

现代物理基础丛书 3

数学物理方程及其近似方法

程建春 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书系统论述了数学物理方程及其近似方法,主要包括:数学物理方程的基本问题、本征值问题和分离变数法的基本原理、Green 函数方法、变分近似方法、积分方程基本理论、微扰理论、数学物理方程的逆问题 and 非线性数学物理方程。

本书是为理工科高年级本科生和研究生编写的,也可作为本科生数学物理方程课程的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程及其近似方法/程建春编著.—北京:科学出版社,2004
(现代物理基础丛书;3)

ISBN 7-03-013292-0

I. 数… II. 程… III. 数学物理方程 IV. 0411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 035271 号

责任编辑:胡 凯 贾瑞娜 / 责任校对:张 琪

责任印制:安春生 / 封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 8 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2006 年 12 月第三次印刷 印张:29 3/4

印数:5 001—6 500 字数:583 000

定价:58.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

《现代物理基础丛书》编委会

主 编 杨国桢

副主编 阎守胜 聂玉昕

编 委 (按姓氏笔画排序)

王 牧 王鼎盛 朱邦芬 刘寄星

邹振隆 宋菲君 张元仲 张守著

张海澜 张焕乔 张维岩 侯建国

侯晓远 夏建白 黄 涛 解思深

前 言

本书是为研究生学习数学物理方程而编写的. 研究生在本科阶段已学过这方面的课程, 为了避免重复并且达到提高的目的, 本书选择内容较深, 讲述方法立足点较高. 特别是引进了若干泛函方面的理论(例如, 第二章中 Hilbert 空间概念), 并且尽可能给出严格的数学证明(例如, 第四章详细证明了本征函数系完备性定理). 当然, 直观的物理描述方法还是占主导地位.

本书共分八章, 各章的内容大致如下: 第一章讲述数学物理方程的基本问题, 介绍几个典型定解问题的求解方法, 重点讨论定解问题的适定性(主要是惟一性和稳定性). 第二章讲述分离变数法基本原理. 首先引进 Hilbert 空间概念(特别是平方可积函数空间 $L^2[a, b]$). 因为正交函数展开是分离变数法的关键, 故第二章对一定函数类按完备的正交归一系展开问题进行了详细的讨论. 本章讨论的另一个十分重要的问题是本征值问题, 特别是 Sturm-Liouville 型本征值问题. 第三章介绍求解定解问题的一个重要方法, 即 Green 函数理论. 本章特别强调的一个问题是如何利用 Green 函数把微分方程化成积分方程. 第四章介绍一种十分有用的近似方法, 即变分近似方法, 它在工程或物理问题中应用广泛. 第五章是关于积分方程的基本理论, 因微分方程可通过 Green 函数转化成积分方程, 而对积分方程的讨论往往比较简单(例如讨论解的存在性). 此外, 积分方程在实际问题中也经常出现. 第六章讨论微扰理论, 主要介绍正则微扰(参数变形法和多尺度展开)、奇异微扰及边界层理论方面的基本概念. 实际问题能严格求解的很少, 因此微扰理论具有实用意义. 这方面的理论相当丰富, 本章仅仅介绍一些基本思想. 第七章介绍目前科学与工程热点课题, 即数学物理方程的逆问题, 介绍逆问题的基本概念和主要方法. 最后, 第八章介绍若干典型的非线性数学物理方程, 特别是这些非线性方程存在的“孤立波”解.

整个课程大致需要 120 学时左右, 总的来说, 量比较大. 但因研究生自学能力强, 本书的数学推导详细, 适合于自学. 选择适当的章节, 在 80 学时(或 60 学时)内完成教与学的任务是不成问题的.

本书的出版得到国家杰出青年科学基金和南京大学“985”工程的资助.

目 录

第一章 数学物理方程的基本问题	(1)
1.1 数学物理方程的分类及一般性问题	(1)
1.1.1 基本概念: 古典解和广义解	(1)
1.1.2 两个自变量二阶线性方程的分类和化简	(4)
1.1.3 多个自变量线性方程的分类和标准型	(9)
1.1.4 数学物理方程的一般性问题	(10)
1.2 波动方程与 Cauchy 问题的适定性	(12)
1.2.1 波动方程的 Cauchy 问题	(12)
1.2.2 非齐次波动方程和推迟势	(17)
1.2.3 能量不等式和 Cauchy 问题的适定性	(18)
1.2.4 混合问题解的惟一性和稳定性	(21)
1.3 Laplace 方程与 Helmholtz 方程	(24)
1.3.1 二个自变量的 Laplace 方程	(24)
1.3.2 调和函数的基本性质	(26)
1.3.3 边值问题的适定性	(29)
1.3.4 Helmholtz 方程与辐射问题	(30)
1.4 热传导方程与定解问题的适定性	(32)
1.4.1 热传导方程的 Cauchy 问题	(32)
1.4.2 一维热传导方程的混合问题	(35)
1.4.3 混合问题的适定性	(37)
1.4.4 三类典型方程定解问题提法比较	(40)
习题一	(43)
第二章 本征值问题和分离变数法	(46)
2.1 Hilbert 空间及完备的正交函数集	(46)
2.1.1 Hilbert 空间和函数空间 $L^2[a, b]$	(46)
2.1.2 完备的正交归一函数集	(48)
2.1.3 有限区间上的完备系: Legendre 多项式	(53)
2.1.4 单位球面上的完备系: 球谐函数	(57)
2.2 本征值问题和 Sturm-Liouville 系统	(59)
2.2.1 Hermite 算子及本征值问题	(59)
2.2.2 Sturm-Liouville 系统	(64)

2.2.3 Sturm-Liouville 多项式系统	(70)
2.2.4 Hermite 多项式与 Laguerre 多项式	(72)
2.3 有界区域内定解问题的分离变数法	(75)
2.3.1 波动方程的齐次混合问题	(76)
2.3.2 热传导方程的齐次混合问题	(79)
2.3.3 椭圆方程的边值问题	(81)
2.3.4 非齐次问题的本征函数展开	(83)
2.4 正交曲线坐标系中本征值问题的分离变数	(86)
2.4.1 球坐标系中的本征方程	(86)
2.4.2 柱坐标系中的本征方程	(90)
2.4.3 椭圆-双曲柱坐标	(93)
2.4.4 柱函数: Bessel 函数的几种不同形式	(95)
2.5 无穷区域混合问题的分离变数法	(98)
2.5.1 波动方程的 Cauchy 问题	(99)
2.5.2 Laplace 方程的边值问题	(102)
2.5.3 二维轴对称波动方程	(106)
2.5.4 应用于平板的光热激发	(108)
习题二	(109)
第三章 Green 函数方法	(112)
3.1 广义函数及 δ 函数	(112)
3.1.1 广义函数概念和运算法则	(112)
3.1.2 广义函数的导数	(116)
3.1.3 广义函数的 Fourier 变换	(119)
3.1.4 弱收敛和广义解	(121)
3.2 二阶常微分方程的 Green 函数	(124)
3.2.1 Cauchy 问题的 Green 函数	(124)
3.2.2 边值问题的 Green 函数	(127)
3.2.3 非齐次 Sturm-Liouville 边值问题	(132)
3.2.4 广义 Green 函数	(133)
3.3 高维边值问题的 Green 函数	(138)
3.3.1 非齐次问题的积分公式	(138)
3.3.2 Helmholtz 方程的 Green 函数	(141)
3.3.3 无界空间的 Green 函数和基本解	(144)
3.3.4 镜像法求边值问题的 Green 函数	(151)
3.4 混合问题的含时 Green 函数	(155)
3.4.1 热导方程的 Green 函数	(155)
3.4.2 波动方程的 Green 函数	(160)

3.4.3	Cauchy 问题的基本解	(163)
3.4.4	混合问题 Green 函数的镜像法	(168)
3.5	广义 Green 公式及非齐次问题的积分解	(169)
3.5.1	共轭算子及广义 Green 公式	(169)
3.5.2	椭圆型方程的 Green 函数	(171)
3.5.3	抛物型方程的 Green 函数	(174)
3.5.4	双曲型方程的 Green 函数	(178)
	习题三	(181)
第四章	变分近似方法	(185)
4.1	变分法的基本问题	(185)
4.1.1	泛函和泛函极值的基本概念	(185)
4.1.2	多个变量的变分问题	(189)
4.1.3	变端点问题和自然边界条件	(192)
4.1.4	泛函的条件极值问题	(193)
4.1.5	Hamilton 原理与最小位能原理	(198)
4.2	变分法在本征值问题中的应用	(201)
4.2.1	Hermite 算子本征值问题与泛函极值问题的等价	(201)
4.2.2	完备性定理的证明	(205)
4.2.3	极值定理	(206)
4.2.4	Ritz 和 Galerkin 法解本征值问题	(210)
4.3	变分法在边值问题中的应用	(213)
4.3.1	边值问题与泛函极值问题的等价	(213)
4.3.2	变分解的存在性与广义解	(216)
4.3.3	Ritz 法解边值问题	(220)
4.3.4	Galerkin 法及非齐次边值问题	(222)
4.4	变分的其他近似方法	(226)
4.4.1	Kantorovich 法	(226)
4.4.2	最速下降法与有界正定算子	(229)
4.4.3	最小平方法及 Courant 法	(232)
4.4.4	共轭梯度法	(233)
	习题四	(236)
第五章	积分方程基本理论	(238)
5.1	积分方程的形成及分类	(238)
5.1.1	Volterra 积分方程的形成	(238)
5.1.2	Fredholm 积分方程的形成	(241)
5.1.3	Abel 方程及第一类积分方程的适定性	(243)
5.1.4	非线性积分方程的形成	(245)

