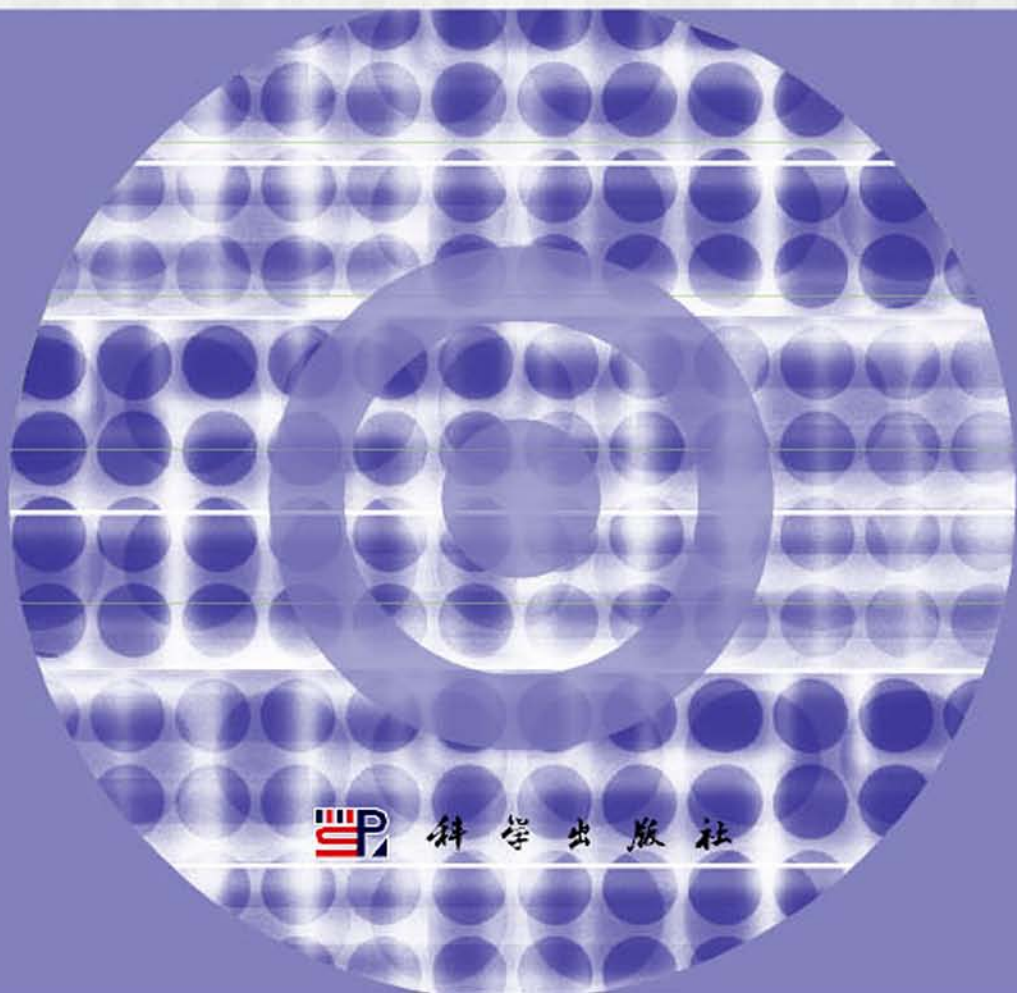


传热与结构分析 有限元法及应用

王成恩 崔东亮 曲蓉霞 乔赫廷 著



科学出版社

传热与结构分析 有限元法及应用

王成恩 崔东亮 曲蓉霞 乔赫廷 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书针对复杂装备研制需求,介绍了平面和轴对称传热问题以及平面和轴对称结构分析问题的有限元模型,同时介绍了等参单元和数值积分等有限元模型计算方法,并在此基础上讨论了热固耦合的表现形式、数值计算模型以及强弱耦合计算方法等。最后,作者检索和归纳了相关文献中的传热和结构分析问题,采用自主研发的热固耦合分析系统对这些典型的案例进行了数值计算和分析。本书的特点是理论方法、工程应用和软件开发紧密结合。

本书可作为装备研制领域的设计分析工程师的参考用书,也可以作为计算机应用技术、工程力学、传热分析和机械设计等专业的高校高年级本科生和研究生的教材。

图书在版编目(CIP)数据

传热与结构分析有限元法及应用/王成恩等著.—北京:科学出版社,2012
ISBN 978-7-03-034499-1

I. ①传… II. ①王… III. ①有限元法-应用-传热-结构分析
IV. ①TK124

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 109658 号

责任编辑:杨向萍 陈 捷 / 责任校对:包志虹
责任印制:张 倩 / 封面设计:陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 6 月 第 一 版 开本:B5(720×1000)

2012 年 6 月 第一次印刷 印张:27 插页:16

字数:523 000

定价:85.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

序

传热、气动、电磁和结构等物理场计算分析技术是航空、航天、船舶和车辆等复杂产品研制的共性核心技术,其相关的计算机辅助工程分析(CAE)软件系统是设计工程师必备的工具手段。随着经济建设和国防建设的发展,复杂产品性能需求越来越高,其运行工况越来越严苛。在急剧变化的多工况条件下,各种物理变化过程(如传热过程和结构变形过程)相互影响的耦合效应日益凸显和复杂,因此,在复杂产品研制过程中,计算机辅助多物理场耦合分析或多学科联合仿真分析技术与工具已成为重要的研究热点。

目前,国外商业化的 CAE 软件在国内装备制造企业、科研院所和高校中占据垄断地位,严重地制约了我国工程应用、技术研究和教学的快速健康发展,因此,急需发展我国自主的复杂产品 CAE 技术与软件系统。这是一条充满荆棘的道路,需要勇气、艰辛、智慧和坚持。令人感到欣慰的是,国内一些研究者和实践者敢于突破传统观念,积极倡导理论研究、自主知识产权软件开发和工程应用相结合,历经努力,已取得了一些良好的成果。《传热与结构分析有限元法及应用》一书研究内容即为其中之一。

在工程应用实践的基础上,该书作者对传热分析、结构分析和热固耦合分析技术、软件开发和工程应用进行了深入系统的总结提炼。该书鲜明地体现多学科交叉融合的特色,内容包括传热的学、固体力学、偏微分方程、有限元法和计算机软件等方面的知识。该书的另一个特色是物理模型、数值计算方法、软件开发和工程应用结合。

该书首先介绍了多维度的导热控制方程、二阶偏微分方程的分类和基本性质、初始边值问题的定解条件和具体的换热边界条件;然后介绍了平面和轴对称传热分析问题的三角形网格单元模型;最后,推导了传热分析问题的四边形等参单元模型和数值计算方法。在结构分析方面,该书介绍了平面和轴对称结构的平衡方程,推导建立了多种载荷和边界约束条件下的结构分析单元模型。为了使读者能够全面掌握有限元方法,该书在建立有限元模型过程中分别采用了迦辽金加权余量法、泛函变分法和虚功原理三种方法,并且论证了这三种方法的异同之处。

该书还介绍了热固耦合分析技术,并论述了多种热固耦合形式,提出了热固耦合数值计算方法,例如,当物性与温度相关时,由线性导热控制方程推导建立了非线性导热控制方程。该书还分别对热固耦合分析问题的弱耦合计算方法和强耦合技术方法进行了探讨。另外,该书还介绍了自主开发的热固耦合分析软件的功能,

