· 21 世纪大学数学精品教材 ·

“十 一 五”规 划 教 材

数学物理方程与特殊函数

方 瑛 徐忠昌 主编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

《21 世纪大学数学精品教材》为大学本科（本科 1 普通类和本科 2 一类）数学系列教材，体现了对数学精品的归纳及本套教材的精品特征，具有鲜明的特点，按照统一的指导思想组编而成.

全书共分三篇：基础篇包括偏微分方程的基础知识以及分离变量法、行波法、积分变换法、格林函数法、贝塞尔函数和勒让德多项式，各章末均配有小结、重要概念英文词汇及中英文习题；仿真篇包括数学物理方程以及特殊函数的计算机仿真求解简介；应用篇主要介绍数学物理方程在生物、医学、电子、物理等实际问题中的应用举例. 书末附有傅里叶变换简表和拉普拉斯变换简表.

本书可作为普通高等院校工科各专业数学物理课程的教材，也可供非数学专业硕士研究生选用.

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方程与特殊函数/方瑛，徐忠昌主编. —北京：科学出版社，2007
21 世纪大学数学精品教材. “十一五”规划教材
ISBN 978-7-03-019721-4

I. 数…　II. ①方…②徐…　III. ①数学物理方程－高等学校－教材②特殊函数－高等学校－教材　IV. O175.24　O174.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 129390 号

责任编辑：王雨舸／责任校对：王望容
责任印制：高　嵘／封面设计：宝　典

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2007 年 8 月第　一　版　开本：B5（720×1000）
2007 年 8 月第一次印刷　印张：14 1/4
印数：1—6 000　字数：263 000

定价：21.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

《21世纪大学数学精品教材》丛书序

《21世纪大学数学精品教材》为大学本科(本科1普通类和本科2一类)数学系列教材,体现了对数学精品教材的归纳及本套教材的精品特征.

一、组编机构

丛书设组编委员会,编委由12所高校数学院系的负责人构成(按姓氏笔画):

王公宝　方承胜　江世宏　李逢高　杨鹏飞　时　宝　何　穗　张志军

欧贵兵　罗从文　周　勇　高明成　殷志祥　黄朝炎　蔡光兴　戴明强

丛书主编:

蔡光兴　戴明强

二、编写特点

1. 适用性

教材的适用性是教材的生命力所在,每本教材的篇幅结合绝大部分高等院校数学院系对课程学时数的要求.部分教材配有教学光盘,便于教学.

2. 先进性

把握教改、课改动态和学科发展前沿,反映学科、课程的先进理念、知识和方法.

3. 创新性

市场需求和市场变化决定教材创新需要,数学教学在知识创新、思维创新等方面负有责任,一定程度的创新使教材更具冲击力和影响力.

创新与继承相结合,是继承基础上的创新.

创新转变为参编者、授课者的思想和行为,达到文化融合.

4. 应用性

丛书的读者对象为应用型和研究应用型大学本科(本科1普通类和本科2一类)学生,应用性是数学学科和数学教学发展的新特点,或展现在教材内容结构上,或体现于某些章节,或贯穿于其中.

5. 教学实践性和系统性

教材具有可操作性,教师好教,学生好学,同时保持知识完整.二者发生矛盾时,前者优先,不过分追求体系完整.

三、指导思想

《21世纪大学数学精品教材》大致可划分为两大类:基础知识类;方法与应用类.

1.基础知识类

(1) 遵循高等院校教学指导委员会关于课程的教学基本要求,知识体系相对完整,结构严谨,内容精炼,循序渐进,推理简明,通俗易懂.

(2) 融入现代数学思想(如数学建模),分别将 Mathematica、Matlab、SAS、SPS 等软件的计算方法,恰当地融入课程教学内容中,培养学生运用数学软件的能力.

(3) 强化学生的实验训练和动手能力,可将实验训练作为模块,列入附录,供教学选用或学生自学自练,使用者取舍也方便.

(4) 教材章后均列出重要概念的英文词汇,布置若干道英文习题,要求学生用英文求解,以适应教育面向世界的需要,也为双语教学打下基础.

(5) 为使学生巩固知识和提高应用能力,章末列出习题,形式多样.书后配测试题,书末提供解题思路或参考答案.

2.方法与应用类

(1) 融入现代数学思想和方法(如数学建模思想),体现现代数学创新思维,着力培养学生运用现代数学工具(软件)的能力,使教材真正成为基于现代数学软件的、将数学软件融合到教材与教学内容的现代精品教材.

(2) 加强教学知识与内容的应用性,注重数学思想和方法的操作与应用及其实用性.通过实例、训练、实验等各种方式,提高学生对数学知识、数学方法的应用能力及解决问题的能力.

(3) 强化学生的实验训练,通过完整的程序与实例介绍,教会学生分析问题、动手编程、分析结果,提高学生的实验操作水平、实际动手能力和创新能力.

(4) 教材章后均列出重要概念的英文词汇,布置若干道英文习题,要求学生用英文求解,以适应教育面向世界的需要,也为双语教学打下基础.

(5) 为使学生巩固知识和提高应用能力,章末列出习题,形式多样.书后配测试题,书末提供解题思路或参考答案.

《21世纪大学数学精品教材》组编委员会

2006年9月

前　言

由于在自然界以及社会生产实践中，许多实际问题的数学模型往往可以表示为偏微分方程，而数学物理方程与特殊函数作为微积分、常微分方程等课程的继续，着重介绍偏微分方程的有关知识，是研究物理问题常用的数学工具，所以更是学习理论物理学和电子信息等理工科专业本科生及部分非数学专业硕士研究生必修的重要基础课程.从这个角度看，数学物理方程这门课程准确地印证了美国数学家怀特黑德(Whitehead，1861～1947)曾经说过的一段话"只有将数学应用于社会科学的研究之后，才能使得文明社会的发展成为可控制的现实".

