

21 世纪高等院校教材

偏微分方程数值解法

孙志忠 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书内容包括常微分方程两点边值问题的差分解法、椭圆型方程的差分解法、抛物型方程的差分解法、双曲型方程的差分解法、高维方程的交替方向法和有限元方法简介. 力求做到: (a) 精选内容. 重点介绍有限差分方法. (b) 难点分散. 对于差分方法, 先从常微分方程两点边值问题出发, 介绍差分方法的有关概念以及常用的分析技巧, 然后将这些概念和技巧分别应用到椭圆型方程、抛物型方程和双曲型方程的数值求解. 对于有限元方法, 也先从常微分方程两点边值问题出发, 介绍有限元方法的基本思想, 再研究椭圆型方程的有限元解法. (c) 强调会“用”各种数值方法. 先举例示范, 再要求学生模仿, 最后到熟练掌握. 书末的两个附录分别介绍获得微分方程问题解的先验估计式的能量方法和获得差分方程解的先验估计式的有限 Fourier 级数法.

本书是“信息与计算科学”及“数学与应用数学”专业的基础课教材, 亦可作为高等学校数学及其他专业研究生的教学用书.

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程数值解法/孙志忠编著. —北京: 科学出版社, 2005. 1

21 世纪高等院校教材

ISBN 978-7-03-014403-4

I. 偏… II. 孙… III. 偏微分方程-数值计算-高等学校-教材 IV. O241. 82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004) 第 102462 号

责任编辑: 杨 波 赵 靖 / 责任校对: 陈丽珠

责任印制: 张克忠 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005 年 1 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2007 年 7 月第三次印刷 印张: 16 3/4

印数: 5 501—7 000 字数: 320 000

定价: **25.00 元**

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

作者简介



孙志忠, 男, 1963 年 3 月生. 1984 年、1987 年先后在南京大学获得学士学位、硕士学位. 1990 年在中国科学院计算中心 (现为计算数学与科学工程计算研究所) 获得博士学位. 1990 年至今在东南大学数学系任教. 现为教授, 博士生导师, 计算数学教研室主任. 曾获东南大学教学工作优秀特别奖以及全国大学生数学建模竞赛优秀教练员称号.

孙志忠教授的专业为计算数学与科学工程计算, 研究方向为偏微分方程数值解法中的差分方法理论. 主持完成国家自然科学基金项目和江苏省自然科学基金项目各一项. 正在主持国家自然科学基金项目一项. 在“Numer. Math.”, “Math. Comp.”, “Appl. Numer. Math.”, “Numer. Methods Partial Differential Eq.”, “J. Comp. Appl. Math.”, “J. Comp. Math.”, 《计算数学》, 《应用数学学报》等国内外核心刊物上发表研究论文 30 余篇. 主持完成校重点课程建设项目和重点教材建设项目各一项. 负责的工科研究生数值分析课程 2002 年被评为江苏省研究生培养创新工程优秀研究生课程. 出版教材《计算方法与实习》、《计算方法典型例题分析》、《数值分析》、《数值分析全真试题解析》和《偏微分方程数值解法》. 其中《计算方法与实习》被评为 2001 年度全国优秀畅销书, 《数值分析》在 2003 年被评为东南大学优秀研究生教材.

前 言

现代科学、技术、工程中的大量数学模型都可以用微分方程来描述,很多近代自然科学的基本方程本身就是微分方程.绝大多数微分方程(特别是偏微分方程)定解问题的解很难以实用的解析形式来表示.在科学的计算机化进程中,科学与工程计算作为一门工具性、方法性、边缘交叉性的新学科开始了自己的新发展,微分方程数值解法也得到了前所未有的发展和应用.由于科学基本规律大多是通过微分方程来描述的,科学与工程计算的主要任务就是求解形形色色的微分方程定解问题.因此,今天需要掌握和应用微分方程数值解法的已不再限于数学系的学生,大量从事力学、物理学、天文学的科研人员,电子、电机、机械、动力、航空、航天、土木、地质勘探、油田开发等领域的工程技术人员也把这门学科作为自己领域的一种主要研究手段.

作为微分方程数值解法入门性质的教材,本书力求具有如下4个方面的特点:一是精选内容,重点介绍有限差分方法,简单介绍有限元方法.对于微分方程定解问题的每一个差分方法,基本上按照(1)差分格式的建立;(2)差分格式的求解;(3)算例;(4)差分格式解的先验估计;(5)差分格式的可解性、收敛性和稳定性等5个方面展开.前3个方面是基本的,理论分析的重点是差分格式解的先验估计,有了先验估计,可解性、收敛性和稳定性是很容易得到的.对有限元方法作了一个简单的介绍,按(1)变分原理;(2)Ritz-Galerkin方法;(3)区域剖分及基函数的性质;(4)有限元方程;(5)有限元方程的求解;(6)算例等6个方面展开.重点告诉学生如何应用有限元方法,而不涉及有限元方法的理论分析.二是难点分散,多条“平行线展开”.先对简单问题介绍微分方程数值解法中的常用研究方法,然后将这些研究方法逐个应用到较复杂的问题上.三是强调会“用”各种数值方法.先举例示范,再要求学生模仿,在计算机上算出数值结果,对结果作出分析,最后熟练掌握所学各种方法.四是在每章的小结与拓展中给学有余力的同学留下较多的可进一步钻研的空间.

我的研究生李福乐、刘剑明、李雪玲、吴静宇帮助作了部分数值计算、绘图及文字排版工作,作者向他们致以谢意.

吴宏伟老师应用本书的初稿在我校信息与计算科学专业 01 级本科生 48 学时的微分方程数值解课程中试用,并提出了宝贵意见.

我也应用本书的初稿在我校计算数学专业 03 级硕士研究生 60 学时的微分方程数值解课程中试用. 要求学生将 2.4 节、3.6 节、4.3 节、5.4 节、6.3 节的有关结论给出详细的推演过程,并作研讨.

讲完全书基本内容约需 45 至 55 学时.

附录 A 可加深对课程内容的理解,老师在讲解有关章节前可布置学生自学. 附录 B 为扩大学生知识面而写,给学有余力的同学提供一些学习素材.

