n(n\leqslant 365)$ 个人，设每人的生日在一年 365 天中任一天的可能性是相等的．试求下列事件的概率：

$A=\{n$ 个人的生日均不相同$\}$，　　$B=\{$至少有两人生日相同$\}$.

在上述问题中可视人为“球”，365 天为 365 只“盒子”，归结为球在盒中的分布问题．得

$$P(A)=\frac{\mathrm{P}_{365}^{n}}{(365)^{n}},\qquad P(B)=1-P(A)=1-\frac{\mathrm{P}_{365}^{n}}{(365)^{n}}.$$

当 $n=64$ 时，$P(B)\approx 0.997$，“至少有两人生日相同”的事件的概率非常接近于 1，几乎是一个必然事件了．

例 7　已知 100 个产品中有 6 个次品，从中任取 3 个，求次品不超过 2 个的概率．

解　设 A 为“次品不超过 2 个”的事件．

方法一　设 A_0,A_1,A_2 分别表示任取的 3 个产品中恰有 0 个，1 个，2 个次品的事件，则显然 A_0,A_1,A_2 两两互不相容，且

$$A=A_0\cup A_1\cup A_2.$$

因为样本点总数为 100 个产品中任选 3 个的组合数，即 $n=\mathrm{C}_{100}^{3}$．事件 A_0 所含样本点数 $k_0=\mathrm{C}_{94}^{3}$，事件 A_1 所含样本点数 $k_1=\mathrm{C}_{6}^{1}\mathrm{C}_{94}^{2}$，事件 A_2 所含样本点数 $k_2=\mathrm{C}_{6}^{2}\mathrm{C}_{94}^{1}$，于是由

$$P(A_0)=\frac{\mathrm{C}_{94}^{3}}{\mathrm{C}_{100}^{3}},\quad P(A_1)=\frac{\mathrm{C}_{6}^{1}\mathrm{C}_{94}^{2}}{\mathrm{C}_{100}^{3}},\quad P(A_2)=\frac{\mathrm{C}_{6}^{2}\mathrm{C}_{94}^{1}}{\mathrm{C}_{100}^{3}},$$

得

$$P(A)=P(A_0)+P(A_1)+P(A_2)=0.999876.$$

方法二　设 A_3 为“任取的 3 个产品全是次品”的事件，则事件 A_3 所含样本点数 $k_3=\mathrm{C}_{6}^{3}$，即

$$P(A_3)=\frac{\mathrm{C}_{6}^{3}}{\mathrm{C}_{100}^{3}}.$$

注意到 A_3 是 A 的对立事件，故

$$P(A)=1-P(A_3)=1-\frac{\mathrm{C}_{6}^{3}}{\mathrm{C}_{100}^{3}}=0.999876.$$

例 8　从 1～2000 中任意取一整数，求取到的整数能被 6 或 8 整除的概率．

解　设 A 为“取到的整数能被 6 整除”的事件，B 为“取到的整数能被 8 整除”的事件，则由

$$333<\frac{2000}{6}<334,\quad \frac{2000}{8}=250,$$

得

$$k_A=333,\quad k_B=250.$$

由

$$83<\frac{2000}{24}<84,$$

得“同时能被 6 和 8 整除”的数 $k_{AB}=83$,基本事件总数 $n=2000$,于是所求的概率为

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=\frac{333}{2000}+\frac{250}{2000}-\frac{83}{2000}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

例 9　从 n 双不同的鞋子中任取 $2k(2k<n)$只,求没有成双的鞋子的概率.

解　样本空间含 C_{2n}^{2k}个基本事件.设 A 为“没有成双的鞋子”的事件,则实现这一事件可从 n 双鞋子中任取 $2k$ 双,共有 C_n^{2k} 种取法,再从每一双取出的鞋子中,任取其中一只,有 C_2^1 种取法,于是 A 共含 $C_n^{2k}(C_2^1)^{2k}$个基本事件,从而

$$P(A)=\frac{C_n^{2k}\cdot(C_2^1)^{2k}}{C_{2n}^{2k}}=\frac{C_n^{2k}\cdot 2^{2k}}{C_{2n}^{2k}}.$$

例 10　将 12 名工人随机地平均分配到三个班组中去,其中有 3 名熟练工.试问:

(1) 每一班组各分配到一名熟练工的概率是多少?

(2) 3 名熟练工分配在同一班组的概率是多少?