随着社会对于复合型、应用型人才需求量的加大，高等教育改革不断深入，为了在有限的教学课时内对学生应用数学工具解决实际问题的能力进行初步的训练，使学生能学数学、用数学，我们希望有一本既符合传统理工科专业教学基本要求同时还能满足新形式下教学实际需要的教材，将数学建模的思想融入主干课程的教学，便于教学又适当高于教学，培养学生的运用能力和创新能力，这就是我们编写本书的初衷.

为了给初学者提供一个深入浅出，学以致用的入门书，全书共分为三篇，各篇章编写特色及教学使用要求如下：

基础篇：基础篇为第1章～第7章，由数学物理方程和特殊函数两部分构成，主要内容包括偏微分方程的基础知识以及分离变量法、行波法、积分变换法、格林函数法、贝塞尔函数和勒让德多项式.该篇各章编写力求内容精炼，推理简明，具有相对的独立性，便于取舍，方便教学.各章末均配有小结、重要概念英文词汇及中英文习题，有利于帮助初学者梳理数学思想的来龙去脉，展现不同方法的横向对比，总结典型题目的解题步骤以求举一反三，触类旁通.基础篇是数学物理方程课程经典的理论体系，因此也是教学的重点.

仿真篇：仿真篇为第8章和第9章，主要内容包括数学物理方程以及特殊函数的计算机仿真求解简介.该篇介绍的计算机仿真方法以 Matlab 语言为主，需要学生具备一定的相关知识，利用数学工具软件来实现对数学物理方程和特殊函数的仿真求解.仿真篇可作为选学内容，配合基础篇的知识由教师指导学生进行实验训练，也可作为具有一定基础的学生的自学内容.

应用篇：应用篇为第10章，主要内容为介绍数学物理方程在生物、医学、电子、物理等实际问题中的应用举例.该篇也可作为选学内容，在教学过程中，教师可指导学生对应基础篇和应用篇相关内容阅读参考，将现代数学思想方法与经典的理

论相结合.该篇同样也可作为学生的自学内容.

本书可作为普通高等院校工科各专业数学物理方程课程的教材,也可供非数学专业硕士研究生教学选用.

本书由方瑛、徐忠昌主编,严斌辉、王志华任副主编,参加本书编写工作人员有:湖北工业大学方瑛(第1章、第10章)、黄毅(第2章)、田德生(第3章)、耿亮(第8章)、王志华(第4章、第10章);海军工程大学熊萍(第4章)、徐忠昌(第5章、第10章)、瞿勇(第9章);空军雷达学院严斌辉(第6章、第7章).

由于编者水平所限,同时时间较为仓促,书中难免有不妥之处,恳请广大读者指正并提出宝贵建议.

编　者

2007年7月6日

目　　录

基础篇

仿真篇

应用篇

基　础　篇

第 1 章　概　　论

在自然科学或生产实践中存在着许多物理问题，为了描述并解决这些问题，往往需要根据相关的物理定律建立相应的数学模型 —— 数学物理方程，当物理过程和状态只由一个因素所决定时，其数学模型往往是常微分方程；而当物理过程是由多个因素决定时，则其数学模型往往会涉及偏微分方程.

本章将介绍偏微分方程的基本概念，导出三类典型的数学物理方程及其定解条件，并对方程的分类进行讨论.

§1.1　偏微分方程的基本概念

1.1.1　偏微分方程简介

所谓偏微分方程就是含有未知函数偏导数的等式.一般情况下，一个偏微分方程可以写成如下形式：

$$f(x, y, \cdots, u, u_x, u_y, \cdots, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, \cdots) = 0, \tag{1.1}$$

其中 u 是自变量为 $x, y, \cdots$ 的未知函数，$u_x, u_y, \cdots, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, \cdots$ 则是未知函数 u 的各阶偏导数，f 是已知函数.例如

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{（波动方程）}, \tag{1.2}$$

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad \text{（热传导方程）}, \tag{1.3}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{（拉普拉斯方程）}, \tag{1.4}$$

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{（特里特米方程）}, \tag{1.5}$$

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{（冲击波方程）}, \tag{1.6}$$

$$u_{xt} = \sin u \quad \text{（正弦戈登方程）}, \tag{1.7}$$

$$u_t + \sigma u u_x + u_{xxx} = 0 \quad \text{（KdV 方程）} \tag{1.8}$$

等都是偏微分方程，其中 a 及 σ 为常数.

偏微分方程中所含未知函数偏导数的最高阶数称为此方程的阶.如果方程(1.1)中 f 是关于 u 及 u 的各偏导数的线性函数，则称此方程为线性的，否则方程即为非线性的.例如，方程(1.2)、(1.3)、(1.4)、(1.5)均为二阶线性方程，方程(1.6)、(1.7)、(1.8)依次分别为一阶、二阶、三阶的非线性方程.

线性偏微分方程可分为常系数和变系数两大类，常系数线性偏微分方程中未知函数及其偏导数的系数均为常数，而变系数线性偏微分方程中未知函数及其偏导数的系数不完全是常数.例如，方程(1.2)、(1.3)、(1.4)是常系数的线性方程，

而方程(1.5)则是变系数的线性方程.

若在某区域内一函数及其各连续的偏导数满足某微分方程,则称此函数是该方程在这个区域内的一个解(古典解).

例 1.1 求函数 $u = u(x, y)$,使 $u_x = y$.

解 由 $u_x = y$ 两边对 x 积分,得

$$u = xy + f(y),$$

这里 f 是任意函数,$u = xy + f(y)$ 为方程的通解.

例 1.2 函数 $u = u(x, y)$,求 $u_{xy} = 2$ 的通解.

解 将方程 $u_{xy} = 2$ 对 y 积分,得

$$u_x = 2y + f(x),$$

这里 $f(x)$ 是 x 的任意函数.再对 x 积分,得

$$u = 2xy + \int f(x)\mathrm{d}x + g(y).$$

设 $h(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$,所以 $u = 2xy + h(x) + g(y)$ 是所求通解,这里 h 和 g 均是任意函数.

从以上两例可以看到,通解中包含有任意函数且任意函数的个数与方程的阶数相同.