5.2	积分方程的迭代法和有限秩近似	(247)
5.2.1	第二类 Fredholm 方程的迭代法	(247)
5.2.2	Banach 空间第二类 Fredholm 方程的迭代技术	(250)
5.2.3	可分核方程和有限秩核近似	(255)
5.2.4	非线性积分方程的迭代法	(262)
5.3	$L^2[a, b]$ 空间中的积分方程	(264)
5.3.1	Hermite 对称的平方可积核	(264)
5.3.2	第二类 Fredholm 积分方程及微扰论	(269)
5.3.3	平方可积 Hermite 对称核的极值性质	(273)
5.3.4	本征值问题的有限秩近似	(275)
5.3.5	一般平方可积核	(277)
5.4	积分变换及应用解积分方程	(280)
5.4.1	Fourier 变换及逆变换	(280)
5.4.2	Laplace 变换及逆变换	(283)
5.4.3	Hankel 变换及逆变换	(285)
5.4.4	Hilbert 变换及逆变换	(287)
	习题五	(289)
第六章	微扰理论	(292)
6.1	本征值问题的微扰	(292)
6.1.1	算子本身的微扰	(292)
6.1.2	简并态的微扰	(294)
6.1.3	边界条件的微扰	(297)
6.1.4	区域微扰	(299)
6.2	正则微扰	(302)
6.2.1	一致有效展开	(303)
6.2.2	非一致有效展开和参数变形法	(306)
6.2.3	参数变形法应用于非线性振动和波动	(309)
6.2.4	多尺度展开法	(312)
6.3	奇异微扰及边界层理论	(317)
6.3.1	边界层理论的基本思想	(317)
6.3.2	二阶线性方程的边值问题	(321)
6.3.3	非线性微扰引起的边界层	(326)
6.3.4	高维边值问题的边界层	(329)
6.4	WKB 近似和应用	(334)
6.4.1	WKB 近似	(334)
6.4.2	Liouville-Green 变换	(337)
6.4.3	具有转折点的本征值问题	(339)

6.4.4 WKB 近似的应用	(343)
习题六	(347)
第七章 数学物理方程的逆问题	(351)
7.1 逆问题基本概念和分类	(351)
7.1.1 逆问题基本概念	(351)
7.1.2 方程逆问题分类	(354)
7.1.3 不适定问题的正则化方法	(360)
7.1.4 第一类 Fredholm 积分方程的正则化方法	(363)
7.2 脉冲谱技术(PST)	(365)
7.2.1 PST 的基本原理	(365)
7.2.2 光热测量中热导系数的反演	(367)
7.2.3 应用于二维波动方程的逆问题	(371)
7.2.4 应用于环境污染控制的逆源问题	(373)
7.3 本征值逆问题	(375)
7.3.1 本征值的渐近特征	(375)
7.3.2 本征值逆问题的惟一性	(379)
7.3.3 热导方程系数逆问题的惟一性	(383)
7.3.4 数值方法	(386)
7.4 波动方程的逆散射	(389)
7.4.1 波的散射和远场特性	(389)
7.4.2 边界反演的 Kirchhoff 近似	(393)
7.4.3 非均匀介质反演的 Born 和 Rytov 近似	(395)
7.4.4 二维近场逆散射成像理论	(398)
习题七	(404)
第八章 非线性数学物理方程	(406)
8.1 典型非线性方程及其行波解	(406)
8.1.1 Burgers 方程及冲击波	(406)
8.1.2 KdV 方程及孤立波	(408)
8.1.3 非线性 Klein-Gordon 方程	(411)
8.1.4 非线性 Schrödinger 方程	(417)
8.2 Hopf-Cole 变换和 Hirota 方法	(419)
8.2.1 Burgers 方程的 Hopf-Cole 变换	(420)
8.2.2 KdV 方程的广义 Hopf-Cole 变换	(422)
8.2.3 KdV-Burgers 方程的广义 Hopf-Cole 变换	(425)
8.2.4 Hirota 方法	(426)
8.3 逆散射方法	(430)
8.3.1 一维 Schrödinger 方程的逆散射问题	(430)

8.3.2 解 KdV 方程初值问题的基本思想	(437)
8.3.3 KdV 方程初值问题的孤立子解	(440)
8.3.4 Lax 理论	(445)
8.4 Bäcklund 变换	(447)
8.4.1 Bäcklund 变换的基本思想	(448)
8.4.2 Sine-Gordon 方程的自 Bäcklund 变换	(449)
8.4.3 KdV 方程的自 Bäcklund 变换	(452)
8.4.4 非线性叠加公式	(455)
习题八	(458)
人名英汉对照表	(460)
参考书目	(465)

第一章 数学物理方程的基本问题

数学物理方程是源于物理及工程问题的微分方程(常微分方程和偏微分方程). 典型的数学物理方程包括波动方程、输运方程及位势方程(Laplace 方程). 它们分别描述三类不同的物理现象: 波动(声波和电磁波)、输运过程(热传导和扩散)和状态平衡(静电场分布、平衡温度场分布和速度势等). 从方程本身来看, 它们又是三类方程, 即双典型、抛物型和椭圆型方程的最简单例子.

除偏微分方程外, 另一类十分重要的数学物理方程为积分方程, 即方程中含有未知函数 $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 积分的方程. 典型的积分方程有第一、第二类 Fredholm 和 Volterra 方程, 我们将在第五章专门讨论.

本章讨论三类典型数学物理方程的若干基本问题, 主要内容有: 1.1 节讨论数学物理方程的分类并引出定解问题及定解问题适定性的概念, 以后各节分别讨论波动方程、Laplace 方程以及热传导方程的各种定解问题, 重点是解的惟一性和稳定性.

1.1 数学物理方程的分类及一般性问题

本节首先简单介绍有关偏微分方程及其解的若干基本概念, 然后讨论二阶线性偏微分方程的分类以及标准形式, 最后在 1.1.4 小节中讨论数学物理方程的一般性问题, 即定解问题以及定解问题适定性概念.

1.1.1 基本概念: 古典解和广义解

含有未知函数 $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 及偏导数的方程称为偏微分方程, 如果方程中出现的偏导数最高阶为 m 则称方程为 m 阶偏微分方程. 进一步, 如果方程关于 u 及 u 的各阶偏导数都是线性的, 则称方程为 m 阶线性偏微分方程.

二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$\mathbf{L}u = f \quad (1.1.1)$$

其中算子 $\mathbf{L}$ 定义为

$$\mathbf{L} \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c \quad (1.1.2)$$

其中 a_{ij} 、 b_i 、 c 和 f 都是变量 $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的函数. 显然, 可以写出无数偏微分方程, 但并不是每个方程都有它的实际应用. 因此我们主要讨论物理和工程中

出现的方程, 这样的方程称为**数学物理方程**. 典型的数学物理偏微分方程有三类: 波动方程、输运方程以及位势方程, 它们分别具有以下形式

(1) 波动方程

$$u_{tt} - a^2 \Delta^2 u = f(\mathbf{r}, t) \quad (1.1.3)$$

(2) 输运方程

$$u_t - a^2 \Delta^2 u = g(\mathbf{r}, t) \quad (1.1.4)$$

(3) 位势方程

$$\Delta^2 u = h(\mathbf{r}) \quad (1.1.5)$$

其中 $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示空间变量, t 表示时间变量, Δ^2 为 Laplace 算子

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (1.1.6)$$

显然, 以上三个方程是二阶线性偏微分方程(1.1.1)的特例.