并且对众多典型的传热和结构分析案例进行了计算验证和分析。

该书对从事复杂产品研制的工程师具有参考价值,对有自主知识产权的 CAE 软件设计开发具有指导作用,对高校相关专业的教学工作具有支撑作用。期望该书能够积极促进我国自主的复杂产品 CAE 技术与软件系统的发展及其在装备制造业中的工程应用。



中国工程院院士

前 言

我国在高端民用装备和军工装备研制能力与研制水平方面仍然落后于工业发达国家,例如,民用航空产品和零部件依赖进口,军用航空产品与国外先进水平相比具有较大差距。机床企业仍然采用基于经验的改型设计方法,缺乏创新设计理念和设计手段,在高端数控机床市场的竞争力较弱。

复杂装备研制是多学科协同的综合优化决策问题,各学科设计目标和约束相互影响,随着设备性能指标的提升,多学科耦合效应日益凸显。传统的设计理念仍然侧重于零部件结构尺寸设计和强度校核,没有充分考虑复杂工况下装备内部产生的多种物理变化过程。事实上,航空航天、船舶、重型机械、车辆和能源设备等复杂产品研制的关键是高效和高精度的计算流场、温度场、电磁场、结构变形与动态响应等物理现象(过程)。

分析各类物理系统及其耦合效应需要综合应用众多领域的科学知识和技术,其中包括力学和材料领域的机理模型、数学领域的偏微分方程计算方法和计算机领域的数值仿真技术等。其中,计算机软件代码是多物理问题计算和分析技术的一种物化形式,也是检验和修正物理机理模型的主要途径。只有将物理机理模型的数值计算方法编制为计算机软件代码,才能将理论成果应用于实际工程问题。

在我国,许多高校和研究所长期从事空气动力学、流体力学、固体力学、结构力学和传热分析等领域学术研究,但是由于缺乏具有自主知识产权的数值计算软件,所取得的理论成果只能束之高阁,无法在工程技术领域应用。虽然越来越多的企业采用商业化计算机辅助工程分析(computer aided engineering, CAE)系统计算多种物理变化过程,并分析这些物理过程对结构的影响,但是,商业化 CAE 系统是一个典型的黑箱,许多工程师只知其然,不知其所以然。同样,由于缺乏具有自主知识产权 CAE 系统,高校在某种意义上成为国外商业化软件的市场中介,从源头上制约了学生(未来工程师)的创新思维意识。

为了提高复杂装备创新设计水平,高等教育、科研和工业界都需要系统地掌握多物理系统的控制方程(governing equations)、数值计算方法和软件实现方法等。目前,一些有限元技术书籍学术性太强,不能直接指导系统开发及工程应用;另外一些参考书籍则重点介绍国外商业化软件(如 ANSYS)的操作步骤。但是,只有经历机理模型推导、算法设计、软件开发与工程应用的全过程,读者才能深入掌握并且正确应用 CAE 技术。

因此,作者对传热和结构分析的 CAE 系统开发及应用工作进行了总结,试图

系统地介绍相关技术研究、软件开发和工程应用方面的经验。作者已经撰写了《面向科学计算的网格划分与计算可视化技术》一书,介绍了 CAE 系统开发与应用两项关键支撑技术:离散化和可视化技术。本书则主要介绍传热和结构系统的控制方程、数值计算方法、软件开发与应用方法。

CAE 系统常用的数值计算方法包括有限差分、有限元、有限体积和边界元等方法。有限元方法是计算椭圆型和抛物线型偏微分方程的有效数值计算方法,广泛应用于传热和固体力学计算领域。因此,我们在传热和结构分析 CAE 系统开发中采用了有限元方法。

本书具体介绍平面和轴对称结构传热和结构分析控制方程,采用迦辽金加权法、虚功原理和泛函变分方法建立了三节点三角形、六节点三角形、四节点四边形和八节点四边形单元的传热和结构分析有限元模型;介绍了有限元模型的数值计算方法,以及有限元系统开发与典型问题案例的数值计算过程。

本书内容涉及的研究工作持续得到了中国人民解放军总装备部预研计划、国家国防科技工业局项目、国家高技术研究发展计划(简称 863 计划)、辽宁省及沈阳市科技计划等项目的支持,对此表示感谢!同时,感谢李伯虎院士在百忙中审阅了本书,并且作序。感谢中国航空工业集团的郭恩明研究员和周荣林博士,以及沈阳发动机设计研究所的杨士杰研究员和传热分析专业的工程师,他们为作者提供了将理论与工程应用相结合的机会。感谢袁慧群教授在百忙中审阅了本书的初稿,并且提出了许多宝贵建议。最后,感谢众多直接或者间接支持作者科研工作的人士,这些宝贵的支持使得作者在崎岖的科研道路上跋涉前行!

限于作者水平,书中难免存在不妥之处,衷心欢迎读者批评指正和提出宝贵的建议(wangc@mail.neu.edu.cn)。

王成恩

2011 年 11 月 30 日于沈阳

目 录

序

前言

第 1 章 三角形单元的平面传热分析模型	1
1.1 传热分析的概念	2
1.1.1 热力学基本定律	2
1.1.2 传热分析概念	4
1.2 热传导控制方程	5
1.2.1 傅里叶方程	5
1.2.2 导热控制方程	6
1.3 二阶偏微分方程	9
1.3.1 二阶偏微分方程的分类	9
1.3.2 定解条件	11
1.4 传热问题的定解条件	12
1.4.1 第一类边界条件	12
1.4.2 第二类边界条件	13
1.4.3 第三类边界条件	13
1.4.4 热辐射边界条件	13
1.4.5 初始条件	14
1.5 有限元方法简介	14
1.5.1 有限元方法	15
1.5.2 加权余量法	15
1.6 三节点三角形单元模型	18
1.6.1 单元插值函数	18
1.6.2 内部单元加权余量模型	21
1.6.3 边界条件计算方法	23
1.7 六节点三角形单元有限元模型	26
1.7.1 内部单元有限元模型	26
1.7.2 边界条件计算方法	31

1.8	小结	36
第2章	三角形单元的轴对称传热分析模型	38
2.1	引言	38
2.2	轴对称传热分析模型	39
2.2.1	轴对称传热控制方程	39
2.2.2	基于变分法的有限元模型	39
2.2.3	迦辽金加权方法	44
2.3	三节点三角形单元有限元模型	45
2.3.1	内部单元有限元模型	45
2.3.2	边界条件计算	46
2.4	六节点三角形单元有限元模型	49
2.4.1	内部单元有限元模型	49
2.4.2	边界条件计算	53
2.5	瞬态传热分析的时间域差分方法	55
2.5.1	热力学状态的传播	55
2.5.2	时间域差分格式	55
2.6	有限元模型装配方法	58
2.7	小结	59
第3章	等参单元的传热分析模型	61
3.1	四节点四边形单元的平面传热分析模型	61
3.1.1	任意四节点四边形单元平面传热分析模型	61
3.1.2	等参单元映射方法	62
3.1.3	正方形 $[0,1] \times [0,1]$ 的等参映射函数	64
3.1.4	正方形 $[-1,1] \times [-1,1]$ 的等参映射函数	65
3.1.5	平面传热分析的等参单元模型	66
3.1.6	边界条件计算方法	69
3.2	八节点四边形单元的平面传热分析模型	69
3.2.1	等参映射函数	69
3.2.2	正方形 $[0,1] \times [0,1]$ 的等参映射函数	71
3.2.3	正方形 $[-1,1] \times [-1,1]$ 的等参映射函数	72
3.2.4	平面传热分析的等参单元模型	72
3.2.5	边界条件计算方法	74
3.3	四节点四边形单元的轴对称传热分析模型	74