感谢东南大学数学系、教务处的领导对撰写本书的关心和鼓励. 感谢科学出版社的编辑对本书的出版付出的辛勤劳动.

诚望各位专家及广大读者提供宝贵意见. E-mail 地址: zzsun@seu.edu.cn.

孙志忠

2004 年 6 月

目 录

第 1 章 常微分方程两点边值问题的差分解法	1
1.1 Dirichlet 边值问题	1
1.1.1 差分格式的建立	2
1.1.2 差分格式的求解	3
1.1.3 差分格式解的先验估计式	8
1.1.4 差分格式解的存在性、收敛性和稳定性	11
1.1.5 Richardson 外推法	13
1.1.6 紧差分格式	15
1.2 导数边界值问题	18
1.2.1 差分格式的建立	18
1.2.2 差分格式的求解	20
小结与拓展	25
习题 1	25
第 2 章 椭圆型方程的差分解法	28
2.1 Dirichlet 边值问题	28
2.1.1 差分格式的建立	29
2.1.2 差分格式的求解	31
2.1.3 差分格式解的先验估计式	36
2.1.4 差分格式解的存在性、稳定性和收敛性	37
2.1.5 Richardson 外推法	39
2.2 紧差分格式	42
2.2.1 差分格式的建立	42
2.2.2 差分格式的求解	44

2.2.3 差分格式解的先验估计式	49
2.2.4 差分格式解的存在性、稳定性和收敛性	51
2.3 导数边界值问题	52
2.3.1 差分格式的建立	53
2.3.2 差分格式的求解	55
2.4 双调和方程边值问题	58
小结与拓展	59
习题 2	60
第 3 章 抛物型方程的差分解法	63
3.1 向前 Euler 格式	63
3.1.1 差分格式的建立	65
3.1.2 差分格式的求解	66
3.1.3 差分格式解的先验估计式	70
3.1.4 差分格式解的存在性、收敛性和稳定性	71
3.2 向后 Euler 格式	73
3.2.1 差分格式的建立	74
3.2.2 差分格式的求解	75
3.2.3 差分格式解的先验估计式	79
3.2.4 差分格式解的存在性、收敛性和稳定性	80
3.3 Richardson 格式	82
3.3.1 差分格式的建立	82
3.3.2 差分格式的求解	83
3.3.3 差分格式的不稳定性	85
3.4 Crank-Nicolson 格式	86
3.4.1 差分格式的建立	86
3.4.2 差分格式的求解	88
3.4.3 差分格式解的先验估计式	92

3.4.4	差分格式解的存在性、收敛性和稳定性	94
3.4.5	Richardson 外推法	95
3.5	紧差分格式	97
3.5.1	差分格式的建立	98
3.5.2	差分格式的求解	100
3.5.3	差分格式解的先验估计式	104
3.5.4	差分格式解的存在性、收敛性和稳定性	106
3.6	导数边界值问题	107
	小结与拓展	109
	习题 3	110
第 4 章	双曲型方程的差分解法	120
4.1	显式差分格式	120
4.1.1	差分格式的建立	120
4.1.2	差分格式的求解	123
4.1.3	差分格式解的先验估计式	127
4.1.4	差分格式解的存在性、收敛性和稳定性	131
4.2	隐式差分格式	133
4.2.1	差分格式的建立	133
4.2.2	差分格式的求解	135
4.2.3	差分格式解的先验估计式	139
4.2.4	差分格式解的存在性、收敛性和稳定性	141
4.3	紧差分格式	144
	小结与拓展	147
	习题 4	147
第 5 章	高维方程的交替方向法	155
5.1	二维抛物型方程的交替方向隐格式	155
5.1.1	差分格式的建立	156
5.1.2	差分格式的求解	159

5.1.3	差分格式解的先验估计式	164
5.1.4	差分格式解的存在性、收敛性和稳定性	165
5.2	二维双曲型方程的交替方向隐格式	166
5.2.1	差分格式的建立	166
5.2.2	差分格式的求解	168
5.2.3	差分格式解的先验估计式	172
5.2.4	差分格式解的存在性、收敛性和稳定性	174
5.3	二维抛物型方程的紧交替方向隐格式	176
5.3.1	差分格式的建立	176
5.3.2	差分格式的求解	179
5.3.3	差分格式解的先验估计式	182
5.3.4	差分格式解的存在性、收敛性和稳定性	185
5.4	二维双曲型方程的紧交替方向隐格式	187
	小结与拓展	189
	习题 5	189
第 6 章	有限元方法简介	193
6.1	常微分方程边值问题的有限元解法	193
6.1.1	变分原理	194
6.1.2	Ritz-Galerkin 方法	197
6.1.3	有限元方法	202
6.2	椭圆型方程边值问题的有限元解法	211
6.2.1	变分原理	211
6.2.2	Ritz-Galerkin 方法	213
6.2.3	有限元方法	218
6.3	抛物型方程初边值问题的有限元解法	228
	小结与拓展	230

习题 6	231
参考文献	233
附录 A 微分方程问题解的先验估计式——能量方法	234
A.1 基本微分不等式	234
A.2 两点边值问题解的先验估计式	236
A.3 椭圆型方程第一边值问题解的先验估计式	237
A.4 抛物型方程第一边值问题解的先验估计式	238
A.5 双曲型方程第一边值问题解的先验估计式	240
小结与拓展	242
附录 B 差分方程解的先验估计式——有限 Fourier 级数	243
B.1 有限 Fourier 级数	243
B.2 两点边值问题差分解的先验估计式	246
B.3 抛物型方程第一边值问题差分解的先验估计式	248
B.4 双曲型方程第一边值问题差分解的先验估计式	250
小结与拓展	254

第 1 章 常微分方程两点边值问题的差分解法

有限差分方法是用于微分方程定解问题求解的最广泛的数值方法, 其基本思想是用离散的只含有有限个未知量的差分方程组去近似代替连续变量的微分方程和定解条件, 并把差分方程组的解作为微分方程定解问题的近似解. 常微分方程两点边值问题可以看成一维椭圆型方程定解问题, 模型简单. 本章研究此模型问题的差分解法, 介绍微分方程数值解法中的一些基本概念, 分析差分格式的能量方法和提高数值解精度的 Richardson 外推法.