1.1.2 定解条件和定解问题

对于一般的偏微分方程而言,即使是线性方程,求通解也是十分困难的.事实上在实际应用中,往往并不需要求出一个偏微分方程的通解,而是要求方程满足某些特定条件的特解,因此一个偏微方程又称为泛定方程,它反映的往往是一类物理过程的规律.要确定一个具体的物理过程,还要了解这个过程发生的具体条件,即初始状态及边界所受的外界作用,也即初始条件和边界条件,这类条件称为定解条件.泛定方程加上定解条件就构成了一个定解问题.

在定解问题中,只有初始条件没有边界条件的定解问题称为初值问题或柯西(Cauchy)问题;只有边界条件没有初始条件的定解问题称为边值问题;既有初始条件又有边界条件的定解问题称为混合问题(或称为边值混合问题).

初始条件一般用于描述一个随时间发展而变化的系统或过程初始时刻的状况,对于不含时间变量的方程,通常不能附加初始条件而只附加边界条件,用来描述一个系统或过程边界的状况.边界条件有三类:

第一类边界条件 给出未知函数 u 在边界 Γ 上的值,即

$$u|_{\Gamma} = f_1. \tag{1.9}$$

第二类边界条件 给出未知函数 u 沿边界 Γ 的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数,即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=f_2. \tag{1.10}$$

第三类边界条件 给出未知函数 u 及其沿边界 Γ 的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数的线性组合在边界上的值,即

$$\left.\left(\sigma u+\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\Gamma}=f_3. \tag{1.11}$$

在式(1.9)、(1.10)、(1.11)中,等号右端的 f_1,f_2 及 f_3 都是定义在边界 Γ 上的已知函数,当 $f_i\equiv 0\ (i=1,2,3)$ 时,称相应的边界条件是齐次的,否则称为是非齐次的.

1.1.3 定解问题的适定性

在实际问题中,由于自然界本身就给出了问题唯一的答案,所以一个定解问题提得是否符合实际情况,从数学角度来看,可以从三个方面加以检验:解的存在性、解的唯一性、解的稳定性(即当定解条件有微小变动时,解相应地只有微小的变动).一个定解问题的解如果满足存在性、唯一性和稳定性,则称此定解问题是适定的.定解问题的适定性是计算机利用数值方法求解偏微分方程的前提和保证.

但是由实际问题导出的数学物理方程,总要经过一些简化、近似的过程以及一些附加的假设,所以如果得到的定解条件过多或相互矛盾,那么定解问题的解就可能不存在;而如果定解条件不足,则相应的解就可能不唯一,因而不能准确地描述一个确定的物理过程;又由于定解条件通常是由实验方法获取的,因而难免有误差,如果定解条件微小的误差会导致解的较大变化,那么这种解显然不能符合客观实际的要求.由此可见,讨论定解问题的适定性往往很困难,所以我们的重点是在定解问题的解法上.

本书所讨论的定解问题都是经典的,其适定性都已经过证明.

1.1.4 叠加原理

下面以二阶线性微分方程为例,简单介绍线性偏微分方程的叠加原理.

设二阶线性微分方程为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f. \tag{1.12}$$

定义

$$L=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial}{\partial x_i}+c$$

为微分算子,L 作用于一个具有二阶连续偏导数的函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,记为 Lu.故方程(1.12)可简记为

$$Lu = f.$$

当等号右端 $f \equiv 0$ 时，方程 $Lu = 0$ 为二阶齐次线性方程，否则方程(1.12)为二阶非齐次线性方程，此时 f 称为方程的非齐次项.

对方程(1.12)有叠加原理如下：

定理 1.1　若函数 u_i 满足线性方程(1.12)，即 $Lu_i = f_i$ ($i = 1,2,\cdots,m$)，则线性组合

$$u = \sum_{i=1}^{m} c_i u_i$$

满足方程

$$Lu = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i,$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 为任意常数.

定理 1.2　若函数 u_i 满足线性方程(1.12)，即 $Lu_i = f_i$ ($i = 1,2,\cdots$)，级数 $\sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$ 收敛，记 $u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$，且微分算子与求和可交换运算次序，则 u 满足

$$Lu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i,$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 为任意常数.

这里不进行证明，请读者尝试自己推导.

以上叠加原理在线性边界条件中也成立，这里不再进行论述.

自然界中许多物理现象都可以看成是由若干不同因素共同作用的结果，因此也是多因素单独作用的总和，这种叠加的特性在对应的定解问题中，可以将给定方程和定解条件中等号右端的非齐次项 f_i 视为附加的外源因素.当定解问题是线性的时，许多外源因素共同作用的结果就等于多个外源因素独立作用结果的叠加，这种特性是线性问题所特有的.

§1.2　数学模型的建立

本节将通过几个不同的物理模型推导出数学物理方程中三种典型的方程.

1.2.1　波动问题

在波动问题中，振动现象是最有代表性的.振动现象是一个十分复杂的物理过程，在建立数学模型描述这个过程时，必须去掉一些次要因素，进行一些理想化的假设和近似.

考察一根均匀柔软的细弦拉紧后让它在平衡位置附近产生振幅极小的横振

动,研究细弦上各点的运动规律.为此,我们作出如下简化假设和说明:

(1) 弦是柔软的,弦上任一点的张力沿弦的切线方向;弦很细,其重力与张力比较可忽略不计;弦的长度远远大于其直径,故可将此问题理想化为一维的问题.

(2) 横振动是指振动发生在一个平面内,且弦上各点的运动方向垂直于平衡位置,取弦的平衡位置为 x 轴,弦上 x 点处在 t 时刻的位移用可微函数 $u(x,t)$ 表示.

(3) 振幅极小,则弦在任何位置的切线倾角都很小,即

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1.$$

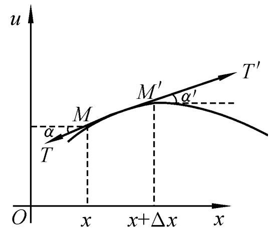

图 1-1

以弦的平衡位置为 x 轴建立坐标系(图 1-1),取一小段弦$[x, x+\Delta x]$ 观察,在 t 时刻 x 点处的弦位移为 $u(x,t)$ 至 M 点处,M 点处的张力为 $T(x,t)$,它与 x 轴的夹角为 $\alpha(x,t)$,则 $\tan\alpha(x,t) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$.