3.3.1	等参映射函数	74
3.3.2	轴对称传热的等参单元模型	74
3.3.3	边界条件计算方法	75
3.4	八节点四边形单元的轴对称传热分析模型	75
3.4.1	轴对称传热分析的等参单元模型	75
3.4.2	边界条件计算方法	76
3.5	六节点三角形等参单元传热分析模型	76
3.5.1	等腰直角三角形单元 $[0,1] \times [0,1]$ 映射函数	77
3.5.2	等腰直角三角形单元 $[0,2] \times [0,1]$ 映射函数	78
3.5.3	平面传热分析的等参单元模型	80
3.5.4	轴对称传热分析的等参单元模型	80
3.6	小结	81
第4章	三角形单元的平面结构分析模型	82
4.1	线弹性结构分析模型	82
4.1.1	应力概念	82
4.1.2	运动平衡方程	87
4.1.3	应变概念	89
4.1.4	线弹性本构关系	92
4.2	平面结构分析的有限元模型	94
4.2.1	平面应力问题	94
4.2.2	平面应变问题	95
4.2.3	基于虚功原理的有限元模型	97
4.2.4	基于迦辽金加权法的有限元模型	99
4.3	三节点三角形单元有限元模型	101
4.3.1	位移模式	101
4.3.2	基于虚功原理的单元模型	102
4.3.3	基于迦辽金加权法的单元模型	102
4.3.4	载荷与约束计算方法	104
4.3.5	应力与应变计算	107
4.4	六节点三角形单元有限元模型	108
4.4.1	位移模式	108
4.4.2	基于虚功原理的单元模型	109
4.4.3	基于迦辽金加权法的单元模型	110

4.4.4	载荷与约束计算方法	110
4.4.5	应力与应变计算	112
4.5	小结	113
第 5 章	三角形单元轴对称结构分析	115
5.1	轴对称结构控制方程	115
5.1.1	轴对称结构平衡方程	115
5.1.2	轴对称本构关系	118
5.2	轴对称问题有限元模型	119
5.2.1	基于虚功原理的有限元模型	119
5.2.2	基于迦辽金加权法的有限元模型	121
5.3	三节点三角形单元模型	124
5.3.1	基于虚功原理的单元模型	125
5.3.2	迦辽金加权法	126
5.3.3	载荷及约束计算	126
5.3.4	应变与应力计算方法	127
5.4	六节点三角形单元模型	128
5.4.1	虚功原理方法	128
5.4.2	迦辽金加权法	129
5.4.3	载荷及约束计算	130
5.5	主应力和主应变	131
5.6	小结	133
第 6 章	结构分析等参单元模型和数值积分	135
6.1	四节点等参单元的平面结构分析模型	135
6.1.1	四节点四边形的等参变换	135
6.1.2	四节点四边形等参单元模型	136
6.1.3	载荷边界条件的计算方法	138
6.2	平面八节点等参单元	138
6.2.1	八节点等参映射变换	138
6.2.2	八节点平面等参单元模型	139
6.2.3	载荷与边界条件的计算方法	140
6.3	轴对称四节点等参单元模型	141
6.3.1	单元结构刚度矩阵计算	141
6.3.2	载荷与边界条件的计算方法	142

6.4	轴对称八节点等参单元	143
6.4.1	单元矩阵的变换	143
6.4.2	载荷与边界条件的计算方法	144
6.5	三角形六节点等参单元	144
6.5.1	等参映射函数	144
6.5.2	平面结构的等参单元模型	145
6.5.3	轴对称结构的等参单元模型	145
6.5.4	载荷计算方法	146
6.6	单元刚度矩阵数值积分	146
6.7	小结	149
第 7 章	热固耦合分析方法	151
7.1	热固耦合形式	152
7.2	平面结构热应力分析模型	154
7.2.1	线性热弹性模型	155
7.2.2	三节点三角形单元热载荷模型	157
7.2.3	六节点三角形单元热载荷模型	158
7.2.4	四边形单元热载荷模型	159
7.3	轴对称结构热应力分析模型	159
7.3.1	三节点三角形单元热载荷模型	161
7.3.2	六节点三角形单元热载荷模型	161
7.3.3	四边形单元热载荷模型	162
7.4	温度与材料物性关系	162
7.4.1	材料物性的线性插值模型	163
7.4.2	非线性平面导热模型	164
7.4.3	非线性轴对称导热模型	167
7.5	热固耦合计算方法	168
7.5.1	弱耦合式计算方法	168
7.5.2	强耦合式计算方法	171
7.6	小结	172
第 8 章	ThermoSolid 系统	174
8.1	系统概述	174
8.1.1	ThermoSolid 系统分析问题的基本流程	175
8.1.2	项目管理功能	175

8.1.3	项目报告生成	177
8.1.4	材料管理	177
8.1.5	图形显示	178
8.2	几何造型	179
8.2.1	二维几何建模功能	179
8.2.2	CAD模型的导入与操作	185
8.2.3	三维实体模型切割功能	185
8.3	网格划分	187
8.3.1	网格导入	187
8.3.2	网格尺寸设置	187
8.3.3	网格划分算法	188
8.3.4	网格删除	191
8.3.5	网格质量统计	191
8.3.6	网格细化/优化	191
8.3.7	坐标及比例尺设置	191
8.4	热边界定义	192
8.4.1	热边界段	192
8.4.2	常规热边界	193
8.5	结构载荷加载	196
8.5.1	结构边界段	196
8.5.2	集中载荷	197
8.5.3	体积载荷	198
8.5.4	表面载荷	198
8.5.5	位移载荷	199
8.6	有限元求解	201
8.6.1	温度场有限元求解	201
8.6.2	温度场分析	202
8.6.3	结构场有限元求解	203
8.6.4	结构场分析	205
8.6.5	热固耦合场有限元求解	205
8.6.6	热固耦合场分析	206
8.7	计算可视化	207
8.7.1	标量场	207

8.7.2	矢量场	211
8.7.3	张量场	212
8.8	小结	212
第9章	平面传热问题计算	213
9.1	带孔金属板冷却分析案例	213
9.1.1	问题描述	213
9.1.2	三节点三角形单元分析	214
9.1.3	六节点三角形单元分析	221
9.1.4	四节点四边形单元分析	224
9.2	潜水艇传热分析案例	227
9.2.1	问题描述	227
9.2.2	三节点三角形单元分析	227
9.2.3	四节点四边形单元分析	229
9.3	环形金属板降温分析案例	232
9.3.1	问题描述	232
9.3.2	三节点三角形单元分析	232
9.3.3	六节点三角形单元分析	237
9.3.4	四节点四边形单元分析	239
9.4	热水钢管道传热分析案例	242
9.4.1	问题描述	242
9.4.2	三节点三角形单元分析	242
9.4.3	六节点三角形单元分析	247
9.4.4	四节点四边形单元分析	250
9.5	烟囱稳态传热分析案例	253
9.5.1	问题描述	253
9.5.2	三节点三角形单元分析	254
9.5.3	六节点三角形单元分析	256
9.5.4	四节点四边形单元分析	257
9.6	有限元模型精确性验证	259
9.6.1	热力学第一类边界条件模型验证	259
9.6.2	热力学第二类边界条件模型验证	260
9.6.3	热力学第三类边界条件模型验证	262