以二阶线性偏微分方程(1.1.1)为例, 我们来说明方程解的概念. 式(1.1.1)的解是指函数 $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 具有方程出现的各阶连续偏导数, 使方程的左边恒等于右边, 这样的解称为式(1.1.1)的**古典解**. 考虑二个自变量 (x, t) 的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.1.7)$$

作变换

$$\zeta = \frac{x+t}{2}; \quad \eta = \frac{x-t}{2} \quad (1.1.8)$$

则式(1.1.7)变成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} = 0 \quad (1.1.9)$$

上式的解可积分两次得到, 具有一般形式

$$u(\zeta, \eta) = F(\zeta) + G(\eta) \quad (1.1.10)$$

显然上式是式(1.1.9)解的基本条件是, $F(\zeta)$ 和 $G(\eta)$ 必须具有连续的一阶偏导数. 回到原来的变数, 可得式(1.1.7)的通解为

$$u(x, t) = F(x+t) + G(x-t) \quad (1.1.11)$$

把上式代入式(1.1.7), 显然要求 $F(x+t)$ 和 $G(x-t)$ 关于 (x, t) 具有连续的一阶和二阶偏导数. 由此可见, 尽管式(1.1.7)与(1.1.9)可通过变换式(1.1.8)等价起来, 但二者的古典解对函数 F 和 G 有不同的光滑性要求. 式(1.1.11)中任意函数 F 和 G 由其他附加条件决定. 如果我们要求 $u(x, t)$ 满足初始条件

$$u|_{t=0} = f(x); \quad u_t|_{t=0} = g(x) \quad (1.1.12)$$

则 F 和 G 应满足

$$\begin{aligned} f(x) &= F(x) + G(x) \\ g(x) &= F'(x) - G'(x) \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

不难求得

$$2F(x) = f(x) + \int_c^x g(s)ds; \quad 2G(x) = f(x) - \int_c^x g(s)ds$$

其中 c 为任意实数. 于是满足初始条件式(1.1.12)的式(1.1.7)的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x-t) + f(x+t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s)ds \quad (1.1.14)$$

上式称为 d'Alembert 公式. 显然, 上式满足式(1.1.7)的条件是 $f(x)$ 具有连续的一阶和二阶导数, 而 $g(x)$ 具有连续的一阶导数, 即要求 $f \in C^2$, $g \in C^1$, 否则式(1.1.7)和(1.1.12)不存在古典解. 但是, 实际物理问题往往不能给出具有如此光滑性的函数 f 和 g , 而这样的问题却有实际意义. 例如考虑 f 和 g 具有形式

$$f(x) = \begin{cases} 2(x^2 - 1)^2, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}; \quad g(x) = 0 \quad (1.1.15)$$

显然, $f(x)$ 在 $x = \pm 1$ 处一阶导数连续, 但二阶导数间断. 因此, 严格地讲式(1.1.7)和(1.1.15)不存在古典解. 但如果把式(1.1.15)代入式(1.1.14)有

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) \quad (1.1.16)$$

其中

$$u_1(x, t) = \begin{cases} [(x-t)^2 - 1]^2, & |x-t| \leq 1 \\ 0, & |x-t| > 1 \end{cases} \quad (1.1.17)$$

$$u_2(x, t) = \begin{cases} [(x+t)^2 - 1]^2, & |x+t| \leq 1 \\ 0, & |x+t| > 1 \end{cases} \quad (1.1.18)$$

显然, 在 $x-t$ 平面上除四条直线 $|x \pm t| = 1$ 外, 式(1.1.16)满足波动方程(1.1.7). 因此, 可把式(1.1.16)看作式(1.1.7)的一种**广义解**. 由于在 $|x \pm t| = 1$ 上 $u(x, t)$ 的二阶导数间断, 但一阶导数连续, 故这种广义解也称为**弱间断解**.

因此, 有必要推广方程解的含义, 引进广义解的概念. 广义解有多种定义, 本节介绍基于函数序列收敛概念定义的广义解, 在以后的讨论中, 我们将根据具体情况, 给出广义解的具体定义. 仍然以式(1.1.12)为例, 存在古典解的条件 $f \in C^2$ 和 $g \in C^1$ 不成立, 但可设想用下述方法来解决这一问题. 我们选取函数序列 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$, 并且序列的每个元素满足 $f_n \in C^2$ 和 $g_n \in C^1$, 于是对每一对 f_n 和 g_n 可以建立一系列初值问题

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = 0 \quad (1.1.19)$$

$$u_n|_{t=0} = f_n(x); \quad \frac{\partial u_n}{\partial t}|_{t=0} = g_n(x) \quad (1.1.20)$$

显然, 这些初值问题的古典解存在且为

$$u_n(x, t) = \frac{1}{2} [f_n(x-t) + f_n(x+t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g_n(s) ds \quad (1.1.21)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 如果序列 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 在“某种意义下”收敛到 $f(x)$ 和 $g(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f(x); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g(x) \quad (1.1.22)$$

并且 $\{u_n\}$ 也在“某种意义下”收敛到某个函数 $u(x, t)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = u(x, t) \quad (1.1.23)$$

则把 $u(x, t)$ 称为“某种意义下”的广义解. 所谓“某种意义下”, 可以是严格的一致收敛, 也可以是“平均收敛”(见第二章)或“弱收敛”(见第三章), 只要我们对“某种意义下”的选择恰当, 那么所得的广义解也有意义.

对一般的方程(1.1.1), 设函数序列 $\{u_n\}$ 满足可微条件($\mathbf{L}$ 中出现的各阶导数)且在“某种恰当意义下”收敛到 u

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \quad (1.1.24)$$

如果 $\mathbf{L}u_n$ 也在“某种恰当意义下”收敛到 f

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{L}u_n = f \quad (1.1.25)$$

则我们称 u 为式(1.1.1)的广义解.

1.1.2 两个自变量二阶线性方程的分类和化简

考虑二个自变量 (x, y) 的二阶线性偏微分方程

$$\mathbf{L}u \equiv a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + gu = f \quad (1.1.26)$$

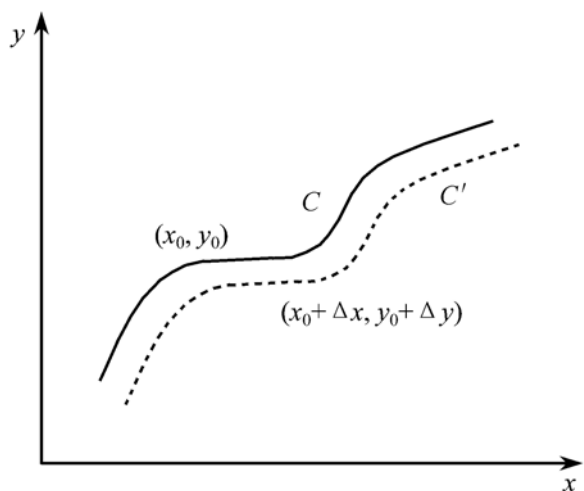


图 1.1.1 曲线 C 及邻域 C'

其中 a, b, c, d, e, f 和 g 都是 x 和 y 的已知函数. 我们从下列问题引出上式的特征方程, 然后根据特征方程来对方程进行分类和化简. 设在 x - y 平面上给定曲线 C , 如图 1.1.1, C 的参数方程为

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

在 C 上给定 $u = u(x, y) = u[\varphi(t), \psi(t)]$, $p \equiv u_x[\varphi(t), \psi(t)]$ 以及 $q \equiv u_y[\varphi(t), \psi(t)]$, 且满足相容性条件

$$\frac{du}{dt} = p \frac{dx}{dt} + q \frac{dy}{dt}$$

曲线 C 上的 u, p 和 q 称为 **Cauchy 数据**. 问题是, 由 C 上给定的 Cauchy 数据, 如何求 C 的邻域 C' 上 $u(x, y)$ 的值? 利用 Taylor 展开

$$u(x', y') \approx u(x_0, y_0) + p\Delta x + q\Delta y + \frac{1}{2}u_{xx}(x_0, y_0)(\Delta x)^2 \\ + \frac{1}{2}u_{yy}(x_0, y_0)(\Delta y)^2 + \frac{1}{2}u_{xy}(x_0, y_0)\Delta x\Delta y + \dots$$

其中 (x_0, y_0) 在 C 上, $(x', y') = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 在 C' 上. 为此, 至少必须知道 C 上 $u(x, y)$ 的二阶偏导数 u_{xx} 、 u_{xy} 和 u_{yy} . 在 C 上有

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{dt} = u_{xx} \frac{dx}{dt} + u_{xy} \frac{dy}{dt} \quad (1.1.28)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial q}{\partial y} \frac{dy}{dt} = u_{xy} \frac{dx}{dt} + u_{yy} \frac{dy}{dt} \quad (1.1.29)$$

因为 $u(x, y)$ 是式(1.1.26)的解, 故从式(1.1.26)~(1.1.29)可得决定 u_{xx} 、 u_{xy} 和 u_{yy} 的线性方程组

$$\frac{dx}{dt}u_{xx} + \frac{dy}{dt}u_{xy} + 0 \cdot u_{yy} = \frac{dp}{dt} \quad (1.1.30)$$

$$0 \cdot u_{xx} + \frac{dx}{dt}u_{xy} + \frac{dy}{dt}u_{yy} = \frac{dq}{dt} \quad (1.1.31)$$

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = f - (dp + eq + gu) \quad (1.1.32)$$