同样地,$x+\Delta x$ 处弦的位移为 $u(x+\Delta x,t)$ 到 M' 点处,张力为 $T'(x+\Delta x,t)$,与 x 轴夹角为 $\alpha'(x+\Delta x,t)$.下面考察弦 MM'.

由于弦只作横振动,故 MM' 沿水平方向所受外力之和为零,即

$$T'\cos\alpha' - T\cos\alpha = 0.$$

又由于

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \cdots,$$

根据假设 α 及 α' 都很小,因此 $\cos\alpha \approx 1, \cos\alpha' \approx 1$.于是近似可得 $T = T'$,所以由 x 的任意性可知,张力大小与 x 无关.

在 u 轴方向,弦 MM' 受力的总和近似为

$$-T\sin\alpha + T'\sin\alpha' + F(x,t)\Delta s,$$

这里弦的重力不计,$F(x,t)$ 为单位长度弦上所受的强迫力,Δs 为 MM' 的弦长.

根据假设知 $|u_x| \ll 1$,所以

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx u_x(x,t).$$

类似地

$$\sin\alpha' \approx u_x(x+\Delta x,t).$$

在 t 时刻弦 MM' 沿 u 轴方向的加速度近似为 $u_{tt}(x,t)$,其质量为 $\rho\Delta s$.这里 ρ 为弦的线密度.由于

$$\Delta s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_x^2}\,\mathrm{d}x \approx \Delta x,$$

则由牛顿第二定律,得方程

$$\rho\Delta x u_{tt} = T[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)] + F\Delta x.$$

在等式两边除以 Δx,并令 $\Delta x \to 0$,得

$$\rho u_{tt} = T u_{xx} + F.$$

若令 $a^2 = \dfrac{T}{\rho}$, $f = \dfrac{F}{\rho}$,则弦的横振动方程为

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f; \tag{1.13}$$

若不受外力作用,则得到弦的自由横振动方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \tag{1.14}$$

若讨论一维弦的纵振动也可得到同样的结果,我们把弦振动方程也称为波动方程,而形如式(1.13)的方程又称一维波动方程.由于式(1.13)的右端多了一个与未知函数 u 无关的项 f,方程(1.13)因此也称为非齐次一维波动方程,而方程(1.14)为齐次一维波动方程.

对于二维或三维物体的振动,设 Δ 为二维拉普拉斯算子则可得二维波动方程

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x, y, t)$$

若以 Δ 表示三维拉普拉斯算子,则得三维波动方程

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t),$$

自然界各种弹性振动,如建筑物的剪振动、潮汐波、地震波、声波、电磁波等都可以利用波动方程来描述.

1.2.2　输运问题

最常见的输运问题就是热传导现象和扩散现象,热传导现象是指当某物体内部各点的温度不一样时,热量就会从温度较高的地方向温度较低的地方流动.因此,热传导过程总是表现为温度随时间和位置的变化而改变,求物体内部的温度分布和变化成为问题的关键.

现在我们就在三维空间中建立一个微分方程,用来描述某个均匀的,各向同性的物体的热传导过程.

在物体中任取一小块,设区域为 Ω,边界曲面为 Γ,物体中点 $M(x, y, z)$ 处在时刻 t 时的温度为 $u(x, y, z, t)$,物体的比热为 c,质量密度为 ρ,物体内的热源强度为 $F(x, y, z, t)$.

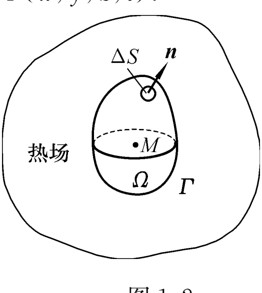

图 1-2

设曲面元素 ΔS 的法向量为 $\boldsymbol{n}$(从 V 内指向 V 外),如图 1-2 所示.

首先根据傅里叶(Fourier)定律可知,物体在无穷小的时间间隔 $[t, t+\Delta t]$ 内,流过一个无穷小面积 ΔS 的热量 ΔQ 与时间长度 Δt,曲面面积 ΔS 以及物体温度 u 沿曲面 ΔS 的法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 三者成正比,即

$$\Delta Q=-k\frac{\partial u}{\partial n}\Delta S\Delta t,$$

其中 $k>0$ 称为热传导系数;负号表示热量是由温度高的地方流向温度低的地方,即热量流向与梯度指向相反.

所以在任意时间区间 $[t_1,t_2]$ 内,通过曲面 Γ 流入区域 Ω 的全部热量为

$$Q_1=\int_{t_1}^{t_2}\left[\iint_\Gamma k\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}t.$$

再由高斯(Gauss)公式

$$\iint_\Gamma\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iint_\Gamma\nabla u\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S=\iiint_\Omega\Delta u\mathrm{d}V,$$

∇ 是向量微分算子, $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$,并且

$$\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\qquad\nabla^2 u=\nabla\cdot\nabla u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Delta u$$

则

$$Q_1=\int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint_\Omega k\Delta u\mathrm{d}V\right]\mathrm{d}t.$$

其次,在时间间隔 $[t_1,t_2]$ 内,热源散发的热量为

$$Q_2=\int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint_\Omega F(x,y,z,t)\mathrm{d}V\right]\mathrm{d}t.$$

第三,从时刻 t_1 到时刻 t_2,物体热量增加的总量为

$$\begin{aligned}Q_3&=\iiint_\Omega c\rho[u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)]\mathrm{d}V\\&=\int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint_\Omega c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V\right]\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

根据热量守恒定律有 $Q_1+Q_2=Q_3$,所以

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint_\Omega(k\Delta u+F)\mathrm{d}V\right]\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint_\Omega c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V\right]\mathrm{d}t.$$