第 10 章 轴对称传热问题计算	264
10.1 热力管保温传热分析案例	264
10.1.1 问题描述	264
10.1.2 三节点三角形单元分析	265
10.1.3 六节点三角形单元分析	268
10.1.4 四节点四边形传热分析	269
10.2 蒸汽管传热分析案例	271
10.2.1 问题描述	271
10.2.2 三节点三角形单元分析	272
10.2.3 六节点三角形单元分析	274
10.2.4 四节点四边形传热分析	276
10.3 钢球瞬态传热问题温度场分析	278
10.3.1 问题描述	278
10.3.2 三节点三角形单元分析	279
10.3.3 六节点三角形单元分析	282
10.3.4 四节点四边形传热分析	285
10.4 带轮淬火过程分析案例	288
10.4.1 问题描述	288
10.4.2 三节点三角形热分析	288
10.4.3 六节点三角形单元分析	292
10.5 保温桶对流传热过程分析	295
10.5.1 问题描述	295
10.5.2 三节点三角形热分析	296
10.5.3 六节点三角形单元分析	299
10.5.4 四节点四边形传热分析	301
第 11 章 平面结构分析问题计算案例	305
11.1 带孔薄板平面应力分析	305
11.1.1 问题描述	305
11.1.2 三节点三角形单元分析	306
11.2 带孔连接板平面应力分析	313
11.2.1 问题描述	313
11.2.2 六节点三角形单元分析	313
11.3 高层建筑承受风载荷的应力分析	317

11.3.1	问题描述	317
11.3.2	三节点三角形单元分析	318
11.4	带孔拱形板平面结构应力分析	322
11.4.1	问题描述	322
11.4.2	三节点三角形单元分析	322
11.5	涵洞平面结构应变分析	327
11.5.1	问题描述	327
11.5.2	六节点三角形单元分析	327
11.6	厚壁圆筒承受压力载荷分析	333
11.6.1	问题描述	333
11.6.2	三节点三角形单元分析	334
11.7	方孔薄板承受拉力载荷的应力分析	338
11.7.1	问题描述	338
11.7.2	三节点三角形单元分析	338
11.8	小结	343
第 12 章	轴对称结构分析问题计算	344
12.1	分析圆盘形等厚度飞轮的轴对称问题	344
12.1.1	问题描述	344
12.1.2	三节点三角形单元分析	345
12.2	分析高速旋转涡轮轮的轴对称结构问题	350
12.2.1	问题描述	350
12.2.2	六节点三角形单元分析	351
12.3	分析厚壁圆球外压下的轴对称结构问题	355
12.3.1	问题描述	355
12.3.2	三节点三角形单元分析	355
12.4	分析圆筒受压下的轴对称结构问题	361
12.4.1	问题描述	361
12.4.2	三节点三角形单元分析	361
12.5	分析工字型车轮的轴对称问题	366
12.5.1	问题描述	366
12.5.2	六节点三角形单元分析	366
12.6	分析轴类零件的轴对称问题	371
12.6.1	问题描述	371

12.6.2	三节点三角形单元分析	372
12.7	分析高速旋转涡轮盘的轴对称结构问题	376
12.7.1	问题描述	376
12.7.2	三节点三角形单元分析	376
12.8	小结	380
第 13 章	热固耦合分析方法与计算	381
13.1	压气机轮盘耦合分析案例	381
13.1.1	问题描述	381
13.1.2	三节点三角形单元分析	381
13.1.3	六节点三角形单元分析	385
13.2	涡轮盘耦合分析案例	388
13.2.1	问题描述	388
13.2.2	结构场分析	389
13.2.3	耦合场分析	393
13.3	厚壁球内外受压耦合分析案例	401
13.3.1	问题描述	401
13.3.2	三节点三角形单元分析	402
13.4	压力容器耦合分析案例	405
13.4.1	问题描述	405
13.4.2	三节点三角形单元分析	405
13.4.3	四节点四边形单元分析	408
参考文献	412
附录	414

第 1 章 三角形单元的平面传热分析模型

热量是自然界和工程技术领域最常见的一种能量形式,对人类生活方式、科技发展、经济建设和国防建设等具有重要影响。欧洲学者早在 19 世纪就开始研究热量产生、传递和转换过程,并创建热力学和传热学等学科。现在,热力学和传热学已经在气象分析、环境监测、航空航天、电力、电子、生物工程、建筑工程、机械制造业和太阳能产业等领域得到广泛应用(Eckert et al., 1996)。

例如,随着推重比的提高,航空发动机涡轮前燃气温度已经达到或者超过 2000K,远远超过材料能够承受的温度极限。为了提高安全性和可靠性,必须对涡轮叶片等零部件进行有效的冷却,如气膜冷却和内部冲击冷却。传热分析计算技术是设计冷却方案和评估冷却效果的关键技术手段。如果预测的叶片温度超出实际温度 10℃,叶片寿命将会减半,因此准确预测出传热系数和叶片温度有助于防止热穿孔和延长叶片寿命(韩介勤等,2005)。有些学者则认为温度场计算偏差如果达到 10~15K,涡轮叶片的估计寿命偏差就达到一半(Rossette et al., 2009)。

另外,各种制冷空调系统都需要计算温度场分布和传热(散热)效率;太阳能发电设备需要计算和提高吸热器的辐射热流密度。纳米卫星采用包括隔热层和散热面等在内的被动热控系统来控制卫星舱内仪器设备的温度变化,保证其工作可靠性(李运泽等,2007)。汽车、火车和地铁等各种车辆在研制过程中都必须计算热量的产生和传递效果,以及其对系统性能、安全和舒适性的影响。

船用大功率柴油机的曲轴制造是支持船舶工业发展的关键技术之一;工程师在曲轴红套装配之前采用数字化计算技术可以掌握曲轴形状变化、热应力场、应变场和温度场的变化规律,指导红套工艺方案制订(余云岚,2008)。

在计算机技术广泛应用之前,学者们已经对热力学和传热学的机理模型进行了深入的研究,但是只能采用傅里叶变换和参数分离等数学方法分析简单的热力学过程;学者们在很大程度上依赖物理实验观察热量变化和传递现象,总结和验证传热规律。

近 30 年来,计算机技术的发展使得学者和工程师可以采用数值计算技术研究分析热量的产生、传递和转换过程。计算机数值计算技术和经典传热理论的结合产生了一门新的交叉学科——数值传热学(numerical heat transfer, NHT)或者计算传热学(computational heat transfer, CHT)。

数值传热学利用偏微分方程的数值计算技术(有限差分法、有限体积法、有限元法等)计算传热过程的状态变化(如温度场和温度梯度场的动态分布),并进一步

分析预测传热过程对结构系统的影响。数值传热分析及相应的计算机软件的发展,使得设计工程师可以十分方便地在各类工程技术领域中应用传热分析技术。

目前,科学与工程领域(如装备研制)广泛采用数值传热分析软件进行模拟仿真、分析预测和设计优化,以便提高热交换效率、冷却效率、热防护效率或者降低辐射率等。因此,掌握传热机理模型及其数值计算技术对于从事各类装备设计的工程师是十分重要的。而且,传热分析也是复杂装备多学科设计优化(multidisciplinary design optimization, MDO)技术领域的重要组成学科。传热分析技术是复杂装备创新设计和跨越发展的支撑技术。