上述方程的解是否存在, 依赖于系数行列式的性质

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ x' & y' & 0 \\ 0 & x' & y' \end{vmatrix} = a \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - 2b \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + c \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

如果曲线 C 满足 $\Delta \neq 0$, 则解存在且惟一. 反之, 如果 $\Delta = 0$, 则 Cauchy 数据 p 、 q 和 u 不能任意给定, 否则方程组无解. 满足 $\Delta = 0$, 即满足方程

$$a \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - 2b \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + c \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 0 \quad (1.1.33)$$

的曲线 C 对式(1.1.26)有重要意义, 称之为**特征曲线**. 相应地, 式(1.1.33)称为**特征方程**. 因此在特征曲线上, Cauchy 数据 p 、 q 和 u 不能任意给定. 式(1.1.33)可改写成形式

$$a \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2b \frac{dy}{dx} + c = 0 \quad (1.1.34)$$

于是可解出

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} \left[b \pm \sqrt{b^2 - ac} \right] \quad (1.1.35)$$

因此, 特征曲线是否存在依赖于 $(b^2 - ac)$:

- (1) 当 $b^2 - ac > 0$, 存在两根实的特征曲线;
- (2) 当 $b^2 - ac = 0$, 两根实的特征曲线退化为一根;
- (3) 当 $b^2 - ac < 0$, 不存在实的特征曲线.

据此可把式(1.1.26)作下列分类, 称式(1.1.26)是:

双曲型的: 如果 $b^2 - ac > 0$; **抛物型的:** 如果 $b^2 - ac = 0$; **椭圆型的:** 如果 $b^2 - ac < 0$.

由于 a, b 和 c 是 (x, y) 的函数, 故上述分类只在某一区域才成立. 当方程在不同的区域具有不同的类型时, 称之为**混合型的**. 当 a, b 和 c 为常数时, 方程在整个 (x, y) 平面内类型不变.

例 1.1.1 一维波动方程(1.1.7)是双曲型的, 可求得二簇实的特征曲线 $x \pm t = \text{常数}$, 它们是 $x-t$ 平面上的直线簇; 一维热导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

是抛物型的, 只有一簇实特征曲线 $t = \text{常数}$, 是 $x-t$ 平面上平行于 x 轴的直线; 二维 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

是椭圆型的, 不存在实的特征曲线.

例 1.1.2 混合型方程最曲型的例子是 Tricomi 方程

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.1.36)$$

上半平面 $y > 0$, 方程是椭圆型的; 下半平面 $y < 0$, 方程是双曲型的, 这时具有二簇实特征曲线

$$x \pm \frac{2}{3} \sqrt{(-y)^3} = \text{常数} \quad (1.1.37)$$

而在 x 轴上 $y = 0$, 方程是抛物型的.

利用特征曲线, 可对式(1.1.26)进行化简, 从而求出其标准形式. 分三种情况讨论:

(1) 方程(1.1.26)是双曲型的, 这时可从式(1.1.34)求得两根实特征曲线

$$\varphi_1(x, y) = \text{常数}; \quad \varphi_2(x, y) = \text{常数} \quad (1.1.38)$$

利用隐函数微分关系

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right]^{-1}, \quad (i = 1, 2)$$

可得 φ_i 满足的方程为

$$a \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right]^2 + 2b \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + c \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right]^2 = 0 \quad (1.1.39)$$

由于式(1.1.38)是式(1.1.34)的两个独立解, 故 Jacobi 行列式不等于零

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

因此可取变换

$$\xi = \varphi_1(x, y); \quad \eta = \varphi_2(x, y) \quad (1.1.40)$$

代入式(1.1.26)并利用式(1.1.39)可得方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + D \frac{\partial u}{\partial \xi} + E \frac{\partial u}{\partial \eta} + Fu = G \quad (1.1.41)$$

其中 D, E, F 和 G 是重新定义的已知函数(为了方便,下面经常使用这四个字母,并不意味它们在每个方程中都一样),上式称为 Laplace 双曲方程,其特征曲线是

$$\xi = \text{常数}; \quad \eta = \text{常数}$$

为 ξ - η 平面上平行于坐标轴的直线簇. 进一步作变换

$$\xi = \frac{s+t}{2}; \quad \eta = \frac{s-t}{2} \quad (1.1.42)$$

式(1.1.41)可化成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial u}{\partial s} + E \frac{\partial u}{\partial t} + Fu = G \quad (1.1.43)$$

式(1.1.41)或(1.1.43)为双曲型方程的标准形式. 显然一维波动方程(1.1.7)或(1.1.9)是其最简单的形式.

(2) 方程(1.1.26)是抛物型的,这时只存在一根实特征曲线

$$\varphi(x, y) = \text{常数} \quad (1.1.44)$$

φ 同样满足式(1.1.39), 进一步利用 $b^2 - ac = 0$ 可化成

$$\left[\sqrt{a} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sqrt{c} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]^2 = 0 \quad (1.1.45)$$

取 $\xi = \varphi(x, y)$ 以及任意函数 $\eta = \eta(x, y)$, 只要两者函数独立(Jacobi 行列式不等于零), 代入式(1.1.26)有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D \frac{\partial u}{\partial \xi} + E \frac{\partial u}{\partial \eta} + Fu = G \quad (1.1.46)$$

进一步作函数变换

$$v = u \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\eta} E(\xi, \tau) d\tau \right] \quad (1.1.47)$$

式(1.1.46)又可写成

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - D \frac{\partial v}{\partial \xi} = Fv + G \quad (1.1.48)$$

上式或式(1.1.46)为抛物型方程的标准形式. 显然一维热导方程是其最简单的

形式.

(3) 方程(1.1.26)是椭圆型的, 因无实的特征曲线存在, 式(1.1.34)的解只能是复函数, 故设

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y) = \text{常数} \quad (1.1.49)$$

是式(1.1.34)的一个解, 则可取变换

$$\xi = \operatorname{Re}[\varphi] = \varphi_1(x, y); \quad \eta = \operatorname{Im}[\varphi] = \varphi_2(x, y) \quad (1.1.50)$$

由于 $\varphi(x, y)$ 满足

$$a\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0 \quad (1.1.51)$$

把式(1.1.49)或(1.1.50)代入上式, 实部和虚部分开可得

$$\begin{aligned} a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 &= a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \\ a\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + b\left[\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x}\right] + c\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

利用上二式和式(1.1.50)、式(1.1.26)可化成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D\frac{\partial u}{\partial \xi} + E\frac{\partial u}{\partial \eta} + Fu = G \quad (1.1.52)$$

上式为椭圆型方程的标准形式. 显然二维 Laplace 方程是其最简单的形式.

例 1.1.3 把 Tricomi 方程化成标准形式. Tricomi 方程的特征方程为

$$y\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 + 1 = 0 \quad (1.1.53)$$

在椭圆型区域 $y > 0$, 上式化成 $dx \pm i\sqrt{y}dy = 0$, 故

$$x \pm i\frac{2}{3}\sqrt{y^3} = \text{常数} \quad (1.1.54)$$

取变换

$$\xi = x; \quad \eta = \frac{2}{3}\sqrt{y^3} \quad (1.1.55)$$

式(1.1.36)变成标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad (1.1.56)$$

在双曲型区 $y < 0$, 式(1.1.53)化为 $dx \pm \sqrt{-y}dy = 0$, 故

$$x \pm \frac{2}{3}\sqrt{(-y)^3} = \text{常数} \quad (1.1.57)$$

取变换

$$\xi = x - \frac{2}{3}\sqrt{(-y)^3}; \quad \eta = x + \frac{2}{3}\sqrt{(-y)^3} \quad (1.1.58)$$

式(1.1.36)化为标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)} \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] = 0 \quad (1.1.59)$$

1.1.3 多个自变量线性方程的分类和标准型

由 1.1.2 小节的讨论知, 方程的类型取决于式(1.1.26)左边包含二阶偏导数的项, 这些项称为方程的主部. 因此, 对 n 个自变量的二阶方程(1.1.1), 只要考虑式(1.1.2)的主部 $\mathbf{L}_0$ 即可

$$\mathbf{L}_0 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1.1.60)$$

在 n 维空间中一点 $\mathbf{r}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ 的邻域内考虑二次式

$$A(\lambda) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0 \lambda_i \lambda_j \quad (1.1.61)$$

其中 $a_{ij}^0 = a_{ij}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, 我们总可取 $a_{ij} = a_{ji}$, 并设它们都是实数, 这样以 a_{ij}^0 为元素的矩阵是实对称矩阵, 存在实线性变换

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^n c_{ik}^0 \eta_k \quad (1.1.62)$$

可化二次式(1.1.61)为标准型

$$\begin{aligned} A(\eta) &= \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij}^0 c_{ik}^0 c_{jl}^0 \eta_k \eta_l = \sum_{k,l=1}^n \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0 c_{ik}^0 c_{jl}^0 \right] \eta_k \eta_l \\ &= \sum_{k,l=1}^n \alpha_{kl}^0 \eta_k \eta_l \equiv \sum_{k=1}^n \epsilon_k \eta_k^2 \end{aligned} \quad (1.1.63)$$

其中 $\alpha_{kl}^0 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0 c_{ik}^0 c_{jl}^0$, 而 ϵ_k 只取 1, -1 或者 0.