1.1 Dirichlet 边值问题

考虑如下定解问题:

$$-u'' + q(x)u = f(x), \quad a < x < b, \quad (1.1-1)$$

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta, \quad (1.1-2)$$

其中 $q(x) \geq 0$, $f(x)$ 为已知函数, α 和 β 为已知常数.

当 $q(x) \equiv 0$ 时, 对方程 (1.1-1) 的两边积分两次, 可得其解, 表示为

$$u(x) = \alpha + \left[\beta - \alpha + \int_a^b (b-s)f(s)ds \right] \frac{x-a}{b-a} - \int_a^x (x-s)f(s)ds.$$

要想求出某点处的值还需要借助于数值积分. 当 $q(x) \neq 0$ 时, 用同样的方法要得到解的精确表达式是困难的, 甚至是办不到的. 读者可对 $q(x) \equiv 1$ 的情形试一试. 这就促使人们换个思路去寻找近似解 (数值解).

首先我们列出几个常用的公式. 设 $g(x)$ 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上具有所需的连续导数, 则有

$$g(x_0) = \frac{1}{2} [g(x_0 - h) + g(x_0 + h)] - \frac{h^2}{2} g''(\xi_0), \quad x_0 - h < \xi_0 < x_0 + h; \quad (1.2-1)$$

$$g'(x_0) = \frac{1}{h} [g(x_0 + h) - g(x_0)] - \frac{h}{2} g''(\xi_1), \quad x_0 < \xi_1 < x_0 + h; \quad (1.2-2)$$

$$g'(x_0) = \frac{1}{h} [g(x_0) - g(x_0 - h)] + \frac{h}{2} g''(\xi_2), \quad x_0 - h < \xi_2 < x_0; \quad (1.2-3)$$

$$g'(x_0) = \frac{1}{h} \left[g\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - g\left(x_0 - \frac{h}{2}\right) \right] - \frac{h^2}{24} g'''(\xi_3),$$

$$x_0 - \frac{h}{2} < \xi_3 < x_0 + \frac{h}{2}; \quad (1.2-4)$$

$$g''(x_0) = \frac{1}{h^2} [g(x_0 + h) - 2g(x_0) + g(x_0 - h)] - \frac{h^2}{12} g^{(4)}(\xi_4),$$

$$x_0 - h < \xi_4 < x_0 + h. \quad (1.2-5)$$

应用 Taylor 公式很容易得到 (1.2-1)~(1.2-5) 式.

1.1.1 差分格式的建立

本书无特殊说明, 均假设所考虑的微分方程定解问题存在具有所需阶数的光滑解.

用有限差分法解两点边值问题的第一步是将求解区间 $[a, b]$ 进行 **网格剖分**. 将区间 $[a, b]$ 作 m 等分, 记 $h = (b-a)/m$, $x_i = a + ih$, $0 \leq i \leq m$, $\Omega_h = \{x_i | 0 \leq i \leq m\}$. 称 h 为 **网格步长**, x_i 为 **网格结点**, Ω_h 为 **网格**, 称定义在网格 Ω_h 上的函数为 **网格函数**. 设 $v = \{v_i | 0 \leq i \leq m\}$ 为 Ω_h 上的网格函数, 记

$$\delta_x v_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h} (v_{i+1} - v_i), \quad \delta_x^2 v_i = \frac{1}{h} \left(\delta_x v_{i+\frac{1}{2}} - \delta_x v_{i-\frac{1}{2}} \right),$$

$$D_+ v_i = \frac{1}{h} (v_{i+1} - v_i), \quad D_- v_i = \frac{1}{h} (v_i - v_{i-1}).$$

现在我们在网格结点上考虑定解问题 (1.1-1) 和 (1.1-2), 有

$$-u''(x_i) + q(x_i)u(x_i) = f(x_i), \quad 1 \leq i \leq m-1,$$

$$u(x_0) = \alpha, \quad u(x_m) = \beta. \quad (1.3)$$

定义网格函数 $U = \{U_i | 0 \leq i \leq m\}$:

$$U_i = u(x_i), \quad 0 \leq i \leq m.$$

由 (1.2-5), 有

$$u''(x_i) = \frac{1}{h^2} [u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})] - \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\xi_i)$$

$$= \delta_x^2 U_i - \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\xi_i), \quad x_{i-1} < \xi_i < x_{i+1}.$$

将上式代入到 (1.3), 可得

$$-\delta_x^2 U_i + q(x_i)U_i = f(x_i) - \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\xi_i), \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad (1.4-1)$$

$$U_0 = \alpha, \quad U_m = \beta. \quad (1.4-2)$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha \\ h^2 f(x_1) \\ \vdots \\ h^2 f(x_{m-1}) \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

或

$$\begin{pmatrix} 2+h^2q(x_1) & -1 & & & & \\ -1 & 2+h^2q(x_2) & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2+h^2q(x_{m-2}) & -1 \\ & & & & -1 & 2+h^2q(x_{m-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{m-2} \\ u_{m-1} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} h^2 f(x_1) + \alpha \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ h^2 f(x_{m-2}) \\ h^2 f(x_{m-1}) + \beta \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

上述方程组的系数矩阵是三对角的, 称其为 **三对角方程组**.

对于三对角方程组可采用如下追赶法 (又称为 Thomas 算法) 求解. 已知三对角方程组

$$\begin{aligned} \beta_l u_l + \gamma_l u_{l+1} &= d_l, \\ \alpha_{l+1} u_l + \beta_{l+1} u_{l+1} + \gamma_{l+1} u_{l+2} &= d_{l+1}, \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_{n-1} u_{n-2} + \beta_{n-1} u_{n-1} + \gamma_{n-1} u_n &= d_{n-1}, \\ \alpha_n u_{n-1} + \beta_n u_n &= d_n. \end{aligned} \quad (1.9)$$

从 (1.9) 的第一个方程解出 u_l , 得到

$$u_l = \frac{d_l}{\beta_l} - \frac{\gamma_l}{\beta_l} u_{l+1}.$$

记

$$g_l = \frac{d_l}{\beta_l}, \quad w_l = \frac{\gamma_l}{\beta_l}, \quad (1.10)$$