由 t_1,t_2 及 Ω 的任意性,得

$$k\Delta u+F=c\rho u_t.$$

令 $a^2=\frac{k}{c\rho},f=\frac{F}{c\rho}$,则得三维热传导方程:

$$u_t=a^2\Delta u+f,\tag{1.15}$$

其中 Δ 是三维拉普拉斯算子.方程(1.15)当 f 不恒取零时为非齐次热传递方程;当 $f\equiv 0$ 时,则得齐次热传导方程

$$u_t=a^2\Delta u.\tag{1.16}$$

再研究物质的扩散问题,物质的扩散是粒子由浓度高的地方扩散到浓度

低的地方，与热传导现象的不同之处在于一个是粒子的运动，一个是热量的传递. 但能斯特(Nernst)扩散定理有着与傅里叶热传导定律类似的结论，所以完全类似可以推得浓度 u 也满足热传递方程. 它们都遵循输运过程的共同规律.

1.2.3　稳定场问题

静电场问题和稳定温度场问题是最常见的稳定场问题，下面着重讨论由静电荷产生的静电场.

设电场强度 $\boldsymbol{E}(x, y, z)$，由于静电场是无旋场，故

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \mathbf{rot}\ \boldsymbol{E} = \mathbf{0}.$$

而无旋场必为有势场，因此存在势函数即静电势 $u(x, y, z)$，使

$$\boldsymbol{E} = -\nabla u.$$

根据高斯公式，则有

$$\iint_{\Gamma} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d} S = \iint_{\Gamma} (-\nabla u) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d} S = -\iiint_{\Omega} \Delta u \mathrm{d} V, \tag{1.17}$$

其中 Γ 是空间区域 Ω 的边界曲面. 再由电磁学中的高斯定理，又有

$$\iint_{\Gamma} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d} S = 4\pi \iiint_{\Omega} \rho \mathrm{d} V, \tag{1.18}$$

其中 ρ 为电荷密度.

比较式(1.17)及式(1.18)，并考虑到 Ω 的任意性，得

$$\Delta u = -4\pi\rho. \tag{1.19}$$

式(1.19)就是静电势 u 满足的泊松(Poisson)方程，如果所考虑的区域中没有电荷，则可得静电势函数 u 满足的拉普拉斯方程

$$\Delta u = 0. \tag{1.20}$$

在稳定的温度场中，温度分布稳定，所以热传导方程中 $u_t = 0$，此时热传导方程形如

$$\Delta u + f(x, y, z) = 0,$$

此即为泊松方程，而如果又有 $f \equiv 0$，则得到拉普拉斯方程. 所以稳定温度场也遵守泊松方程，在没有热源时，遵守拉普拉斯方程. 拉普拉斯方程也称为调和方程，而它的解习惯上称为调和函数.

以上我们导出的三类方程反映了三类不同本质的物理现象：对时间可逆的过程(波动问题)；对时间不可逆的过程(输运问题)；与时间无关的过程(稳定场问题).

1.2.4　三类问题的定解条件

1. 波动问题的定解条件

由于波动方程中含有对时间 t 的二阶偏导数，故需要两个初始条件. 给出系统

中各点的初位移和初速度，故其初始条件为

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), \end{cases}$$

则对应的初值问题表达式为

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & x \in R, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in R, \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in R. \end{cases}$$

这里设弦长为 l，两端坐标为 $x=0$ 及 $x=l$.波动方程的边界条件通常有以下三种情形：

(1) 若弦的一端固定(称为固定端)，不妨设为 $x=0$，则边界条件为

$$u|_{x=0} = 0,$$

在一般情况下，若弦的一端($x=0$)不固定，而是按照规律 $w(t)$ 运动，则边界条件为

$$u|_{x=0} = w(t),$$

这时得到的都是第一类边界条件.

(2) 若弦的一端可以在垂直于 x 轴的方向上作自由上下滑动，且不受位移方向的外力(称为自由端)，不妨设为 $x=l$.由于垂直方向的张力为零，即

$$T\sin\alpha = 0.$$

在波动方程的推导过程中已知 $\sin\alpha \approx u_x$，因此在自由端近似地有

$$Tu_x|_{x=l} = 0.$$

由于此处的外法线方向的方向导数$\dfrac{\partial u}{\partial n} = u_x$，因此边界条件为

$$u_x|_{x=l} = 0.$$

一般地，若此端点所受垂直方向外力在时刻 t 为 $g(t)$，则位于$(l-\Delta x, l)$之间的一小段弦上有

$$\rho\Delta x u_{tt} = Tu_x(l-\Delta x, t) + g(t),$$

其中 ρ 为弦密度.当 $\Delta x \to 0$ 时，得

$$Tu_x|_{x=l} = -g(t).$$

设 $u(t) = -\dfrac{g(t)}{T}$，则边界条件为

$$u_x|_{x=l} = \mu(t),$$

这时得到的都是第二类边界条件.

(3) 若弦的一端受弹性支撑(称为弹性支撑端)，以 k 表示弹性系数，由胡克(Hooke)定律，该端点(不妨设 $x=l$)受到的弹性力是 $ku|_{x=l}$，而该端点受到的张力为 $Tu_x|_{x=l}$，所以

$$-ku|_{x=l}=Tu_x|_{x=l}.$$

令 $\sigma=\dfrac{k}{T}$,则可以简单地将这一端的边界条件表示为

$$(u_x+\sigma u)|_{x=l}=0.$$

一般地,若时刻 t 此端点还受垂直方向外力 $g(t)$,则可推得

$$(ku+Tu_x)|_{x=l}=-g(t).$$

令 $\sigma=\dfrac{k}{T},u(t)=-\dfrac{g(t)}{T}$,则边界条件为

$$(u_x+\sigma u)|_{x=l}=\mu(t),$$

这时得到的都是第三类边界条件.