1.1 传热分析的概念

在科学技术领域,人们普遍采用系统论的方法将研究对象从环境中分离出来形成“系统”。系统观念强调了研究对象与外部环境之间的分割及联系,并且强调了系统内部要素之间的交互作用。系统与外部环境的分割或者连接之处称为系统边界。通过定义一个系统,研究者可以明确界定研究对象的边界和内涵(王成恩, 2000, 2011)。

在与“热”相关的科学技术领域,学者们将研究对象从环境中分割开来,并且定义为**热力学系统**。热力学系统是一种“连续介质(continuum)”构成的系统,即大量的流体或者固体“质点”或者“粒子”占据连续空间位置构成一个没有缝隙的几何“体积”。学者们采用若干参数描述热力学系统的“状态”,这些参数称为热力学系统的**状态参数**或者**性质**。热力学系统的性质不是微观尺度上单个粒子的状态,而是宏观尺度上全部粒子统计平均规律。

一组确定的状态参数值称为热力学系统的一个状态,一个热力学系统可以具备多种状态。如果热力学系统的状态参数不随时间变化,则称热力学系统处于**稳态**或者**平衡状态**,否则称热力学系统处于**瞬态**或者**非平衡状态**。

热力学系统中常见的状态参数有:温度、压力、密度、内能、焓等。温度是描述热力学系统处于(瞬间)平衡状态的一个状态参数,热量是改变热力学系统状态的一种能量。

在工程技术领域,存在两门相互关联的研究热现象的学科:**热力学**和**传热学**。这两门学科分别从不同的角度研究了热力学系统的状态变化、热量传递和能量转换规律。

1.1.1 热力学基本定律

热力学主要研究热力学系统从一个状态变化到另一个状态时所伴随的热量变化或者热量与其他能量的转换。热力学系统与外界进行能量交换(传热或做功)的

根本原因是两者的热力学状态之间存在差异。例如,热力发动机中能量发生转换是由于热力发动机的高温高压工质与外界环境的温度和压力有很大的差别。

热力学第一定律和第二定律是描述热力学系统状态变化的基本定律,是热力学理论体系的基础。热力学第一定律表述为:“当热能与其他形式的能量进行转化时,能的总量保持恒定。”热力学第一定律是能量守恒定律在热现象上的体现,其数学表达式为

$$\Delta E = \delta Q - \delta W$$

式中, δQ 表示热量; δW 表示系统做功; ΔE 是系统内能的变化量。在国际单位制中三者的单位都是焦耳(J)。

在热力学第一定律中,进入热力学系统的热量为正,流出系统的热量为负;热力学系统对外界做功为正,外界对热力学系统做功为负;热力学系统内能增加为正,降低为负。热力学第一定律表示对于任何热力过程,系统中存储能量的增加等于进入系统的能量减去离开系统的能量。

如果热力学系统与外部环境既没有物质交换也没有热量交换,称为绝热系统。绝热系统中热力学第一定律表现为

$$\Delta E = -\delta W$$

一般传热过程中,热力学系统与环境没有物质交换,只有热量交换。如果热力学系统与外部环境既有物质交换,也有能量交换,称为传质传热系统。

热力学第一定律表明了热力学系统中内能、热量和功三个物理量之间的关系,但是,没有说明热量传递的方向。德国物理学家 Clausius 指出热量不能自发地从低温物体流向高温物体,只能自发地从高温物体流向低温物体。Clausius 的结论指明了自然过程中热量传递的方向,被称为热力学第二定律。

热力学第二定律具有多种表述方式。热力学将传热过程分为可逆(reversible)过程和不可逆(irreversible)过程。如果一个热力学系统从初始状态经过某一路径到达一个终止状态,并且能够沿着相同路径从终止状态返回初始状态,则该传热过程称为可逆的。如果一个热力学系统从初始状态经过某一路径到达一个终止状态,不能沿着相同路径从终止状态返回初始状态,则该传热过程称为不可逆的。

Clausius 引入了熵的概念描述热力学系统的初始状态和终止状态之间的差异。热力学第二定律可以表述为热力学过程中熵的变化,即

$$S_2 - S_1 \geq 0$$

式中, S_1 和 S_2 分别表示热力学系统在初始状态和终止状态的熵。一个热力学过程中,如果 S_1 和 S_2 相等,则该过程是可逆的;如果 S_2 大于 S_1 ,则该过程是不可逆的。

上式说明在可逆过程中孤立热力学系统的总熵保持不变;在不可逆过程中孤立热力学系统的总熵是增加的,这个规律叫做熵增加原理。因此,热力学第二定律的另一种表述形式是:在自然过程中孤立热力学系统中总熵不会减小。

热力学第二定律指出在自然界中任何的热力学过程都不可能自动地复原,要使系统从终态回到初态必须借助外界的作用。

热力学第二定律指出了传热过程的可能方向和达到平衡的必要条件,以及不可逆性对过程性能的影响。所谓方向性和不可逆性,是指在各种过程中热力系统总是从不平衡状态朝着平衡状态的方向进行。当热力系达到平衡状态后,一切变化也就停止了。自然过程是不可逆的,已经达到平衡状态的热力学系统不会重新自发地变为不平衡状态。例如,两个温度相等已经取得了热平衡的物体,不会自发地使得一个物体温度升高而另一个物体温度降低。因此,从本质上说,热力学系统趋于平衡就是自然过程的方向。

1.1.2 传热分析概念

当热力学系统与外部环境或者系统内部存在温差时,热力学系统处于热不平衡状态,一定会造成热量传递。虽然,热力学可以计算出热力学系统的两个热平衡状态之间的能量(热量)差异,却不能计算分析两个平衡状态之间的变化过程。例如,热力学不能计算热力学系统从一个热力学状态达到另一个热力学状态所需的时间,也不能计算出某一个时刻热力学系统的非平衡状态。

传热学是研究热量传递(过程)规律的学科,可以计算热力学系统状态变化的历程。热量传递有**导热**、**对流**和**热辐射**三种基本方式。物体各部分之间不发生相对位移时,依靠分子、原子及自由电子等微观粒子的振动和碰撞而产生的热量传递现象称为**导热**或**热传导**。例如,物体内部存在温差时,热量从高温部分传递到低温部分;两个直接接触的物体(固体)间存在温差时,热量从高温物体传递到低温物体,都是典型的导热现象。

通过流体运动把热量由某处传递到另外一处的现象,称为**对流传热**。对流传热分为**自然对流传热**(natural convection)和**强制对流传热**(forced convection)两类。在对流传热过程中,如果流体运动是由自身热力学状态的不平衡引起的,则称为自然对流传热;如果流体运动是由外力引起的,则称为强制对流传热。工程上常遇到的不是单纯对流传热方式,而是流体流过另一固体表面时对流传热和导热相结合的热量传递过程,称为**对流换热**。