解　12 名工人平均分配到三个班组中去的可能的分法总数,即基本事件总数为

$$C_{12}^4C_8^4C_4^4=\frac{12!}{4!4!4!}.$$

(1) 每一班组各分配到一名熟练工的分法有 $3!$ 种.对于这样的每一种分法,其余 9 名工人平均分配到三个班组的分法共有 $\frac{9!}{3!3!3!}$种,于是,每一班组各分配到一名熟练工的分法共有$\frac{3!9!}{3!3!3!}$种,从而所求概率

$$P_1=\frac{3!9!}{3!3!3!}\Big/\frac{12!}{4!4!4!}=\frac{16}{55}\approx 0.2909.$$

(2) 将 3 名熟练工分配在同一班组的分法有 3 种,对于这样的每一种分法,其余 9 名工人的分法总数为

$$C_9^1C_8^4C_4^4=\frac{9!}{1!4!4!},$$

于是 3 名熟练工分配在同一班组的分法共有 $\frac{3\cdot 9!}{1!4!4!}$种,从而所求概率

$$P_2 = \frac{3 \cdot 9\,!}{1\,!4\,!4\,!} \bigg/ \frac{12\,!}{4\,!4\,!4\,!} = \frac{3}{55} \approx 0.0545.$$

1.2.5　几何概率

定义 1.5　设样本空间是一个有限区域 Ω.若样本点落在 Ω 内的任何区域 G 中的事件 A 的概率与区域 G 的测度(或长度、或面积、或体积等)成正比,则区域 Ω 内任意一点落在区域 G 内的概率为区域 G 的测度与区域 Ω 的测度的比值,即

$$P(A) = \frac{G\text{ 的测度}}{\Omega\text{ 的测度}}.$$

这一类概率通常称为**几何概率**.

因为几何概率的定义及计算与几何图形的测度密切相关,所以,我们所考虑的事件应是某种可定义测度的集合,且这类集合的并、交也是事件.

常见的几何概率有以下三种情况.

(1) 设线段 l 是线段 L 的一部分,向线段 L 上任投一点.若落在线段 l 上的点数与线段 l 的长度成正比,而与线段 l 在线段 L 上的相对位置无关,则点落在线段 l 上的概率

$$P = \frac{l\text{ 的长度}}{L\text{ 的长度}}.$$

(2) 设平面区域 g 是平面区域 G 的一部分,向区域 G 上任投一点.若落在区域 g 上的点数与区域 g 的面积成正比,而与区域 g 在区域 G 上的相对位置无关,则点落在区域 g 上的概率

$$P = \frac{g\text{ 的面积}}{G\text{ 的面积}}.$$

(3) 设空间区域 v 是空间区域 V 的一部分,向区域 V 上任投一点.若落在区域 v 上的点数与区域 v 的体积成正比,而与区域 v 在区域 V 上的相对位置无关,则点落在区域 v 上的概率

$$P = \frac{v\text{ 的体积}}{V\text{ 的体积}}.$$

下面,我们以平面区域为例,介绍几何概率的计算方法.

例 11　在间隔时间 T 内的任何瞬间,两个信号等可能地进入收音机.若这两个信号的间隔时间小于 2(单位:秒),则收音机将受到干扰,试求收音机受到干扰的概率.

解　设两个信号进入收音机的瞬间分别为 x 与 y,x 与 y 的变化范围为

$$0 \leqslant x \leqslant T, \quad 0 \leqslant y \leqslant T,$$

则样本空间 Ω 是边长为 T 的正方形,且当 $|x-y| \leqslant 2$ 时收音机受到干扰,即当样本点(x,y)落在两条直线

$$y = x + 2, \quad y = x - 2$$

之间,且在正方形 Ω之内的区域 A 中时,收音机才受到干扰(图 1-7),于是所求概率

$$P = \frac{A\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}} = \frac{T^2 - (T-2)^2}{T^2} = 1 - \left(1 - \frac{2}{T}\right)^2 .$$

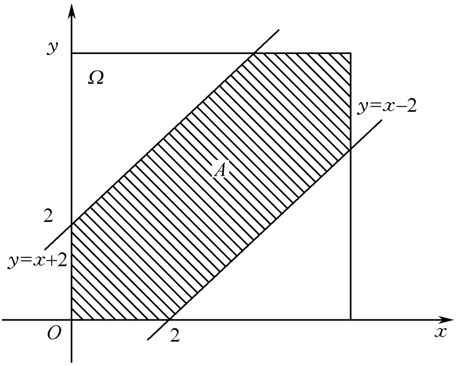

图 1-7

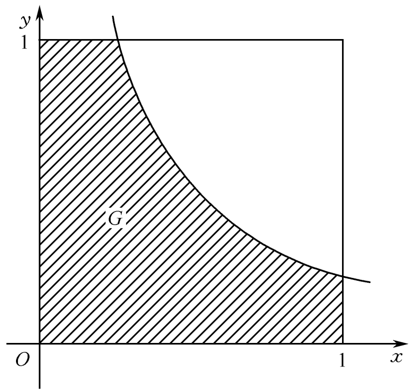

图 1-8

例 12　从区间(0,1)内任取两个数,求这两个数的积小于$\frac{1}{4}$的概率.