另一方面, 在 $\mathbf{r}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ 邻域内, 利用式(1.1.62)的系数方阵 $c = [c_{ik}^0]$ 的转置方阵 $c^T = [c_{ki}^0]$ 作变换

$$y_i = \sum_{k=1}^n c_{ki}^0 x_k, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.1.64)$$

代入式(1.1.1)和(1.1.2), 其主部的变换为

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \sum_{k,l=1}^n \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0 c_{ik}^0 c_{jl}^0 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l} \\ &= \sum_{k,l=1}^n a_{kl}^0 \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l} = \sum_{k=1}^n \epsilon_k \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}. \end{aligned} \quad (1.1.65)$$

根据上式作下列分类:

(1) 如果所有的 $\epsilon_k = 1$ 或者 -1 , 即二次式(1.1.61)是正定的(或负定的), 则称式(1.1.1)在点 $\mathbf{r}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ 的邻域为椭圆型的, 这时式(1.1.1)可化成

标准形式

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + cu = f \quad (1.1.66)$$

同样为了方便, 字母 b_i 、 c 和 f 在下面多次使用, 但并不意味它们相同.

(2) 若在 $\mathbf{r}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ 点有 $(n-1)$ 个 $\epsilon_k = 1$ (或 -1), 而另一个为 -1 (或 $+1$) 则称式(1.1.1)在点 $\mathbf{r}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ 的邻域为**双曲型**的, 有标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \sum_{i=2}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + cu = f. \quad (1.1.67)$$

(3) 若在点 $\mathbf{r}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ 有 $(n-l)$ 个 $\epsilon_k = 1$ (或 -1) 而 l 个 $\epsilon_k = -1$ (或 $+1$), 且 l 及 $n-l > 1$, 则称式(1.1.1)在点 $\mathbf{r}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ 的邻域为**超双曲型**的

$$\sum_{i=1}^l \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} - \sum_{j=l+1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + cu = f. \quad (1.1.68)$$

(4) 最后, 如果恰有一个 $\epsilon_k = 0$, 同时所有其他的 $\epsilon_k = 1$ (或 -1), 则称式(1.1.1)在点 $\mathbf{r}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ 的邻域为**抛物型**的, 有标准形式

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} - \sum_{i=2}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + cu = f. \quad (1.1.69)$$

如果 a_{ij} 为常数, 则方程的类型在全空间内不变. 显然在全空间内, 波动方程(1.1.3)是双曲型的, 输运方程(1.1.4)是抛物型的, 而位势方程(1.1.5)是椭圆型. 由此可见, 波动方程、输运方程和位势方程确实是三类典型方程.

例 1.1.4 考虑 $\mathbf{L} = -\Delta \cdot [p(\mathbf{r})\Delta] + q(\mathbf{r})$. 如果在区域 G 内 $p(\mathbf{r}) > 0$, 则 $\mathbf{L}$ 在 G 内是椭圆型的, 于是方程

$$\rho(\mathbf{r}) u_{tt} + \mathbf{L}u = f(\mathbf{r}, t) \quad (1.1.70)$$

$$\rho(\mathbf{r}) u_t + \mathbf{L}u = f(\mathbf{r}, t) \quad (1.1.71)$$

$$\mathbf{L}u = f(\mathbf{r}) \quad (1.1.72)$$

其中 $\rho(\mathbf{r}) > 0$, 分别在 G 内属双曲型、抛物型和椭圆型方程. 以上三个方程分别是比式(1.1.3)~式(1.1.5)更为一般的波动方程、输运方程和位势方程, 它们分别描写非均匀介质中的波动、输运和热平衡.

1.1.4 数学物理方程的一般性问题

我们知道 n 阶常微分方程的通解依赖于 n 个任意常数, 这些常数由初始条件或边界条件决定. 对偏微分方程, 问题要复杂得多, 通解一般依赖于任意函数. 例如一维波动方程(1.1.7)的通解式(1.1.11)依赖于二个任意函数 F 和 G , 为了决定这些任意函数, 必须附加其他条件, 这些条件由具体的物理问题给出. 我们主

要讨论下列三类条件:

(1) 初始条件: 例如对波动方程(1.1.70)和热导方程(1.1.71), 变量 t 具有时间意义. 一般给定 $t=0$ 时 $u(\mathbf{r}, t)$ 的值

$$u|_{t=0} = \varphi(\mathbf{r}) \quad (1.1.73)$$

对波动方程, 由于出现对 t 的二阶偏导数, 故还必须还有

$$u_t|_{t=0} = \psi(\mathbf{r}) \quad (1.1.74)$$

这样的问题称为 **Cauchy 问题** 或 **初值问题**.

(2) 边界条件: 对椭圆型方程(1.1.72), 一般给定区域 G 的边界 ∂G 上 $u(\mathbf{r})$ 及 $u(\mathbf{r})$ 的法向导数之间的线性关系

$$\left[\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right] \Big|_{\partial G} = b(\mathbf{r}) \quad (1.1.75)$$

当 $\alpha=1, \beta=0$ 时, 称为**第一类边界条件**; 当 $\alpha=0, \beta=1$ 时, 称为**第二类边界条件**; 当 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ 时, 称为**第三类边界条件**. 这样的问题称为**边值问题**.

(3) 混合条件: 当考虑有限区域 G 内的波动或输运问题时, 必须同时给定初始条件以及边界条件, 这样的问题称为**混合问题**.

上述初始条件或边界条件统称为**定解条件**, 求偏微分方程满足定解条件的解的问题称为**定解问题**. 注意, 边界条件式(1.1.75)是线性的, 如果边界条件非线性, 即使方程是线性的, 整个定解问题也是非线性的. 一个典型例子是重力作用下水面波问题, 方程为 Laplace 方程, 但水表面的边界条件是非线性的.

从物理上看, 定解问题的意义也很明显, 因为方程本身描述物理系统的一般性规律, 一个具体的物理系统必须与外界有相互作用, 这样的相互作用就反映在边界条件上. 此外, 一个系统随时间的变化还与它的“历史”有关, 初始条件即反映了这点.

由以上讨论可知, 对位势方程, 我们一般讨论边值问题, 即定解条件为给定边界上的数值与法向导数的关系(1.1.75), 而对波动方程和输运方程则可提混合问题或初值问题. 这不是偶然的, 它涉及定解问题的适定性, 其含义是: 如果定解问题同时满足下列三个条件:

(1) **存在性**: 即定解问题存在古典解;

(2) **惟一性**: 如果解存在, 是否惟一?

(3) **稳定性**: 例如初始条件式(1.1.73)或(1.1.74)中 $\varphi(\mathbf{r})$ 或 $\psi(\mathbf{r})$ 有微小变化, 解的变化情况如何?

那么称定解问题在古典意义下是适定的, 否则, 称定解问题在古典意义下不适定. 由实际物理问题导出的定解问题, 其解一般存在且惟一, 而稳定性具有十分重要的意义. 因为无论是初始条件中的数据, 还是边界条件中的数据, 甚至方程中的非齐次项, 都是由实验测得, 必定存在误差, 如果它们的微小误差带来解的很大变化, 则在古典意义下这个问题已没有多大实际意义. 此外, 解的存在性

涉及所给定解条件的相容性, 如果给出矛盾的定解条件, 解显然是不存在的, 而惟一性问题则涉及所给定解条件的完备性问题.

随着近代科学技术的发展, 出现了许多不适定问题, 这些不适定问题具有明显的物理意义. 一个典型例子是重力探矿中导出的 Laplace 方程的 Cauchy 问题, 在古典意义下, 这个问题是不适的 (见 1.4 节和 5.1 节的讨论). 为此发展了许多求解不适定问题的方法, 我们将在第七章作简单介绍.

1.2 波动方程与 Cauchy 问题的适定性

本节讨论最简单的双曲型方程, 即波动方程的若干重要性质. 主要有: 波动方程的 Cauchy 问题、混合问题和齐次化原理, 以及能量不等式和适定性问题. 尽管讨论以波动方程为主, 但许多定性的结果对一般的双曲型方程成立.