物体通过电磁波传递能量的方式称为**辐射**。物体会因多种原因发出辐射能,其中因热的原因发出热辐射能的现象称为**热辐射**。自然界中各物体都不停地向空间发出热辐射能,热量辐射和吸收是物体间进行热量传递的主要方式之一,即**辐射换热**。当物体与周围的环境达到热平衡时,辐射换热量等于零;但这是动态平衡,辐射与吸收过程仍不停地进行,只不过二者数量上相等而已。

导热和对流换热这两种热量传递方式必须通过介质才能实现,而热辐射可以在没有中间介质的真空中传递热量。这是热辐射区别于导热和对流换热的重要特

点之一。当两个物体被真空隔开时,如太阳与地球之间,就不会发生导热和对流传热现象;但是太阳可以辐射换热的方式将热量传给地球。热辐射过程中不仅产生能量的转移,而且还伴随着能量形式的转化。热辐射过程中,能量首先从热能转变为电磁波能,然后在吸收过程中又从电磁波能转换为热能。这是辐射换热区别于导热和对流传热的另一个特点。

1.2 热传导控制方程

物理学将物质分为气体、液体和固体三种形态,传热过程可以发生在任何形态的物质中。由于许多工程设计分析问题的核心是金属或者非金属固体材料中的热传递现象,故固体材料中的传热分析占据了主导地位。因此,本书主要探讨固体中的导热现象,其他传热方式作为边界条件进行处理;后续章节中“固体”和“物体”等在概念上等同于“热力学系统”。

1.2.1 傅里叶方程

固体传热方式主要为热传导,研究表明如果在物体内存在温度梯度,则能量就会由高温区向低温区转移。许多学者对热传导机理进行了研究,认为当物体两端存在温度差时热量就像流体一样在物体内部流动,形成热量流(简称热流)。如同水流和电流,在单位时间内通过物体某一截面(或者表面)的热量称为热流量;单位时间内通过单位截面(表面积)的流量称为热流量密度(强度),简称为热流密度。物理实验表明单位时间内通过物体单位截面(或者表面积)的热流量(即热流密度)大小正比于该截面(或表面)的法向温度梯度值,但是热流方向与法向温度梯度方向相反,即

$$q_n = -k_n \frac{\partial T}{\partial n} \quad (1.1)$$

式(1.1)也称为傅里叶方程,其中, q_n 是物体截面(或者表面)法线方向的热流量密度(或热流密度),其单位为瓦/平方米(W/m^2); $\frac{\partial T}{\partial n}$ 是物体表面法线方向的温度梯度,其单位为开尔文/米(K/m);常数 k_n 称为材料法线方向的导热系数或热传导率(简称热导率),其单位为瓦/(米·开尔文)[$\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$]。

傅里叶方程中的负号表示热传导过程服从热力学第二定律,热量从高温区域流向低温区域。我们通常在笛卡儿直角坐标系中研究热力学系统的状态变化,根据傅里叶方程(1.1)得到三个坐标轴 x, y, z 方向的热流密度:

$$q_x = -k_x \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y = -k_y \frac{\partial T}{\partial y} \quad q_z = -k_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (1.2)$$

式(1.2)中, (q_x, q_y, q_z) 表示三个坐标轴 x, y, z 方向的热流密度; (k_x, k_y, k_z) 表示物体在三个坐标轴 x, y, z 方向的导热系数。

导热系数是固体材料的固有性质(物性)。严格意义上,材料导热系数是与温度相关的,工程实践中为了简化计算,人们在温度变化不大的条件下,忽略温度对导热系数的影响。理论上,固体材料中每一点在三个坐标轴方向的导热系数是不同的,即材料是各向异性的。如果物体中同一点在三个坐标轴方向的导热系数是相同的,则材料是各向同性的。如果材料中每点的导热系数不相同,即导热系数是每点位置坐标的函数,则该物体称为异构(heterogeneous)材料。如果材料中每点的导热系数相同,则该物体称为同构(homogeneous)材料。对于同构材料,物体中各点的导热系数都相同,但是每点可能存在三个不同方向的导热系数。

对于各向异性的异构材料,导热系数不仅在各点不同,而且在每点三个坐标轴方向上也不同,即

$$\begin{cases} k_x(x, y, z) \neq k_y(x, y, z) \neq k_z(x, y, z) \\ k_x(x_i, y_i, z_i) \neq k_x(x_j, y_j, z_j) \\ k_y(x_i, y_i, z_i) \neq k_y(x_j, y_j, z_j) \\ k_z(x_i, y_i, z_i) \neq k_z(x_j, y_j, z_j) \end{cases}$$

但是,在工程技术领域中大多数材料(特别是金属材料)是各向同性的同构材料,即导热系数在每点的三个坐标轴方向上是相等的,而且不随位置发生变化,即

$$k_x(x, y, z) = k_y(x, y, z) = k_z(x, y, z) = k \quad (1.3)$$

式中, k 为常数,称为材料的导热系数或者热导率。

将式(1.3)代入式(1.2)中,各向同性同构材料的热传导方程可表示为

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (1.4)$$

在以后章节中,如果不特殊说明,材料的导热系数默认为常数。

1.2.2 导热控制方程

在连续介质物理系统研究中,人们通常采用系统状态变量建立偏微分方程(partial differential equation, PDE)来描述质量守恒、动量守恒和能量守恒定律。因为,物理系统必须遵守这些守恒规律,所以采用 PDE“管理”和“控制”这些物理系统的行为。因此,这些 PDE 模型被称为相关物理系统的控制方程(governing equations)(王成恩,2011)。

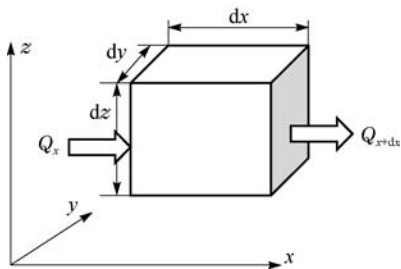


图 1.1 微元体中的一维热传导示意图

因此,这些 PDE 模型被称为相关物理系统的控制方程(governing equations)(王成恩,2011)。

在传热学中,热传导控制方程是根据热力学第一定律推导得到的能量守恒方程。许多文献(Noda et al., 2003; 陶文铨, 2006)论述了三维空间中固体热传导控制方程的推导过程。如图 1.1 所示,假设热量分别沿

着三个坐标轴方向进行传递,取固体结构的微小单元研究热量传递过程。在微小时间间隔 dt 内,单元体左侧沿着 x 坐标轴方向流入固体单元的热量根据式(1.4)计算:

$$Q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} dy dz dt \quad (1.5)$$

式中, Q_x 为沿着 x 轴方向流入微元体的热量,单位为焦耳(J)。

同理,在微小时间间隔内,从单元体右侧沿着 x 坐标轴方向流出固体单元的热量为

$$Q_{x+dx} = -k \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x+dx} dy dz dt = -k \left[\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] dy dz dt \quad (1.6)$$

式中, Q_{x+dx} 为沿着 x 轴方向流出微元体的热量。

将式(1.6)与式(1.5)相减,即得到沿着 x 坐标轴方向流出热量与流入热量的差值:

$$Q_{x+dx} - Q_x = -k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy dz dt \quad (1.7)$$

同理,可以分别得到沿着坐标轴 y 和 z 方向流出热量与流入热量的差值:

$$Q_{y+dy} - Q_y = -k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dx dy dz dt \quad (1.8)$$