则有

$$u_l = g_l - w_l u_{l+1}. \quad (1.11)$$

将此式代入到 (1.9) 的第二个方程, 得到

$$\alpha_{l+1}(g_l - w_l u_{l+1}) + \beta_{l+1} u_{l+1} + \gamma_{l+1} u_{l+2} = d_{l+1}.$$

即

$$u_{l+1} = g_{l+1} - w_{l+1} u_{l+2},$$

其中

$$g_{l+1} = \frac{d_{l+1} - \alpha_{l+1} g_l}{\beta_{l+1} - \alpha_{l+1} w_l}, \quad w_{l+1} = \frac{\gamma_{l+1}}{\beta_{l+1} - \alpha_{l+1} w_l}.$$

完全类似地, 可得

$$u_i = g_i - w_i u_{i+1}, \quad l+1 \leq i \leq n-1, \quad (1.12)$$

其中

$$g_i = \frac{d_i - \alpha_i g_{i-1}}{\beta_i - \alpha_i w_{i-1}}, \quad w_i = \frac{\gamma_i}{\beta_i - \alpha_i w_{i-1}}. \quad (1.13)$$

将关系式

$$u_{n-1} = g_{n-1} - w_{n-1} u_n$$

代入到 (1.9) 的最后一个方程, 得到

$$\alpha_n(g_{n-1} - w_{n-1} u_n) + \beta_n u_n = d_n.$$

于是

$$u_n = g_n, \quad (1.14)$$

其中

$$g_n = \frac{d_n - \alpha_n g_{n-1}}{\beta_n - \alpha_n w_{n-1}}. \quad (1.15)$$

若 u_n 已求出, 则由 (1.12) 和 (1.11) 可依次求出 $u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_{l+1}, u_l$. 整个求解过程可分为如下两步.

第 1 步 依次确定 $g_l, w_l; g_{l+1}, w_{l+1}; g_{l+2}, w_{l+2}; \dots; g_{n-1}, w_{n-1}; g_n$.

第 2 步 依相反次序确定 $u_n, u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_l$.

计算公式如下:

$$(a) \quad g_l = \frac{d_l}{\beta_l}, \quad w_l = \frac{\gamma_l}{\beta_l},$$

$$g_i = \frac{d_i - \alpha_i g_{i-1}}{\beta_i - \alpha_i w_{i-1}}, \quad w_i = \frac{\gamma_i}{\beta_i - \alpha_i w_{i-1}}, \quad i = l+1, l+2, \dots, n-1,$$

$$g_n = \frac{d_n - \alpha_n g_{n-1}}{\beta_n - \alpha_n w_{n-1}}.$$

$$(b) \quad u_n = g_n,$$

$$u_i = g_i - w_i u_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \dots, l.$$

通常, 第 1 步称为“追”过程, 第 2 步称为“赶”过程, 整个求解过程称为**追赶法**.

若 $l=1, n=N$, 则追赶法总的运算量为 $5N-4$ 次乘除法, $3N-3$ 次加减法.

算例 1.1.1 应用差分格式 (1.6) 计算如下两点边值问题

$$\begin{aligned} -u''(x) + u(x) &= e^x(\sin x - 2 \cos x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0) &= 0, & u(\pi) = 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

该定解问题的精确解为 $u(x) = e^x \sin x$.

将区间 $[0, \pi]$ 作 m 等分, 记 $h = \pi/m$, $x_i = ih$, $0 \leq i \leq m$. 差分格式为

$$\begin{aligned} -\delta_x^2 u_i + u_i &= e^{x_i}(\sin x_i - 2 \cos x_i), & 1 \leq i \leq m-1, \\ u_0 &= 0, & u_m = 0. \end{aligned}$$

表 1.1 列出了 4 个结点处的精确解和取不同步长时所得的数值解. 表 1.2 给出了取不同步长时在这 4 个结点处所得数值解的误差的绝对值和数值解的最大误差

$$E_\infty(h) = \max_{0 \leq i \leq m} |u(x_i) - u_i|.$$

从表 1.2 可以看出, 当步长 h 缩小到原来的 $1/2$ 时, 最大误差约缩小到原来的 $1/4$. 图 1.1 给出了精确解曲线和取 $h = \pi/10$ 时所得数值解曲线. 图 1.2 给出了取不同步长时所得数值解的误差曲线.

表 1.1 算例 1.1.1 部分结点处的精确解和取不同步长时所得的数值解

h	x			
	$\pi/5$	$2\pi/5$	$3\pi/5$	$4\pi/5$
$\pi/10$	1.064007	3.266548	6.166191	7.178725
$\pi/20$	1.092311	3.322830	6.239355	7.237039
$\pi/40$	1.099410	3.336920	6.257628	7.251546
$\pi/80$	1.101186	3.340444	6.262195	7.255169
$\pi/160$	1.101630	3.341320	6.263337	7.256074
精确解	1.101778	3.341619	6.263717	7.256376

表 1.2 算例 1.1.1 取不同步长时部分结点处数值解的误差的绝对值和数值解的最大误差

h	x				$E_\infty(h)$	$E_\infty(2h)/E_\infty(h)$
	$\pi/5$	$2\pi/5$	$3\pi/5$	$4\pi/5$		
$\pi/10$	3.777e-2	7.507e-2	9.753e-2	7.765e-2	9.753e-2	*
$\pi/20$	9.467e-3	1.879e-2	2.436e-2	1.934e-2	2.439e-2	3.999
$\pi/40$	2.368e-3	4.698e-3	6.089e-3	4.829e-3	6.115e-3	3.999
$\pi/80$	5.921e-4	1.175e-3	1.522e-3	1.207e-3	1.529e-3	3.999
$\pi/160$	1.480e-4	2.937e-4	3.806e-4	3.017e-4	3.822e-4	4.001