波动方程不仅受初始条件的影响,同时受边界条件的约束,因此会出现初边值混合问题.例如,一维波动方程的初边值混合问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), & 0<x<l,t>0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ u|_{x=0}=0,\ u_x|_{x=l}=0, & t>0.\end{cases}$$

2. 热传导方程的定解条件

热传导方程只含有时间 t 的一阶偏导数,故只要一个初始条件.给出初始时刻的温度分布

$$u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z),$$

则热传导方程的初值问题可表示为

$$\begin{cases}u_t=a^2\Delta u+f(x,y,z,t), & (x,y,z)\in R^3,t>0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y,z), & (x,y,z)\in R^3.\end{cases}$$

热传导方程的边界条件也可分为三种情形:

(1) 若物体与外界接触的表面温度在时刻 t 为 $\mu(x,y,z,t)$,则其边界条件为

$$u|_\Gamma=\mu(x,y,z,t),$$

其中 Γ 为物体的边界曲面,这时得到的是第一类边界条件.

(2) 由傅里叶定律可得到

$$k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_\Gamma=-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S\mathrm{d}t},$$

这是第二类边界条件,表示单位时间、单位面积内沿边界外法线方向流出的热量.若边界是绝热的,则边界条件为

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_\Gamma=0.$$

(3) 若物体与边界外部有热交换,设 u_1 表示和物体接触处的介质温度,利用热

传导的牛顿(Newton)定律,单位时间、单位面积内从一介质流入另一介质的热量和两介质的温度差成正比,得

$$\mathrm{d}Q = k_1(u - u_1)\mathrm{d}S\mathrm{d}t,$$

其中 k_1 是两介质间的热交换系数.再根据傅里叶定律

$$\mathrm{d}Q = -k\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t,$$

略去边界薄层升温所耗热量,由能量守恒定律,即有

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = k_1(u - u_1)|_{\Gamma}.$$

令 $\sigma = \dfrac{k_1}{k}, \mu = \sigma u_1|_{\Gamma}$,则得第三类边界条件

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\bigg|_{\Gamma} = \mu(x, y, z, t).$$

我们可以写出在有界区域 Ω 内的热传导初边值混合问题,如

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u + f(x, y, z, t), & (x, y, z) \in \Omega, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), & (x, y, z) \in \Omega, \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\bigg|_{\Gamma} = \mu(x, y, z, t), & t > 0. \end{cases}$$

3. 泊松方程与拉普拉斯方程的定解条件

由于这两个方程不含时间变量,故稳定场问题的定解条件不含初始条件而只能附加边界条件.分别仅附加第一、第二、第三类边界条件的边值问题分别称为第一、第二、第三类边值问题,这三种边界条件的形式分别为

$$u|_{\Gamma} = \mu_1(x, y, z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} = \mu_2(x, y, z),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\bigg|_{\Gamma} = \mu_3(x, y, z).$$

对于拉普拉斯方程,习惯上把相应的第一、第二、第三类边值问题分别称为狄利克雷(Dirichlet)问题、诺伊曼(Neumann)问题和罗宾(Robin)问题.

前面给出的多个边界条件中的 μ 或 μ_1, μ_2, μ_3 均是定义在边界上的已知函数,除稳定场之外,该函数一般来说也与时间 t 有关.

实际上,除了初始条件和边界条件之外,还有诸如衔接条件等其他类型的定解条件,但本书只就初始条件和边界条件进行讨论.

§1.3 方程的分类及特征的概念

二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = f,$$

其中 a_{ij}, b_i, c, f 均为自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数.

在上一节我们导出了三个典型方程:

波动方程 $u_{tt} = a^2 \Delta u + f$,

热传导方程 $u_t = a^2 \Delta u + f$,

泊松方程 $\Delta u = f$.

对这三类方程的研究构成了数学物理方程的主要内容,这三个方程都是二阶线性偏微分方程,下面我们就对照这三类典型方程,以两个自变量的二阶线性偏微分方程为例,来讨论方程的分类问题.

设两个自变量 x 和 y 的函数 $u(x,y)$ 的二阶线性偏微分方程为

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + cu = f, \tag{1.21}$$

其中二阶导数的系数不全为零.为使方程(1.21)形式更加简单,作变量代换

$$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y). \tag{1.22}$$

为保证逆变换存在,其雅可比(Jacobi)行列式为

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0,$$

这时式(1.22)有逆变换

$$x = x(\xi,\eta), \quad y = y(\xi,\eta). \tag{1.23}$$

在此变换下,有

$$\begin{cases} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \end{cases} \tag{1.24}$$

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}, \\ u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}, \\ u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}, \end{cases} \tag{1.25}$$

将式(1.24)及式(1.25)代入方程(1.21),得到以 ξ 和 η 为自变量的二阶线性偏微分方程

$$A_{11} u_{\xi\xi} + 2A_{12} u_{\xi\eta} + A_{22} u_{\eta\eta} + B_1 u_\xi + B_2 u_\eta + Cu = F, \tag{1.26}$$

其中系数

$$
\begin{aligned}
&A_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2,\\
&A_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y,\\
&A_{22}=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2,\\
&B_1=a_{11}\xi_{xx}+2a_{12}\xi_{xy}+a_{22}\xi_{yy}+b_1\xi_x+b_2\xi_y,\\
&B_2=a_{11}\eta_{xx}+2a_{12}\eta_{xy}+a_{22}\eta_{yy}+b_1\eta_x+b_2\eta_y,\\
&C=c,\\
&F=f.
\end{aligned}
$$

由此可以看出,如果取一阶偏微分方程

$$a_{11}z_x^2+2a_{12}z_xz_y+a_{22}z_y^2=0 \tag{1.27}$$

的两个特解分别作为 ξ 和 η,则 $A_{11}=A_{22}=0$,那么方程(1.21)就得以化简了.

设方程(1.27)的解是曲线 $z(x,y)=k$(k为常数),也即可将 y 视为 x 的函数,利用隐函数求导可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{z_x}{z_y}\quad(z_y\neq 0),$$

这样方程(1.27)成为一个常微分方程

$$a_{11}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2a_{12}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_{22}=0. \tag{1.28}$$

我们将方程(1.28)称为二阶线性偏微分方程(1.21)的特征方程,其积分曲线 $\xi(x,y)=k_1$ 和 $\eta(x,y)=k_2$ 称为方程(1.21)的特征曲线.