解　设从区间(0,1)内任取两个数为 x 与 y,则 x 与 y 的变化范围为

$$0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$

样本空间 Ω是边长为 1 的正方形,两个数的积小于$\frac{1}{4}$的充要条件为

$$xy < \frac{1}{4}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

即当样本点(x,y)落在由双曲线 $xy=\frac{1}{4}$及四条直线

$$x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1$$

所围成的区域 G(图 1-8)内时,两个数的积小于$\frac{1}{4}$,于是所求的概率

$$P = \frac{G\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}} = \frac{\frac{1}{4}\cdot 1 + \int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{4x}\mathrm{d}x}{1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 .$$

1.3　条件概率

1.3.1　条件概率

在实际问题中，常常需要计算在某个事件 B 已经发生的条件下，另一个事件 A 发生的概率.在概率论中，称此概率为事件 B 已发生的条件下事件 A 发生的**条件概率**，简称为 A 对 B 的**条件概率**，记为 $P(A|B)$.一般地，因为增加了“事件 B 已经发生”的条件，所以 $P(A|B) \neq P(A)$.

下面举例引出条件概率的定义.

例 1　某工厂有职工 500 人，男女各占一半，男女职工中技术优秀的分别为 40 人与 10 人.现从中任选一名职工，试问：

(1) 该职工为技术优秀的概率是多少？

(2) 已知选出的是女职工，她为技术优秀的概率是多少？

解　设 A 表示选出的职工为技术优秀的事件，B 表示选出的是女职工的事件.

(1) $P(A)=\dfrac{40+10}{500}=\dfrac{1}{10}$.

(2) $P(A|B)=\dfrac{10}{250}=\dfrac{1}{25}$.

显然，$P(A) \neq P(A|B)$.这是因为限制在 B 已发生的条件下求 A 的概率的缘故.

另外，可由

$$P(A|B)=\frac{10}{250}=\frac{10/500}{250/500}=\frac{P(AB)}{P(B)},$$

推得一般情况下条件概率的定义.

设试验的基本事件总数为 n，事件 B 所包含的基本事件数为 m_B，事件 AB 所包含的基本事件数为 m_{AB}，则有

$$P(A|B)=\frac{m_{AB}}{m_B}=\frac{m_{AB}/n}{m_B/n}=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

由此可得条件概率的定义.

定义 1.6　设 A、B 为两个事件，且 $P(B)>0$，则称 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的**条件概率**，记为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

根据条件概率定义，不难验证它符合概率定义中的三个条件，即

1°　$P(A|B)\geqslant 0$；

2°　$P(\Omega|B)=1$；

3°　若事件 $A_1,A_2,\cdots$是两两互不相容的，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \,\middle|\, B\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B).$$

条件概率 $P(A|B)$既然是一个概率，也就满足概率的一般性质．条件概率是概率论中一个很重要、很基本的概念，必须很好地理解和掌握它．

条件概率也可利用“缩减样本空间”的方法来计算．如求 $P(A|B)$，可把事件 B 所包含的基本事件作为样本空间 Ω_B，在这个“小”的样本空间中求事件 A 发生的概率．

例 2　甲、乙两车间各生产 50 件产品，其中分别含有次品 3 件与 5 件．现从这 100 件产品中任取 1 件，在已知取到甲车间产品的条件下，求取得次品的概率．

解　设 A 为取得次品的事件，B 为取得甲车间产品的事件，则由 B 已发生即已知抽得甲车间产品，可得缩减的样本空间 Ω_B 中有 50 件产品（100 件产品去掉乙车间的产品之后的产品数），于是用“缩减样本空间”的方法，得

$$P(A|B)=\frac{3}{50}=0.06.$$

若用条件概率定义计算，则为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{3/100}{50/100}=\frac{3}{50}=0.06.$$

例 3　从含有 5 台次品的 100 台电脑中任取 2 台，发现其中 1 台是正品，求取到的 2 台都是正品的概率．

解　设 A 为“取到的 2 台中至少有 1 台是正品”的事件，B 为“取到的 2 台都是正品”的事件，则

$$B\subset A,\quad AB=B.$$

$$n=C_{100}^2,\quad k_A=C_{95}^1C_5^1+C_{95}^2,\quad k_{AB}=k_B=C_{95}^2,$$

故所求概率

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{k_B}{k_A}\approx 0.9038.$$

1.3.2　乘法公式

设有事件 A 和 B．若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则由条件概率定义，得

$$P(AB)=P(A)P(B|A),$$

或

$$P(AB)=P(B)P(A|B).$$

一般地，设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有