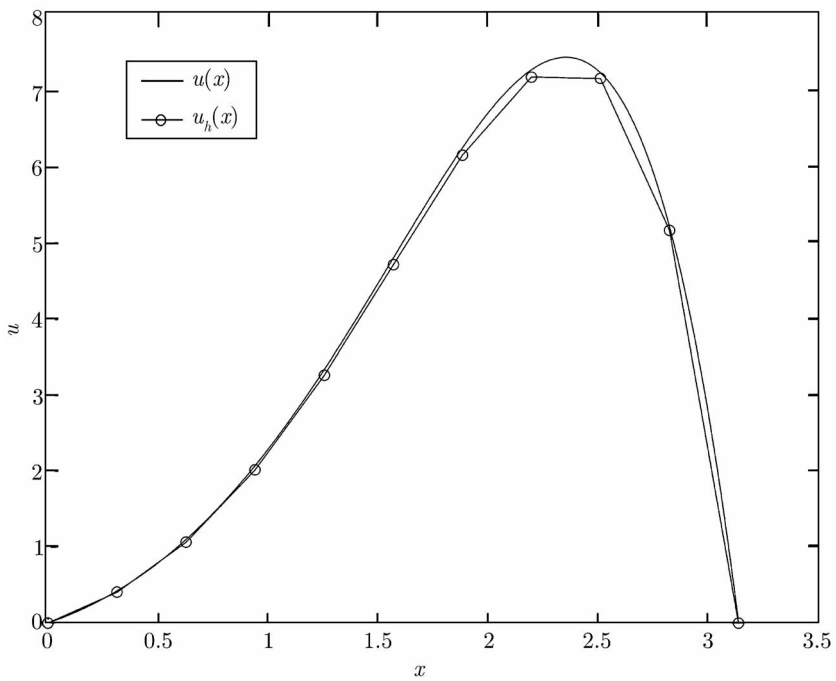
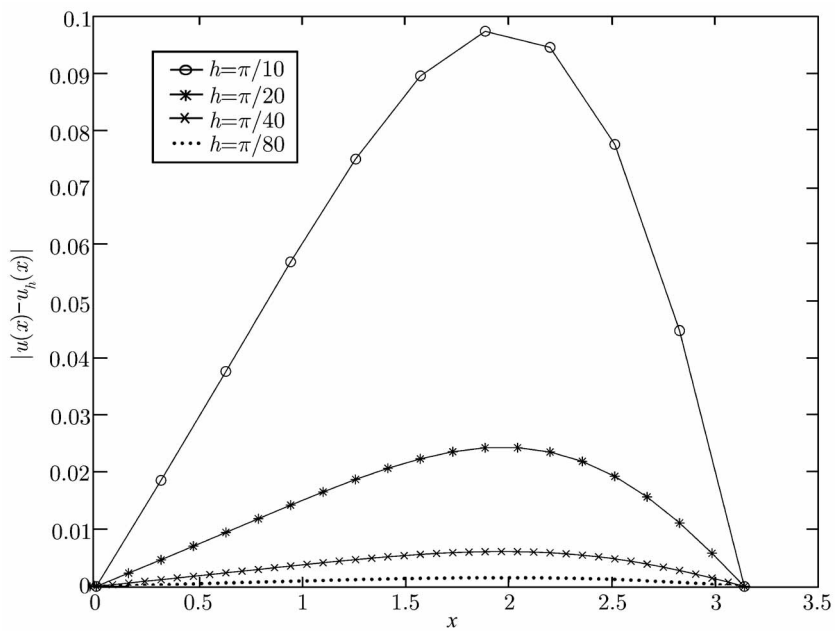
图 1.1 算例 1.1.1 精确解曲线和取步长 $h = \pi/10$ 时数值解曲线

图 1.2 算例 1.1.1 取不同步长时所得数值解的误差曲线

1.1.3 差分格式解的先验估计式

差分格式解的先验估计式在差分格式的分析中起着关键作用.

记

$$V_h = \left\{ v \mid v = \{v_i, |0 \leq i \leq m\} \text{ 为 } \Omega_h \text{ 上的网格函数且 } v_0 = v_m = 0 \right\}.$$

设 $v \in V_h$, 引进如下记号

$$\|v\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq m} |v_i|, \quad \|v\| = \sqrt{h \sum_{i=1}^{m-1} v_i^2},$$

$$|v|_1 = \sqrt{h \sum_{i=1}^m \left(\delta_x v_{i-\frac{1}{2}} \right)^2}, \quad \|v\|_1 = \sqrt{\|v\|^2 + |v|_1^2}.$$

它们均为 V_h 上的范数, 分别称为无穷范数 (一致范数), 2 范数 (L^2 范数, 平均范数), 差商的 2 范数和 H^1 范数.

引理 1.1.1 (1) 设 $u = \{u_i | 0 \leq i \leq m\}$, $v = \{v_i | 0 \leq i \leq m\}$ 为 Ω_h 上的网格函数, 则有

$$-h \sum_{i=1}^{m-1} (\delta_x^2 u_i) v_i = h \sum_{i=1}^m (\delta_x u_{i-\frac{1}{2}}) (\delta_x v_{i-\frac{1}{2}}) + (D_+ u_0) v_0 - (D_- u_m) v_m. \quad (1.17-1)$$

(2) 设 $v \in V_h$, 则有

$$\|v\|_\infty \leq \frac{\sqrt{b-a}}{2} |v|_1, \quad (1.17-2)$$

$$\|v\| \leq \frac{b-a}{\sqrt{6}} |v|_1, \quad (1.17-3)$$

$$h \sum_{i=1}^{m-1} (-\delta_x^2 v_i) v_i = |v|_1^2. \quad (1.17-4)$$

证明 (1)

$$\begin{aligned} & -h \sum_{i=1}^{m-1} (\delta_x^2 u_i) v_i \\ &= - \sum_{i=1}^{m-1} \left(\delta_x u_{i+\frac{1}{2}} - \delta_x u_{i-\frac{1}{2}} \right) v_i \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \left(\delta_x u_{i-\frac{1}{2}} \right) v_i - \sum_{i=1}^{m-1} \left(\delta_x u_{i+\frac{1}{2}} \right) v_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{m-1} \left(\delta_x u_{i-\frac{1}{2}} \right) v_i - \sum_{i=2}^m \left(\delta_x u_{i-\frac{1}{2}} \right) v_{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^m \left(\delta_x u_{i-\frac{1}{2}} \right) (v_i - v_{i-1}) + \left(\delta_x u_{\frac{1}{2}} \right) v_0 - \left(\delta_x u_{m-\frac{1}{2}} \right) v_m \\
&= h \sum_{i=1}^m (\delta_x u_{i-\frac{1}{2}}) (\delta_x v_{i-\frac{1}{2}}) + (D_+ u_0) v_0 - (D_- u_m) v_m.
\end{aligned}$$

(1.17-1) 得证.