特征方程(1.28)可以分为两个方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{1.29}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{1.30}$$

设判别式 $\Delta(x,y)=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$,根据 $\Delta(x,y)$ 的符号可将二阶线性偏微分方程分为三种类型:

$\Delta(x,y)>0$,方程(1.21)为双曲型偏微分方程;

$\Delta(x,y)=0$,方程(1.21)为抛物型偏微分方程;

$\Delta(x,y)<0$,方程(1.21)为椭圆型偏微分方程.

不难验证

$$A_{12}^2-A_{11}A_{22}=(a_{12}^2-a_{11}a_{22})(\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x)^2,$$

所以判别式 $\Delta(x,y)$ 的符号在作变量代换时不变,也就是说方程的类型不变.当然由于 $\Delta(x,y)$ 是变量 x 和 y 的函数,所以一个方程在不同的点 (x,y) 处可以分属于不同的类型.下面分别对三种类型的方程进行进一步的讨论.

(1) 当判别式 $\Delta(x,y)>0$ 时,由式(1.29)及式(1.30),得到方程两族特征曲线

$$\xi(x,y)=k_1,\quad \eta(x,y)=k_2\ (k_1,k_2\ 为常数).$$

令 $\xi=\xi(x,y)$,$\eta=\eta(x,y)$ 作变量代换,则 $A_{11}=A_{22}=0$,方程(1.26)变为

$$u_{\xi\eta}=\frac{1}{2A_{12}}(F-B_1u_\xi-B_2u_\eta-Cu). \tag{1.31}$$

再取 $\xi=s+t$,$\eta=s-t$,则 $u_{\xi\eta}=u_{ss}-u_{tt}$,式(1.31)化为

$$u_{ss}-u_{tt}=\frac{1}{A_{12}}[2F-(B_1+B_2)u_s-(B_1-B_2)u_t-2Cu]. \tag{1.32}$$

式(1.31)或式(1.32)称为双曲型方程的标准形式,其等式左端为含二阶导数的项,右端为低于二阶导数的项和非齐次项.显然一维波动方程就是标准形式的双曲型方程.

(2) 当判别式 $\Delta(x,y)=0$ 时,只能得到一族特征曲线 $\xi(x,y)=k$(k为常数).此时由于 $a_{12}^2=a_{11}a_{22}$,不妨设 a_{11} 和 a_{22} 都为正数,由式(1.28),有

$$\left(\sqrt{a_{11}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\sqrt{a_{22}}\right)^2=0,$$

所以这一族特征曲线为

$$\sqrt{a_{11}}\,y-\sqrt{a_{22}}\,x=k.$$

取 $\xi=\sqrt{a_{11}}\,y-\sqrt{a_{22}}\,x$ 作变量代换,而取 $\eta=\eta(x,y)$ 为与 $\xi=\xi(x,y)$ 无关的任意函数,则 $A_{11}=0$,并且

$$A_{12}=(\sqrt{a_{11}}\,\xi_x+\sqrt{a_{22}}\,\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\,\eta_x+\sqrt{a_{22}}\,\eta_y)=0,$$

所以方程(1.26)化为

$$u_{\eta\eta}=\frac{1}{A_{22}}(F-B_1u_\xi-B_2u_\eta-Cu), \tag{1.33}$$

这就是抛物型方程的标准形式,一维热传导方程即为标准形式的抛物型方程.

(3) 当判别式 $\Delta(x,y)<0$ 时,则特征方程(1.28)的解为复值形式,设为

$$\varphi(x,y)=\varphi_1(x,y)+\mathrm{j}\varphi_2(x,y)=k,$$

其中 φ_1,φ_2 是实函数,则利用方程(1.27),得

$$a_{11}\varphi_x^2+2a_{12}\varphi_x\varphi_y+a_{22}\varphi_y^2=0.$$

分别考虑实部和虚部,得

$$a_{11}\varphi_{1x}^2+2a_{12}\varphi_{1x}\varphi_{1y}+a_{22}\varphi_{1y}^2=a_{11}\varphi_{2x}^2+2a_{12}\varphi_{2x}\varphi_{2y}+a_{22}\varphi_{2y}^2,$$

$$a_{11}\varphi_{1x}\varphi_{2x}+a_{12}(\varphi_{1x}\varphi_{2y}+\varphi_{1y}\varphi_{2x})+a_{22}\varphi_{1y}\varphi_{2y}=0.$$

因此可以作变换

$$\xi=\varphi_1(x,y),\quad \eta=\varphi_2(x,y),$$

则有

$$A_{11}=A_{22},\quad A_{12}=0,$$

从而方程(1.26)变为

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=\frac{1}{A_{11}}(F-B_1u_\xi-B_2u_\eta-Cu), \tag{1.34}$$

此即为椭圆型方程的标准形式，二维的泊松方程就是标准形式的椭圆型方程.

例 1.3　试确定方程 $3u_{xx}+10u_{xy}+3u_{yy}=0$ 是什么类型的方程，并将它化为标准形式.

解　判别式 $\Delta=16>0$，所以方程为双曲型，特征方程为

$$3\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-10\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3=0,$$

解得特征曲线为

$$x-3y=0,\quad 3x-y=0.$$

令 $\xi=x-3y,\eta=3x-y$，则

$$\begin{aligned}u_x&=u_\xi+3u_\eta,\quad u_y=-3u_\xi-u_\eta,\\u_{xx}&=u_{\xi\xi}+6u_{\xi\eta}+9u_{\eta\eta},\\u_{xy}&=-3u_{\xi\xi}-10u_{\xi\eta}-3u_{\eta\eta},\\u_{yy}&=9u_{\xi\xi}+6u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}.\end{aligned}$$

将上面的各个偏微导数代入原方程，则得

$$u_{\xi\eta}=0.$$

此时取 $\xi=s+t,\eta=s-t$，则 $u_{\xi\eta}=u_{ss}-u_{tt}$.所以方程的标准形式为

$$u_{ss}-u_{tt}=0.$$

例 1.4　试确定方程 $x^2u_{xx}+y^2u_{yy}=0$ 是什么类型的方程，并将它化为标准形式.