式中, Q_y 和 Q_{y+dy} 分别为沿着 y 轴方向流入和流出微元体的热量。

$$Q_{z+dz} - Q_z = -k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dx dy dz dt \quad (1.9)$$

式中, Q_z 和 Q_{z+dz} 分别为沿着 z 轴方向流入和流出微元体的热量。

根据热力学第一定律,考虑流入和流出微元体的热量,此时能量平衡方程为

$$Q_x + Q_y + Q_z + q_v dx dy dz dt = Q_{x+dx} + Q_{y+dy} + Q_{z+dz} + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz dt \quad (1.10)$$

式中, q_v 为单位时间内材料内部单位体积中产生的热量,称为内热源密度,单位为瓦/立方米(W/m^3); ρ 为材料密度,其单位为千克/立方米(kg/m^3); c_p 为材料的比定压热容,即单位体积材料在确定压力下产生单位温度变化所需热量,其单位为焦耳/(开尔文·立方米) $[J/(K \cdot m^3)]$; $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz dt$ 表示单元体中内能的变化量。

内热源表明材料内部由于某种物理或化学过程产生的热量,如电子元件中由于电阻效应产生的热量。内热源 q_v 可以是几何位置的函数,也可以是一个常量。本书中,未加特别注明之处都将内热源作为常量。

将式(1.7)~式(1.9)代入式(1.10)中,得到三维笛卡儿直角坐标系中瞬态温度场变量 $T(x, y, z, t)$ 应满足的控制方程

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + q_v \quad (1.11)$$

式(1.11)是直角坐标系下固体的导热控制方程。

另外,很多工程问题需要在极坐标系和球坐标系下研究或者分析传热过程,采用基本的坐标系变换方法就可以将直角坐标系下的导热控制方程(1.11)变换为极坐标系或者球坐标系下的导热控制方程(Noda et al., 2003)。

极坐标系下导热控制方程为

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + k \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + k \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + q_v \quad (1.12)$$

球坐标系下导热控制方程为

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + k \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] + k \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + q_v \quad (1.13)$$

如果温度场不随时间发生变化,则称为稳态传热过程。此时温度对时间的偏导数为零,因此式(1.11)~式(1.13)中左边第一项为零。例如,直角坐标系下稳态导热控制方程变化为

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + q_v = 0 \quad (1.14)$$

在工程技术领域,三维空间中物体的导热模型在一定的条件下往往被简化为二维甚至一维空间的导热模型。如果物体在某一个坐标轴(为了简便假设为 z 轴)方向没有热量传递,即温度场对 z 轴的偏导数为零,则此时物体中的导热过程就可以简化为二维空间的导热过程。

在直角坐标系下,由三维空间的导热控制方程(1.11)得到二维平面导热控制方程

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + q_v \quad (1.15)$$

假设物体内部不产生热量,即没有内热源项,则二维平面导热控制方程(1.15)等同于

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (1.16)$$

假设物体内部不产生热量并且温度不随时间变化(即稳态温度场),则二维平面导热控制方程(1.16)等同于

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

如果进一步假设物体在两个坐标轴方向没有热量传递,则三维物体的传热过程就可以被简化为一维传热过程。在直角坐标系下,由二维空间的导热控制方程(1.15)可以得到一维空间导热控制方程

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_v \quad (1.17)$$

根据式(1.17)知,一维稳态导热控制方程已经退化为一个二阶常微分方程

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} + q_v = 0 \quad (1.18)$$

一维稳态导热过程具有理论通解

$$T = -\frac{q_v}{2k} x^2 + c_1 x + c_2 \quad (1.19)$$

为了求得式(1.19)的确定解,需要补充其他条件才能计算其中的两个系数 c_1 和 c_2 。

1.3 二阶偏微分方程

1.3.1 二阶偏微分方程的分类

在数学形式上,导热控制方程式(1.11)~式(1.16)是二阶偏微分方程(second-order partial differential equation)。在工程技术领域,二阶偏微分方程占据了主导地位,许多物理系统的控制方程都采用二阶偏微分方程。因此,本节对二阶偏微分方程的基本性质进行简单介绍。

假设函数 u 是 n 维实数空间的一个标量函数,则关于函数 u 的二阶偏微分方程通式为

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + d = 0 \quad (1.20)$$

如果采用爱因斯坦求和约定,式(1.20)可以简写为

$$a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + d = 0 \quad (1.21)$$

在式(1.20)或者式(1.21)中,如果 $d=0$,则称方程为齐次(homogenous)方程;否则称为非齐次(non-homogenous)方程。如果偏微分方程中,函数 u 及其偏导数项的系数中不包括函数 u (或偏导数),则称为线性偏微分方程;如果偏微分方程中,函数 u 及其偏导数项的系数中包括函数 u (或偏导数),则称为非线性偏微分方程。

如果实数空间的维数等于2(即只有两个自变量),则函数 u 的二阶偏微分方程通式简化为

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0 \quad (1.22)$$

1.2节介绍的导热控制方程都是线性偏微分方程。下面的偏微分方程也是线性的:

$$(5x^2 + 4y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 7x^3 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

导热控制方程中,如果考虑导热系数随温度的变化,则导热控制方程变化为非线性偏微分方程。例如,在导热系数随温度变化但变化率较小的情况下,导热控制方程(1.15)就变化为以下非线性形式:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k(T) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k(T) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + q_v$$

数学家将二阶线性偏微分方程划分为椭圆型、抛物线型和双曲线型三种类型。偏微分方程(1.22)的类型是由式中二阶偏导数项的系数所决定的。

如果 $B^2 - 4AC < 0$, 则偏微分方程(1.22)是椭圆型(elliptic)。椭圆型偏微分方程描述与时间无关的物理过程,如稳态传热过程。椭圆型偏微分方程中不包含时间变量,仅仅包含空间变量。从另一个角度,椭圆型偏微分方程描述与时间相关的物理过程当时间趋于无穷大时的极限状态。

如果 $B^2 - 4AC = 0$, 则偏微分方程(1.22)是抛物线型(parabolic)。抛物线型偏微分方程描述与时间相关的“传播(propagation)”过程,如瞬态传热过程。抛物线型偏微分方程中不仅包含空间变量,而且包含时间变量(一般为一阶时间偏导数)。在空间域上,抛物线型偏微分方程一般是椭圆型偏微分方程。因此,抛物线型偏微分方程描述一个由无数的“中间平衡状态(椭圆型)”构成的物理过程,并且当时间趋于无穷大时抛物线型偏微分方程的解无限趋近于相应的椭圆型偏微分方程的解。

如果 $B^2 - 4AC > 0$, 则偏微分方程(1.22)是双曲线型(hyperbolic)。双曲线型偏微分方程也描述与时间相关的“传播(propagation)”过程,如波动过程。双曲线型偏微分方程中不仅包含空间变量,而且包含时间变量(一般为二阶时间偏导数)。在空间域上,双曲线型偏微分方程一般也是椭圆型偏微分方程。双曲线型偏微分方程描述“椭圆型平衡状态”向波一样传播的物理过程。

因此,稳态导热控制方程(1.14)是椭圆型二阶偏微分方程。如果偏微分方程中自变量数目大于2,则需要分别对两个自变量组合来判断偏微分方程的类型。瞬态导热控制方程对于任意两个空间坐标都是椭圆型二阶偏微分方程,但是对于时间和任意一个空间坐标则是抛物线型二阶偏微分方程。在物理系统中,人们一般以时间变量为主要参考变量,因此,瞬态导热控制方程被称为抛物线型二阶偏微分方程。