(2) 对于 $1 \leq i \leq m-1$, 利用 $v_0 = v_m = 0$, 有

$$\begin{aligned}
v_i &= \sum_{j=1}^i (v_j - v_{j-1}) = h \sum_{j=1}^i \delta_x v_{j-\frac{1}{2}}, \\
v_i &= - \sum_{j=i+1}^m (v_j - v_{j-1}) = -h \sum_{j=i+1}^m \delta_x v_{j-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

将以上二式两边分别平方, 再应用 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得

$$v_i^2 \leq \left(h \sum_{j=1}^i 1^2 \right) h \sum_{j=1}^i (\delta_x v_{j-\frac{1}{2}})^2 = (x_i - a) h \sum_{j=1}^i (\delta_x v_{j-\frac{1}{2}})^2, \quad (1.18-1)$$

$$v_i^2 \leq \left(h \sum_{j=i+1}^m 1^2 \right) h \sum_{j=i+1}^m (\delta_x v_{j-\frac{1}{2}})^2 = (b - x_i) h \sum_{j=i+1}^m (\delta_x v_{j-\frac{1}{2}})^2. \quad (1.18-2)$$

将 (1.18-1) 乘以 $b - x_i$, 将 (1.18-2) 乘以 $x_i - a$, 并将所得结果相加, 得

$$(b-a)v_i^2 \leq (x_i-a)(b-x_i)h \sum_{j=1}^m (\delta_x v_{j-\frac{1}{2}})^2 \leq (x_i-a)(b-x_i)|v|_1^2, \quad 1 \leq i \leq m-1. \quad (1.19)$$

应用

$$(x_i - a)(b - x_i) \leq \frac{(b - a)^2}{4},$$

可得

$$(b - a)v_i^2 \leq \frac{(b - a)^2}{4}|v|_1^2,$$

即

$$|v_i| \leq \frac{\sqrt{b-a}}{2}|v|_1, \quad 1 \leq i \leq m-1.$$

再注意到 $v_0 = 0$, $v_m = 0$, 有

$$\|v\|_\infty \leq \frac{\sqrt{b-a}}{2}|v|_1.$$

将 (1.19) 两边同乘以 h , 并对 i 求和, 得

$$\begin{aligned} (b-a)\|v\|^2 &\leq h \sum_{i=1}^{m-1} (x_i - a)(b - x_i)|v|_1^2 = h \sum_{i=1}^{m-1} (ih) \times ((m-i)h)|v|_1^2 \\ &= h^3 \left(m \sum_{i=1}^{m-1} i - \sum_{i=1}^{m-1} i^2 \right) |v|_1^2 = \frac{1}{6}m(m^2 - 1)h^3|v|_1^2 \\ &\leq \frac{1}{6}(mh)^3|v|_1^2 \leq \frac{1}{6}(b-a)^3|v|_1^2. \end{aligned}$$

由上式易知

$$\|v\| \leq \frac{b-a}{\sqrt{6}}|v|_1.$$

由 (1.17-1) 易知 (1.17-4) 成立.

引理证毕.

定理 1.1.1 设 $v = \{v_i | 0 \leq i \leq m\}$ 为差分格式

$$-\delta_x^2 v_i + q(x_i)v_i = f_i, \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad (1.20-1)$$

$$v_0 = 0, \quad v_m = 0 \quad (1.20-2)$$

的解, 则有

$$|v|_1 \leq \frac{b-a}{\sqrt{6}} \|f\|, \quad (1.21-1)$$

$$\|v\|_\infty \leq \frac{(b-a)^2}{2\sqrt{6}} \max_{1 \leq i \leq m-1} |f_i|, \quad (1.21-2)$$

其中

$$\|f\| = \sqrt{h \sum_{i=1}^{m-1} f_i^2}.$$

证明 将 (1.20-1) 两边同时乘以 $h v_i$, 并对 i 求和, 得

$$h \sum_{i=1}^{m-1} (-\delta_x^2 v_i)v_i + h \sum_{i=1}^{m-1} q(x_i)v_i^2 = h \sum_{i=1}^{m-1} f_i v_i. \quad (1.22)$$

由引理 1.1.1, 有

$$h \sum_{i=1}^{m-1} (-\delta_x^2 v_i)v_i = |v|_1^2.$$

由 $q(x) \geq 0$, 有

$$h \sum_{i=1}^{m-1} q(x_i)v_i^2 \geq 0.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$h \sum_{i=1}^{m-1} f_i v_i \leq \sqrt{h \sum_{i=1}^{m-1} f_i^2} \cdot \sqrt{h \sum_{i=1}^{m-1} v_i^2} = \|f\| \cdot \|v\|.$$

将以上三式代入到 (1.22), 可得

$$|v|_1^2 \leq \|f\| \cdot \|v\|.$$

利用引理 1.1.1, 得

$$|v|_1^2 \leq \|f\| \cdot \frac{b-a}{\sqrt{6}} |v|_1,$$

因而

$$|v|_1 \leq \frac{b-a}{\sqrt{6}} \|f\|.$$

再次利用引理 1.1.1, 可得

$$\|v\|_\infty \leq \frac{\sqrt{b-a}}{2} \cdot |v|_1 \leq \frac{\sqrt{b-a}}{2} \cdot \frac{b-a}{\sqrt{6}} \|f\| \leq \frac{(b-a)^2}{2\sqrt{6}} \max_{1 \leq i \leq m-1} |f_i|.$$

定理证毕.

1.1.4 差分格式解的存在性、收敛性和稳定性

存在性

定理 1.1.2 差分格式 (1.6-1) 和 (1.6-2) 是唯一可解的.

证明 差分格式 (1.6-1) 和 (1.6-2) 是线性的. 考虑其齐次方程组

$$\begin{aligned} -\delta_x^2 u_i + q(x_i) u_i &= 0, & 1 \leq i \leq m-1, \\ u_0 &= 0, & u_m = 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

由定理 1.1.1 知

$$\|u\|_\infty = 0,$$

即

$$u_i = 0, \quad 0 \leq i \leq m.$$

因而差分格式 (1.6-1) 和 (1.6-2) 是唯一可解的. 定理证毕.