解　判别式 $\Delta(x,y)=-x^2y^2\leqslant 0$，所以在四个象限内方程均为椭圆型，特征方程为

$$x^2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+y^2=0,$$

解得复值的特征线为 $\ln|y|\pm \mathrm{j}\ln|x|=0$.

令 $\xi=\ln|y|,\eta=\ln|x|$，则

$$u_x=\frac{1}{x}u_\eta,\quad u_y=\frac{1}{y}u_\xi,$$

$$u_{xx}=\frac{1}{x^2}u_{\eta\eta}-\frac{1}{x^2}u_\eta,\quad u_{yy}=\frac{1}{y^2}u_{\xi\xi}-\frac{1}{y^2}u_\xi.$$

将以上各个偏导数代入原方程，则得方程的标准形式：

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=u_\xi+u_\eta.$$

小　　结

1. 偏微分方程及其有关概念

偏微分方程及解的定义、偏微分方程的阶、线性和非线性偏微分方程、齐次和

非齐次偏微分方程、偏微分方程的定解条件 —— 初始条件和边界条件以及线性叠加原理，同时给出了定解问题的三种提法：初值问题、边值问题以及初边值混合问题. 定解问题的适定性即存在性、唯一性和稳定性.

2. 三类典型方程

波动方程、热传导方程以及稳定场方程，这三类方程恰好分别是二阶线性微分方程中的三类典型方程，即双曲型方程、抛物型方程和椭圆型方程.

三类方程的定解条件分别是：

(1) 初始条件：

波动方程有两个关于时间 t 的初始条件：$u\,|_{t=0}$ 的值及 $u_t\,|_{t=0}$ 的值；

热传导方程有一个关于时间 t 的初始条件：$u\,|_{t=0}$ 的值；

稳定场方程与时间无关，不需要初始条件.

(2) 边界条件：三个方程都有三类边界条件.

第一类边界条件： $u\,|_{\Gamma} = \mu(x, y, z, t)$；

第二类边界条件： $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \mu(x, y, z, t)$；

第三类边界条件： $\left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\right|_{\Gamma} = \mu(x, y, z, t)$.

3. 二元函数的二阶线性偏微分方程的三种标准形式

双曲型方程： $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = \cdots$；

抛物型方程： $u_{\eta\eta} = \cdots$；

椭圆型方程： $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \cdots$.

等号右端省略号表示低于二阶导数的项和非齐次项.

中英文词汇对照

偏微分方程	partial differential equation
古典解	classical solution
通解	general solution
二阶线性(非线性)偏微分方程	linear (non-linear) partial differential equation of the second order
常系数(变系数)偏微分方程	partial differential equation with constant (variable) coefficients
初始条件	initial condition

齐次(非齐次)边界条件	honogeneous (non-honogeneous) boundary condition
适定(性)问题	well posed problem
初值(边值)问题	initial (boundary)value problem
特征曲线	characteristic curve
双曲型方程	hyperbolic partial differential equation
抛物型方程	parabolic partial differential equation
椭圆型方程	elliptic partial differential equation
叠加原理	superposition principle

习　题　1

1．设一均匀细杆沿杆长方向有微小振动,试推导杆的纵振动方程．

2．长度为 l 两端固定的均匀细弦,两端位于 $x=0$ 和 $x=l$,将弦的中点垂直拉开距离 h,稳定后放开,使其做自由横振动,试写出相应的定解问题．

3．一长度为 l 的均匀细杆,$x=0$ 端固定,另一端沿杆的轴线方向拉长 b 后静止,突然放手后任其振动,试写出振动方程和定解条件．

4．有一根长为 l 侧表面绝热的均匀细杆,其内部有强度随时间变化的热源,在同一截面具有相同的热源强度和初始温度,杆的一端绝热,另一端保持零度,试建立相应的定解问题．

5．试给出下列定解问题所描述的物理模型：

$$(1)\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}, & 0<x<a,\ 0<y<b,\ t>0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y),\ u_t|_{t=0}=\psi(x,y), & 0<x<a,\ 0<y<b,\\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=a}=0, & t>0,\\ u|_{y=0}=0,\ u|_{y=b}=0, & t>0;\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy})+f(x,y,t), & r<\sqrt{x^2+y^2}<R,\ t>0,\\ u|_{\sqrt{x^2+y^2}=r}=\mu(t), & t>0,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\sqrt{x^2+y^2}=R}=0, & t>0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y), & r<\sqrt{x^2+y^2}<R;\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=f(x,y),\\ u|_{\sqrt{x^2+y^2}=r}=k, & r<\sqrt{x^2+y^2}<R.\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\sqrt{x^2+y^2}=R}=0\end{cases}$$

6．试确定下列二阶线性偏微分方程的类型：

(1) $u_{xx} + xu_{yy} = 0$;

(2) $(x-2)u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2 u_{yy} = 0$;

(3) $y^2 u_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} = 0$.

7. Find the standard equation of the following.

(1) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_y = 0$;

(2) $u_{xx} - 6u_{xy} + 10u_{yy} + u_x - 3u_y = 0$;

(3) $u_{xx} - 2xu_{xy} + x^2 u_{yy} = 0$.

8. Verifying the superposition principle about linear partial differential equations: If $u_i(x, y)$ is a solution of the linear second-order equation

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = f_i \quad (i = 1, 2, 3, \cdots),$$

where A, B, C, D, E, F and f_i are functions of x and y. Let the equation be $Lu = f_i$. Series $\sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i$ is convergent (C_i is a arbitrary constant), and x, y can be termwise differentiated by two times. Prove: $u = \sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i$ is a solution of the equation $Lu = \sum_{i=1}^{\infty} C_i f_i$.