1.2.1 波动方程的 Cauchy 问题

考虑波动方程的 Cauchy 问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad (n \leq 3)$$

$$u(\mathbf{r}, t)|_{t=0} = \varphi(\mathbf{r}); \quad u_t(\mathbf{r}, t)|_{t=0} = \psi(\mathbf{r}) \quad (1.2.1)$$

其中 $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. 我们用球面平均法求 $n=3$ 时式 (1.2.1) 的解, 基本思想是: 代替直接求 $u(\mathbf{r}, t)$, 先计算 t 时刻以 $\mathbf{r}$ 为中心, 半径为 ξ 的球面 S_ξ 上 u 的平均值, 如图 1.2.1. 设球面 S_ξ 上流动坐标为 $\mathbf{r}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$, 则

$$\xi = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2}$$

而 $u(\mathbf{r}, t)$ 的平均值 $\bar{u}(\xi, t)$ 为

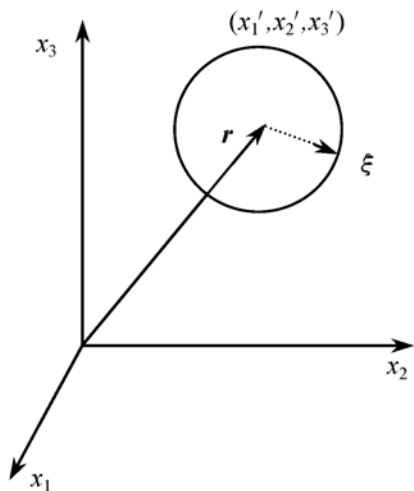


图 1.2.1 球面平均

$$\bar{u}(\xi, t) = \frac{1}{4\pi\xi^2} \iint_{S_\xi} u(\mathbf{r}', t) dS' \quad (1.2.2)$$

其中 dS' 是 S_ξ 上的面元. 如果求得 $\bar{u}(\xi, t)$, 只要令 $\xi \rightarrow 0$, 于是应该有

$$u(\mathbf{r}, t) = \lim_{\xi \rightarrow 0} [\bar{u}(\xi, t)] \quad (1.2.3)$$

设球面 S_ξ 包围的体积为 V_ξ , 对 (1.2.1) 第一式两边在 S_ξ 内作体积分

$$\int_{V_\xi} u_{tt} d\tau_\xi = \int_{V_\xi} \Delta^2 u d\tau_\xi \quad (1.2.4)$$

其中 $d\tau_\xi$ 是 V_ξ 中的体元. 利用 Gauss 公式, 式(1.2.4)右边

$$\begin{aligned}\int_{V_\xi} \Delta^2 u d\tau_\xi &= \iint_{S_\xi} \frac{\partial u}{\partial n'} dS' = \iint_{S_\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} \xi^2 d\Omega \\ &= \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \iint_{S_\xi} u d\Omega = 4\pi \xi^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\end{aligned}\quad (1.2.5)$$

得到上式, 已利用

$$\bar{u}(\xi, t) = \frac{1}{4\pi \xi^2} \iint_{S_\xi} u(\mathbf{r}', t) dS' = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_\xi} u d\Omega \quad (1.2.6)$$

其中 $d\Omega$ 为立体角元 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, 而式(1.2.4)左边

$$\int_{V_\xi} u_{tt} d\tau_\xi = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V_\xi} u r_1^2 d r_1 d\Omega = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\xi r_1^2 d r_1 \iint_{S_\xi} u d\Omega = 4\pi \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\xi r_1^2 \bar{u} d r_1$$

因此有

$$\xi^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\xi \bar{u} r_1^2 d r_1 \quad (1.2.7)$$

上式两边对 ξ 求导, 得 $\bar{u}(\xi, t)$ 满足的方程

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\xi^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \right] - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = 0$$

或者

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 (\xi \bar{u})}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2.8)$$

作变换 $v = \xi \bar{u}$, 得一维波动方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2.9)$$

由 1.1.1 小节知, $v(\xi, t)$ 可表示成

$$v(\xi, t) = f_1(t - \xi) + f_2(t + \xi) \quad (1.2.10)$$

因此, 球面平均 $\bar{u}(\xi, t)$ 为

$$\bar{u}(\xi, t) = \frac{1}{\xi} [f_1(t - \xi) + f_2(t + \xi)] \quad (1.2.11)$$

当 $\xi \rightarrow 0$ 时, $\bar{u}(\xi, t)$ 必须有限, 故要求

$$[f_1(t - \xi) + f_2(t + \xi)]|_{\xi=0} = 0 \quad (1.2.12)$$

于是有

$$f_2(t) = -f_1(t) \equiv f(t)$$

因此

$$\xi \bar{u} = f(t + \xi) - f(t - \xi) \quad (1.2.13)$$

两边对 ξ 求导

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\xi \bar{u}) = \bar{u} + \xi \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} = [f'(t - \xi) + f'(t + \xi)] \quad (1.2.14)$$

由式(1.2.3)和上式

$$u(\mathbf{r}, t) = \lim_{\xi \rightarrow 0} [\bar{u}] = 2f'(t) \quad (1.2.15)$$

为求 $f'(t)$, 必须利用式(1.2.1)中初始条件, 为此计算

$$\frac{\partial}{\partial t}(\xi \bar{u}) = [f'(t + \xi) - f'(t - \xi)] \quad (1.2.16)$$

与式(1.2.14)相加得

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\xi \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial t}(\xi \bar{u}) = 2f'(t + \xi) \quad (1.2.17)$$

令 $t=0$ 得

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(\xi \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial t}(\xi \bar{u}) \right] \Big|_{t=0} = 2f'(\xi)$$

把式(1.2.6)代入上式, 得

$$\begin{aligned} 2f'(\xi) &= \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi}{4\pi} \iint_{S_\xi} u d\Omega + \frac{\xi}{4\pi} \iint_{S_\xi} \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega \right) \right] \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \iint_{S_\xi} \varphi d\Omega \right) + \xi \iint_{S_\xi} \psi d\Omega \right] \end{aligned}$$

当 $\xi=t$ 时, 由式(1.2.15)

$$u(\mathbf{r}, t) = 2f'(\xi) \Big|_{\xi=t}$$

故最后得

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_t} t \varphi d\Omega + t \iint_{S_t} \psi d\Omega \right] \quad (1.2.18)$$

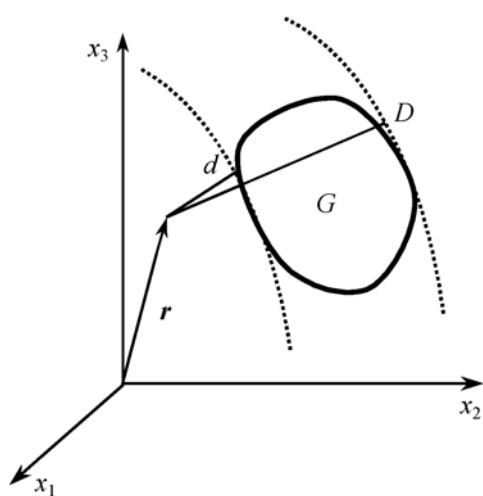


图 1.2.2 Huygens 原理

式中 S_t 是半径为 t 、圆心在 $\mathbf{r}$ 点的球面:

$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = t^2$. 用球面元表示, 上式变为

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_t} \frac{\varphi}{\xi} dS' + \iint_{S_t} \frac{\psi}{\xi} dS' \right] \quad (1.2.19)$$

其中 $\xi = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, 上式即为三维波动方程 Cauchy 问题的解, 称为 **Poisson 公式**.

当 φ 和 ψ 分别具有连续的三阶和二阶偏导数时, 即 $\varphi \in C^3, \psi \in C^2$, 不难验证式(1.2.18)或(1.2.19)确是三维波动方程 Cauchy 问题的古典解. 由式(1.2.19)可知, $\mathbf{r}$ 点处 $u(\mathbf{r}, t)$ 的值完全由球面

$$(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2 = t^2$$

上的初始分布 φ 及 ψ 值决定, 如果 φ 和 ψ 局域在某一区域 G 中, 如图 1.2.2, 当 $t < d$ 或 $t > D$ 时, r 点处 $u(r, t)$ 等于零, 其中 d 和 D 分别是 r 点到 G 的最小和最大距离. 因此波动有明显的前阵面和后阵面, 该现象称为 **Huygens 原理**.