收敛性

定理 1.1.3 设 $\{u(x) | a \leq x \leq b\}$ 为定解问题 (1.1-1) 和 (1.1-2) 的解, $\{u_i | 0 \leq i \leq m\}$ 为差分格式 (1.6-1) 和 (1.6-2) 的解. 记

$$e_i = u(x_i) - u_i, \quad 0 \leq i \leq m, \quad (1.24)$$

则有

$$\|e\|_{\infty} \leq \frac{M_4(b-a)^2}{24\sqrt{6}}h^2,$$

其中

$$M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |u^{(4)}(x)|.$$

证明 将 (1.4-1) 和 (1.4-2) 分别与 (1.6-1) 和 (1.6-2) 相减得误差方程

$$\begin{aligned} -\delta_x^2 e_i + q(x_i)e_i &= R_i, & 1 \leq i \leq m-1, \\ e_0 &= 0, & e_m = 0. \end{aligned}$$

由定理 1.1.1, 得

$$\|e\|_{\infty} \leq \frac{(b-a)^2}{2\sqrt{6}} \max_{1 \leq i \leq m-1} |R_i| \leq \frac{M_4(b-a)^2}{24\sqrt{6}}h^2.$$

定理证毕.

定义 1.1.1 如果 $\|e\| = O(h^p)$, 则称差分格式在范数 $\|\cdot\|$ 下是 p 阶收敛的.

由此定义及定理 1.1.3 知, 差分格式 (1.6-1) 和 (1.6-2) 在无穷范数 $\|\cdot\|_{\infty}$ 下是二阶收敛的.

稳定性

实际计算时, 误差是不可避免的. 例如在计算 $f(x_i)$ 时就可能会有一个小的误差 g_i . 设 $v = (v_0, v_1, \dots, v_m)$ 为

$$\begin{aligned} -\delta_x^2 v_i + q(x_i)v_i &= f(x_i) + g_i, & 1 \leq i \leq m-1, \\ v_0 &= \alpha, & v_m = \beta \end{aligned} \quad (1.25)$$

的解. 记

$$\varepsilon_i = v_i - u_i, \quad 0 \leq i \leq m,$$

将 (1.6-1) 和 (1.6-2) 与 (1.25) 相减, 得

$$\begin{aligned} -\delta_x^2 \varepsilon_i + q(x_i)\varepsilon_i &= g_i, & 1 \leq i \leq m-1, \\ \varepsilon_0 &= 0, & \varepsilon_m = 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

称 (1.26) 为 **扰动方程**. 它的形式与 (1.6-1) 和 (1.6-2) 类似. 由定理 1.1.1, 有

$$\|\varepsilon\|_{\infty} \leq \frac{(b-a)^2}{2\sqrt{6}} \max_{1 \leq i \leq m-1} |g_i|.$$

当 $\max_{1 \leq i \leq m-1} |g_i|$ 很小时, $\|\varepsilon\|_{\infty}$ 也很小. 于是我们得到下述定理.

定理 1.1.4 差分格式 (1.6-1) 和 (1.6-2) 在下述意义下对右端函数是稳定的: 设 $\{u_i | 0 \leq i \leq m\}$ 为差分格式

$$\begin{aligned} -\delta_x^2 u_i + q(x_i)u_i &= f_i, & 1 \leq i \leq m-1, \\ u_0 &= 0, & u_m = 0 \end{aligned}$$

的解, 则有

$$\|u\|_{\infty} \leq \frac{(b-a)^2}{2\sqrt{6}} \max_{1 \leq i \leq m-1} |f_i|.$$

1.1.5 Richardson 外推法

设未知量 p 的一个近似式为 $p_0(h)$. 当 $h \rightarrow 0$ 时, 其误差阶为 $O(h^2)$, 并且 p 与 $p_0(h)$ 之间的关系可表示为

$$p = p_0(h) + \alpha h^2 + O(h^4), \quad (1.27)$$

其中 α 的值与 h 无关.

在 (1.27) 中用 $h/2$ 代替 h , 得

$$p = p_0\left(\frac{h}{2}\right) + \alpha \left(\frac{h}{2}\right)^2 + O\left(\left(\frac{h}{2}\right)^4\right). \quad (1.28)$$

$p_0(h/2)$ 也是 p 的一个二阶近似值. 现在用 $4/3$ 乘以 (1.28) 的两端, 用 $1/3$ 乘以 (1.27) 的两端, 并将结果相减, 可得

$$p = \frac{4}{3}p_0\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3}p_0(h) + O(h^4).$$

若记

$$p_1(h) = \frac{4}{3}p_0\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3}p_0(h), \quad (1.29)$$

则有

$$p = p_1(h) + O(h^4).$$

即若取 $p_1(h)$ 作为 p 的又一近似值, 它比 $p_0(h)$ 和 $p_0(h/2)$ 具有更高的误差阶. 我们把 (1.29) 称为 **Richardson 外推公式**, 而这种从低精度的近似值 $p_0(h)$ 和 $p_0(h/2)$ 经过线性组合得到高精度近似值的方法称为 **Richardson 外推法**. 在差分方法中, 外推法也是很有效的. 记 h 为步长, 所得差分格式 (1.6-1) 和 (1.6-2) 的解为 $u_i(h)$, $0 \leq i \leq m$. 我们有如下定理.

定理 1.1.5 设两点边值问题

$$\begin{aligned} -w''(x) + q(x)w(x) &= -\frac{1}{12}u^{(4)}(x), & a < x < b, \\ w(a) &= 0, & w(b) &= 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

具有光滑解, 则

$$\max_{0 \leq i \leq m} \left| u(x_i) - \left[\frac{4}{3}u_{2i}\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3}u_i(h) \right] \right| = O(h^4),$$

其中 $h = (b - a)/m$, $x_i = a + ih$, $0 \leq i \leq m$.