二阶偏微分方程的类型是其固有的性质,不随坐标系改变发生变化。即在某个坐标系下,如果一个二阶偏微分方程是椭圆型(抛物线型或者双曲线型),则在另外的坐标系下,它仍然是椭圆型(抛物线型或者双曲线型)。

对于偏微分方程(2.22)进行如下坐标系变换:

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} u_x \\ u_y \end{cases} = \begin{bmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{bmatrix} \begin{cases} u_\xi \\ u_\eta \end{cases} = J \begin{cases} u_\xi \\ u_\eta \end{cases}$$

$$A' \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + B' \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C' \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D' \frac{\partial u}{\partial \xi} + E' \frac{\partial u}{\partial \eta} + Fu + G = 0$$

可以得到

$$(B')^2 - 4A'C' = J^2(B^2 - 4AC)$$

表明二阶偏微分方程的类型不会随着坐标系变换而改变。

1.3.2 定解条件

根据高等数学知识,一个数学函数的积分原函数是一组函数簇,称为积分问题的通解(general solution)。例如,没有内热源的一维稳态导热控制方程的通解为

$$T(x) = c_1 x + c_2$$

由于上式包含了两个未知系数,需要给定温度函数在两个点的值,才能得到一维温度场函数的特定解(particular solution),也称为定解。假设已知温度场在两个端点的温度值如下:

$$T(0) = 26 \quad T(4) = 50$$

将这两点的温度值代入一维温度场通解,就可以得到一维温度场的定解为

$$T(x) = 6x + 26$$

像这样给定物理场在边界点上值,称为物理问题定解的**边界条件**(boundary conditions)。椭圆型偏微分方程只需给定边界条件就可以获得定解,因此被称为**边值问题**(boundary value problem)。对于包含时间变量的通解函数(如瞬态传热问题),我们还需要知道某一时刻的全部函数值,才能确定问题的定解。例如,传热分析问题中,一般给定物体在初始时刻的温度分布,这也称为**初始条件**(initial condition)。对于双曲线型偏微分方程,初始条件不仅包括函数的初始值,而且包括函数一阶偏导数的初始值。

在偏微分方程计算领域,为了得到一个数学问题的定解必须预先给定边界条件和初始条件。因此,以抛物线型或双曲线型偏微分方程描述的物理问题在数学上通常称为**连续初始边(界)值问题**(initial boundary value problem),边界条件和初始条件称为该问题的**定解条件**。

数学家通常将连续初始边值问题的边界条件分为三类,分别称为 Dirichlet 条件、Neumann 条件和 Robin 条件。连续初始边值问题的三类边界条件具体描述方式如下:

Dirichlet 条件的数学形式为

$$u(x, y, z) |_{\partial\Omega} = f(x, y, z) \quad (1.23)$$

式中, $u(x, y, z)$ 为连续初始边值问题的解; $\partial\Omega$ 为问题定义域边界; $f(x, y, z)$ 为已知函数或者常数。

Neumann 条件的数学形式为

$$\left. \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = f(x, y, z) \quad (1.24)$$

式中, 各项的含义与 Dirichlet 条件中各项的含义相同, Neumann 条件表示解函数在定义域边界上的法向梯度为已知函数或者常量。

Robin 条件的数学形式为

$$\left. \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} + ku(x, y, z) |_{\partial\Omega} = f(x, y, z) \quad (1.25)$$

式中, 各项的含义与 Dirichlet 条件中各项的含义相同, Robin 条件为 Dirichlet 条件和 Neumann 条件的组合, 也称为混合边界条件。

Dirichlet 条件和 Neumann 条件是 Robin 条件的特例。令 Robin 条件(1.25)中的系数 $k=0$, 则得到 Neumann 条件; 令 $k \rightarrow \infty$, 则得到 Dirichlet 条件。

边界条件实质上描述了“系统”与外部环境在分界处的物质和能量传递; 只有清楚地描述和分析环境对系统的影响才能确定系统的具体状态(定解)。

初始条件相当于某一个物理过程开始时系统的初始状态, 即一个物理过程的起点状态。

1.4 传热问题的定解条件

偏微分方程的边界条件, 即 Dirichlet 条件、Neumann 条件和 Robin 条件, 在各科学领域的表现形式和物理含义是完全不相同的。在传热学中, 有四类典型的边界条件表现形式。

1.4.1 第一类边界条件

第一类边界条件是指物体边界上的温度函数为已知, 在三维直角坐标系中

$$T |_{\partial\Omega} = f(x, y, z, t) \quad (1.26)$$

式中, $f(x, y, z, t)$ 为已知的数学函数或者常数。第一类传热边界条件就是 Dirichlet 条件在传热学中具体表现形式。第一类边界条件表示物体边界温度被强制维持在一条已知的随时间变化的曲线上或者固定曲线上, 物体边界甚至可能保持一个恒定的温度。

1.4.2 第二类边界条件

第二类边界条件是指系统边界上的热流密度已知,根据式(1.1)可表示为

$$q_{\text{max}}|_{\partial\Omega} = -k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = f(x, y, z, t) \quad (1.27)$$

式中, q_{max} 为边界上外法线方向的热流密度; $f(x, y, z, t)$ 为已知的数学函数或者常数。第二类热边界条件实质是 Neumann 条件在传热学中的具体表现形式。第二类热边界条件表示物体边界上流出(入)的热流密度是已知的函数,或者为一常数。

注意:热流密度 q_{max} 与边界 $\partial\Omega$ 外法线方向相同,即热量从物体向外流出时取正值,相反热量流入物体时则取负值。

1.4.3 第三类边界条件

第三类边界条件描述物体与环境的对流换热现象,即流体流动通过物体表面实现热量交换,又称为对流换热边界条件。第三类边界条件的数学方程为

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = h(T - T_f) \quad (1.28)$$

式中, T 为固体温度; T_f 为流体介质的温度; h 为换热系数,单位为瓦/(平方米·开尔文)[$\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$]。

第三类换热边界条件表明固体边界热流密度与固体和流体之间的温度差成正比,实质上是 Robin 条件的一种表现形式。一般情况下,流体温度和换热系数设置为常数,特殊情况下可以是温度、时间与位置的某种函数。换热系数与流体物性、流动速度、流体和固体之间的温差等因素相关,多数情况下需要采用实验方法测定。

需注意的是,式(1.28)表示热量从固体向外流出传递到流体中;当热量从流体介质流入固体时此公式仍然正确。

1.4.4 热辐射边界条件

传导和对流都要通过介质进行传递,但是电磁波辐射机理不同,热辐射能可以在完全真空中传递。热力学的研究表明:理想的辐射体(黑体)向外发射能量的速率与它的绝对温度的四次方成正比。一个物体向另一个物体发送热辐射能的同时,也接受另一个物体的热辐射能。所以,在一个物体通过热辐射与另外一个物体进行热量交换时,其边界热流密度如下:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = F_{\epsilon} F_c \sigma (T^4 - T_R^4) \quad (1.29)$$

式中, T 为物体的边界温度; T_R 为环境温度(或另外物体的温度); σ 为比例常数,称为斯特藩-玻尔兹曼常数,其数值为 $5.669 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$; F_{ϵ} 为辐射率函