对二维波动 $n=2$, 初值分布

$$u|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2); \quad u_t|_{t=0} = \psi(x_1, x_2)$$

可看作三维情况的特殊情况, 故式(1.2.19)仍成立. 由于初始条件与 x_3 无关, 故可积出. 把积分投影到 $x_1'-x_2'$ 平面上, 球面元与平面元之间有关系

$$dS' \cos \gamma = dx_1' dx_2'$$

其中 γ 为两个面元的法向之间的夹角

$$\cos \gamma = \sqrt{t^2 - (x_1 - x_1')^2 - (x_2 - x_2')^2} / t$$

代入式(1.2.19)可得

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, t) = & \frac{1}{2\pi} \iint_D \frac{\psi(x_1', x_2') dx_1' dx_2'}{\sqrt{t^2 - (x_1 - x_1')^2 - (x_2 - x_2')^2}} \\ & + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_D \frac{\varphi(x_1', x_2') dx_1' dx_2'}{\sqrt{t^2 - (x_1 - x_1')^2 - (x_2 - x_2')^2}} \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

其中 D 为圆域

$$(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 \leq t^2$$

对二维 Cauchy 问题, 由于积分在圆面上进行, 如图 1.2.3, 故 Huygens 原理已不再成立. 进一步对式(1.2.20)使用降维法, 可得一维波动方程 Cauchy 问题的解, 设初始条件为

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= \varphi(x_1) \\ u_t|_{t=0} &= \psi(x_1) \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

作坐标平移 $\eta_1 = x_1' - x_1$; $\eta_2 = x_2' - x_2$, 在圆域积分, 式(1.2.20)化成

$$\begin{aligned} u(x_1, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-t}^t \psi(x_1 + \eta_1) d\eta_1 \int_{-\sqrt{t^2 - \eta_1^2}}^{\sqrt{t^2 - \eta_1^2}} \frac{d\eta_2}{\sqrt{t^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}} \\ & + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-t}^t \varphi(x_1 + \eta_1) d\eta_1 \int_{-\sqrt{t^2 - \eta_1^2}}^{\sqrt{t^2 - \eta_1^2}} \frac{d\eta_2}{\sqrt{t^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}} \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

求出积分得到

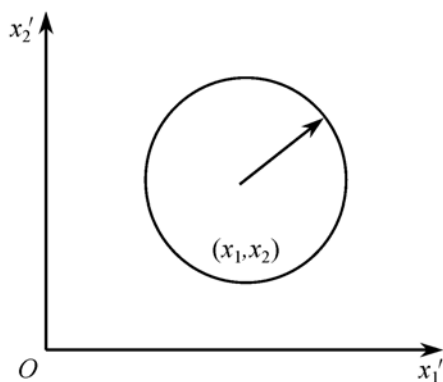


图 1.2.3 积分在圆内进行

$$u(x_1, t) = \frac{1}{2} \int_{-t}^t \psi(x_1 + \eta_1) d\eta_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-t}^t \varphi(x_1 + \eta_1) d\eta_1$$

即

$$u(x_1, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x_1 + t) + \varphi(x_1 - t)] + \frac{1}{2} \int_{x_1 - t}^{x_1 + t} \psi(\tau) d\tau \quad (1.2.23)$$

上式与式(1.1.14)一致. 当 $\varphi \in C^2$, $\psi \in C^1$ 时不难验证上式确是一维波动方程 Cauchy 问题的古典解.

进一步分析式(1.2.23)的意义, 考察局域在 $[a, b]$ 区域内的初始分布, 如图 1.2.4, 经过时间 t 后, 波动到达的范围(受初始分布影响的区域)由不等式

$$a - t \leq x_1 \leq b + t, \quad (t > 0) \quad (1.2.24)$$

限定. 而在此范围以外, 则 $u(x_1, t) = 0$. 在 $x_1 - t$ 平面上, 上式表示的区域称为区域 $[a, b]$ 的影响区域, 如图 1.2.5.

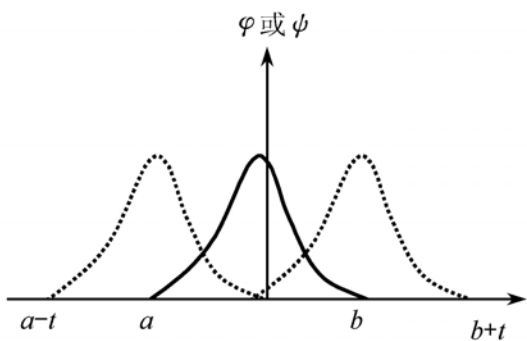


图 1.2.4 初值局域分布

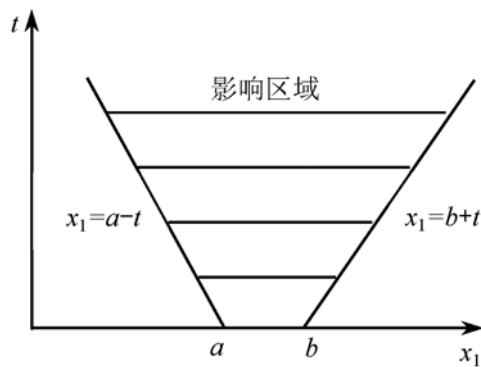


图 1.2.5 $[a, b]$ 的影响区域

由式(1.2.23)可知, u 在 (x_1, t) 点的值仅仅依赖于 x_1 轴上区间 $[x_1 - t, x_1 + t]$ 上的初始分布, 而与其他点上的初始分布无关, 因此区间 $[x_1 - t, x_1 + t]$ 称为点 (x_1, t) 的依赖区间. 作二条直线

$$x_1 = a + t; \quad x_1 = b - t \quad (1.2.25)$$

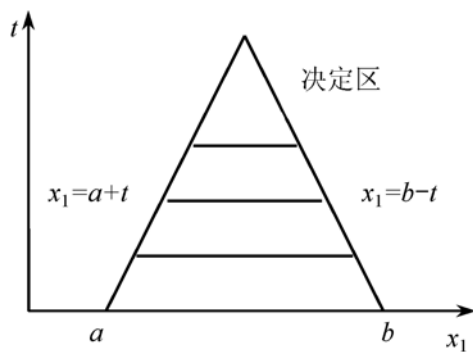


图 1.2.6 $[a, b]$ 的决定区

及 x_1 轴围成的三角形区, 如图 1.2.6, 在此区域内的任一点 (x_1, t) 的依赖区间都落在区间 $[a, b]$ 之内部. 因此, 解在此三角形区域中的值就完全由 $[a, b]$ 上的初始分布决定, 而与此区域外的初始分布无关, 这个三角区域称为 $[a, b]$ 的决定区域. 给定 $[a, b]$ 上初始分布, 就可以在其决定区域中求得 Cauchy 问题的解.

值得注意的是, 一维波动方程的特

征线($x_1 \pm t = \text{常数}$)起着十分重要的作用,这正是双曲型方程的普遍特性,即在 $x_1 - t$ 平面上,波动沿特征线传播.

1.2.2 非齐次波动方程和推迟势

考虑非齐次方程的 Cauchy 问题

$$u_{tt} + \mathbf{L}u = g(\mathbf{r}, t) \quad (1.2.26)$$

其中 $\mathbf{L} = -\Delta \cdot [p(\mathbf{r})\Delta] + q(\mathbf{r})$, 在区域 G 内 $p(\mathbf{r}) > 0$, 故上式是双曲型方程. 设初始条件与式(1.2.1)中相同. 由于式(1.2.26)是线性方程, 可令 $u = u_1 + u_2$, 其中 $u_1(\mathbf{r}, t)$ 满足齐次方程, 但初值不为零, 如式(1.2.1)中所表达, $u_2(\mathbf{r}, t)$ 满足非齐次方程, 而初值为零.

Duhamel 齐次化原理指出, 只要求得 $u_1(\mathbf{r}, t)$, 则 $u_2(\mathbf{r}, t)$ 的解可用 $u_1(\mathbf{r}, t)$ 来表示. 设齐次方程的下列 Cauchy 问题

$$\varphi_{tt} + \mathbf{L}\varphi = 0; \quad \varphi|_{t=\tau} = 0; \quad \varphi_t|_{t=\tau} = g(\mathbf{r}, \tau) \quad (1.2.27)$$

的解为 $\varphi(\mathbf{r}, t, \tau)$, 则 $u_2(\mathbf{r}, t)$ 为

$$u_2(\mathbf{r}, t) = \int_0^t \varphi(\mathbf{r}, t, \tau) d\tau \quad (1.2.28)$$

上述结论的证明是容易的, 事实上因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \varphi(\mathbf{r}, t, t) + \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\tau = \varphi(\mathbf{r}, t, \tau)|_{t=\tau} + \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\tau \\ &= \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\tau \end{aligned} \quad (1.2.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=\tau} + \int_0^t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} d\tau = g(\mathbf{r}, t) + \int_0^t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} d\tau \\ &= g(\mathbf{r}, t) - \int_0^t \mathbf{L}\varphi d\tau \\ &= g(\mathbf{r}, t) - \mathbf{L} \int_0^t \varphi d\tau = g(\mathbf{r}, t) - \mathbf{L}u_2 \end{aligned} \quad (1.2.30)$$

故

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \mathbf{L}u_2 = g(\mathbf{r}, t) \quad (1.2.31)$$

因此式(1.2.28)满足非齐次方程. 由式(1.2.29)和(1.2.30)立即看出 $u_2(\mathbf{r}, t)$ 同样满足齐次初始条件. 利用齐次化原理及 1.2.1 小节的结果, 立即可求得下列定解问题的解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = g(\mathbf{r}, t); \quad u|_{t=0} = 0; \quad u_t|_{t=0} = 0 \quad (1.2.32)$$

当 $n=3$ 时, 由式(1.2.19)得

$$\varphi(\mathbf{r}, t, \tau) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{t-\tau}} \frac{g(\mathbf{r}', \tau)}{\xi} dS' \quad (1.2.33)$$

其中 $\xi = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, 故

$$u(\mathbf{r}, t) = \int_0^t \varphi(\mathbf{r}, t, \tau) d\tau = \frac{1}{4\pi} \int_0^t \iint_{S_{t-\tau}} \frac{g(\mathbf{r}', \tau)}{\xi} dS' d\tau \quad (1.2.34)$$

作变换 $t - \tau = \tau'$ 则

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^t \iint_{S_{\tau'}} \frac{g(\mathbf{r}', t - \tau')}{\xi} dS' d\tau' \quad (1.2.35)$$

在半径为 τ' 的球面上, 面元为 $dS' = \tau'^2 d\Omega$, 于是上式变成

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^t \iint_{\Omega} \frac{g(\mathbf{r}', t - \tau')}{\xi} \tau'^2 d\tau' d\Omega \quad (1.2.36)$$

上式中积分相当于在球 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = t^2$ 中作体积分, 于是有

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \leq t} \frac{g(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (1.2.37)$$

其中 dv' 是球 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = t^2$ 中的体元. 上式 $u(\mathbf{r}, t)$ 称为推迟势.

当 $n=2$, 利用式(1.2.20)得

$$\varphi(x_1, x_2, t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \iint_D \frac{g(x_1', x_2', \tau) dx_1' dx_2'}{\sqrt{(t - \tau)^2 - (x_1 - x_1')^2 - (x_2 - x_2')^2}}$$

其中 D 为圆内: $(x - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 \leq (t - \tau)^2$. 因此, 当 $n=2$ 时, 方程(1.2.26)的解为

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \iint_D \frac{g(x_1', x_2', \tau) dx_1' dx_2' d\tau}{\sqrt{(t - \tau)^2 - (x_1 - x_1')^2 - (x_2 - x_2')^2}} \quad (1.2.38)$$

最后, 当 $n=1$ 时, 由式(1.2.23)

$$\varphi(x, t, \tau) = \frac{1}{2} \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} g(s, \tau) ds$$

于是, 方程(1.2.32)的解为

$$u(x, t) = \int_0^t \varphi(x, t, \tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} g(s, \tau) ds d\tau. \quad (1.2.39)$$

1.2.3 能量不等式和 Cauchy 问题的适定性

为了简单, 考虑一维波动方程 Cauchy 问题的适定性问题. 由上面的讨论, 当 φ 和 ψ 满足一定的可微条件时

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ u|_{t=0} &= \varphi(x) \end{aligned}$$

$$u_t|_{t=0} = \phi(x) \quad (1.2.40)$$

的古典解存在且由式(1.2.23)表示.

余下的问题是讨论式(1.2.40)解的惟一性和稳定性问题. 为此引进能量积分的概念. 考虑图 1.2.7 中 $x-t$ 平面上的三角形区, 即区间 (x_1, x_2) 的决定区, 用平行于 x 轴的直线截三角区为二部分, 交特征线于 (A, B) 二点, 线段 AB 用 L_t 表示, 显然 L_t 随 t 变化, 当 $t=0$ 时, L_0 表示三角区的底边 $x_1 x_2$. 在 L_t 上作积分

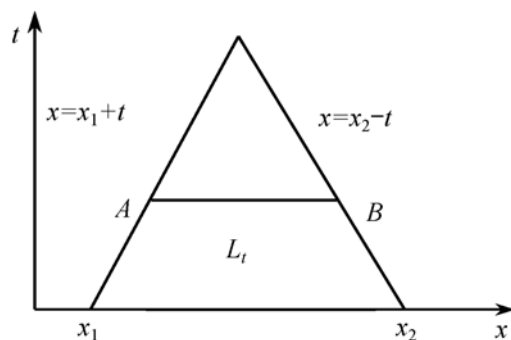


图 1.2.7 在三角区域上作能量积分

$$E(L_t) = \int_A^B \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (1.2.41)$$

$E(L_t)$ 在物理上有能量的意义, 故称为**能量积分**. 下面证明不等式

$$E(L_t) \leq E(L_0) \quad (1.2.42)$$

由于 $E(L_t) \geq 0$, 故只要证明 $E(L_t)$ 随 t 单调下降即可, 即证明

$$\frac{dE(L_t)}{dt} \leq 0 \quad (1.2.43)$$

因 (A, B) 二点坐标是 t 的函数, 故式(1.2.41)中上下限是 t 的函数, 利用变上、下限求导公式可得

$$\begin{aligned} \frac{dE(L_t)}{dt} &= 2 \int_A^B \left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right] dx \\ &\quad - [u_t^2(A) + u_x^2(A) + u_t^2(B) + u_x^2(B)] \end{aligned} \quad (1.2.44)$$

积分号内第二项分部积分有

$$\begin{aligned} \frac{dE(L_t)}{dt} &= 2 \int_A^B \frac{\partial u}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] dx + 2u_t(A)u_x(A) - 2u_t(B)u_x(B) \\ &\quad - [u_t^2(A) + u_x^2(A) + u_t^2(B) + u_x^2(B)] \end{aligned}$$

由于 u 满足波动方程(1.2.40), 故

$$\frac{dE(L_t)}{dt} = - \{ [u_t(A) - u_x(A)]^2 + [u_t(B) + u_x(B)]^2 \} \leq 0$$

因此, 式(1.2.42)得证. 利用式(1.2.42)可证明波动方程 Cauchy 问题解的惟一性: 三角形区域内的解 $u(x, t)$ 由 $[x_1, x_2]$ 上的初值分布惟一地决定, 而与此区间以外的初值无关. 设式(1.2.40)存在两个解 u_1 和 u_2 , 则 $\varphi = u_1 - u_2$ 满足

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_t|_{t=0} = 0 \quad (1.2.45)$$

由于 $t=0$ 时

$$E(L_0) = \int_A^B \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] dx = 0$$

故由式(1.2.42), 在三角形区域恒有 $E(L_t)=0$, 即 $\varphi_t = \varphi_x = 0$, 因此 $\varphi = \text{常数}$, 又 $t=0$ 时 $\varphi=0$, 故 $\varphi \equiv 0$, 于是 $u_1 = u_2$, 惟一性得证!

为了证明稳定性, 考虑积分

$$E_1(L_t) = \int_A^B u^2(x, t) dx \quad (1.2.46)$$

对 $E_1(L_t)$ 求导

$$\begin{aligned} \frac{dE_1(L_t)}{dt} &= 2 \int_A^B u \frac{\partial u}{\partial t} dx - [u^2(x_A) + u^2(x_B)] \\ &\leq 2 \int_A^B u \frac{\partial u}{\partial t} dx \leq \int_A^B u^2 dx + \int_A^B \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \\ &\leq \int_A^B u^2 dx + \int_A^B \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx \end{aligned}$$

利用能量积分式(1.2.41), 上式变成

$$\frac{dE_1(L_t)}{dt} \leq E_1(L_t) + E(L_t) \quad (1.2.47)$$

两边乘 e^{-t} 可得

$$\frac{d}{dt} [e^{-t} E_1(L_t)] \leq e^{-t} E(L_t) \quad (1.2.48)$$

故

$$E_1(L_t) \leq e^t E_1(L_0) + e^t \int_0^t e^{-\tau} E(L_\tau) d\tau \quad (1.2.49)$$

利用式(1.2.42), 上式变成

$$E_1(L_t) \leq e^t E_1(L_0) + (e^t - 1) E(L_0) \quad (1.2.50)$$

上式称为**能量不等式**, 其意义是把 t 时刻解的积分值 $E_1(L_t)$ 与初始给定的条件联系起来. 下面利用能量不等式来说明 Cauchy 问题式(1.2.40)关于初值微小变化的稳定性. 设 u_1 和 u_2 为式(1.2.40)中初值分别为 (φ_1, ψ_1) 和 (φ_2, ψ_2) 时的解, 记 $u = u_1 - u_2$ 和 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, 以及 $\psi = \psi_1 - \psi_2$, 由式(1.2.50)

$$\begin{aligned} \int_A^B |u_1 - u_2|^2 dx &\leq e^t \int_A^B |\varphi_1 - \varphi_2|^2 dx \\ &+ (e^t - 1) \int_A^B \left[|\psi_1 - \psi_2|^2 + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right|^2 \right] dx \end{aligned}$$

故当 $t \in (0, T)$ (其中 T 为任一有限正数) 时, 对任一给定的 $\epsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使

$$\int_A^B |\varphi_1 - \varphi_2|^2 dx < \eta; \quad \int_A^B |\psi_1 - \psi_2|^2 dx < \eta; \quad \int_A^B \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right|^2 dx < \eta$$