证明 由 Taylor 展开式, 可得

$$u''(x_i) = \delta_x^2 U_i - \frac{h^2}{12} u^{(4)}(x_i) - \frac{h^4}{360} u^{(6)}(\eta_i), \quad \eta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}).$$

于是 (1.4-1) 和 (1.4-2) 可写为

$$\begin{aligned} -\delta_x^2 U_i + q(x_i)U_i &= f(x_i) - \frac{h^2}{12} u^{(4)}(x_i) - \frac{h^4}{360} u^{(6)}(\eta_i), \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ U_0 &= \alpha, \quad U_m = \beta. \end{aligned} \quad (1.31)$$

将 (1.31) 与 (1.6-1) 和 (1.6-2) 相减, 得到如下误差方程

$$\begin{aligned} -\delta_x^2 e_i + q(x_i)e_i &= -\frac{h^2}{12} u^{(4)}(x_i) - \frac{h^4}{360} u^{(6)}(\eta_i), \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ e_0 &= 0, \quad e_m = 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

对 (1.30) 构造差分格式

$$\begin{aligned} -\delta_x^2 w_i + q(x_i)w_i &= -\frac{1}{12} u^{(4)}(x_i), \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ w_0 &= 0, \quad w_m = 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

由定理 1.1.3, 有

$$\max_{1 \leq i \leq m-1} |w(x_i) - w_i(h)| \leq \frac{(b-a)^2}{24\sqrt{6}} \max_{a \leq x \leq b} |w^{(4)}(x)| h^2,$$

即

$$w(x_i) = w_i(h) + O(h^2), \quad 1 \leq i \leq m-1. \quad (1.34)$$

记

$$r_i = e_i - h^2 w_i,$$

用 h^2 乘以 (1.33), 并将结果与 (1.32) 相减, 得

$$\begin{aligned} -\delta_x^2 r_i + q(x_i)r_i &= -\frac{h^4}{360} u^{(6)}(\eta_i), \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ r_0 &= 0, \quad r_m = 0. \end{aligned}$$

由定理 1.1.1, 有

$$\max_{0 \leq i \leq m} |r_i| \leq \frac{(b-a)^2}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{h^4}{360} \max_{a \leq x \leq b} |u^{(6)}(x)|,$$

即

$$u(x_i) - u_i(h) - h^2 w_i(h) = O(h^4), \quad 1 \leq i \leq m-1. \quad (1.35)$$

由 (1.34) 和 (1.35) 可得

$$u(x_i) = u_i(h) + h^2 w_i(h) + O(h^4) = u_i(h) + h^2 w(x_i) + O(h^4), \quad 1 \leq i \leq m-1.$$

类似地, 可得

$$u(x_i) = u_{2i} \left(\frac{h}{2} \right) + \left(\frac{h}{2} \right)^2 w(x_i) + O(h^4), \quad 1 \leq i \leq m-1.$$

由以上两式有

$$u(x_i) = \frac{4}{3} u_{2i} \left(\frac{h}{2} \right) - \frac{1}{3} u_i(h) + O(h^4), \quad 1 \leq i \leq m-1.$$

定理证毕.

算例 1.1.2 用外推方法计算算例 1.1.1 所给两点边值问题.

表 1.3 给出了最大误差

$$\hat{E}_\infty(h) = \max_{1 \leq i \leq m-1} \left| u(x_i) - \left[\frac{4}{3} u_{2i} \left(\frac{h}{2} \right) - \frac{1}{3} u_i(h) \right] \right|.$$

表 1.3 算例 1.1.2 取不同步长时数值解的最大误差

h	$\hat{E}_\infty(h)$	$\hat{E}_\infty(2h)/\hat{E}_\infty(h)$
$\pi/10$	1.009e-4	*
$\pi/20$	6.846e-6	14.74
$\pi/40$	4.308e-7	15.89
$\pi/80$	2.697e-8	15.97
$\pi/160$	1.689e-9	15.97
$\pi/320$	9.588e-11	17.62

1.1.6 紧差分格式

令

$$v(x) = u''(x), \quad (1.36)$$

则由 (1.1-1), 有

$$v(x) = q(x)u(x) - f(x). \quad (1.37)$$

定义网格函数

$$U_i = u(x_i), \quad V_i = v(x_i), \quad 0 \leq i \leq m.$$

由 Taylor 展开式, 可得

$$\begin{aligned}
u''(x_i) &= \delta_x^2 U_i - \frac{h^2}{12} u^{(4)}(x_i) - \frac{h^4}{360} u^{(6)}(\eta_i), \\
&= \delta_x^2 U_i - \frac{h^2}{12} v''(x_i) - \frac{h^4}{360} u^{(6)}(\eta_i), \\
&= \delta_x^2 U_i - \frac{h^2}{12} \left[\delta_x^2 V_i - \frac{h^2}{12} v^{(4)}(\xi_i) \right] - \frac{h^4}{360} u^{(6)}(\eta_i), \\
&= \delta_x^2 U_i - \frac{1}{12} (V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1}) + \left[\frac{1}{144} u^{(6)}(\xi_i) - \frac{1}{360} u^{(6)}(\eta_i) \right] h^4,
\end{aligned}$$

其中 $\xi_i, \eta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$.

将上式代入到 (1.3) 并应用 (1.37), 可得

$$\begin{aligned}
& -\delta_x^2 U_i + \frac{1}{12} [q(x_{i-1})U_{i-1} + 10q(x_i)U_i + q(x_{i+1})U_{i+1}] \\
&= \frac{1}{12} [f(x_{i-1}) + 10f(x_i) + f(x_{i+1})] + \left[\frac{1}{144} u^{(6)}(\xi_i) - \frac{1}{360} u^{(6)}(\eta_i) \right] h^4, \\
& \qquad \qquad \qquad 1 \leq i \leq m-1,
\end{aligned}$$

$$U_0 = \alpha, \quad U_m = \beta.$$

忽略小量项 $\left[\frac{1}{144} u^{(6)}(\xi_i) - \frac{1}{360} u^{(6)}(\eta_i) \right] h^4$, 用 u_i 代替 U_i , 得到如下差分格式

$$\begin{aligned}
& -\delta_x^2 u_i + \frac{1}{12} [q(x_{i-1})u_{i-1} + 10q(x_i)u_i + q(x_{i+1})u_{i+1}] \\
&= \frac{1}{12} [f(x_{i-1}) + 10f(x_i) + f(x_{i+1})], \quad 1 \leq i \leq m-1, \\
& u_0 = \alpha, \quad u_m = \beta.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

可以证明差分格式 (1.38) 是唯一可解的, 在无穷范数下是四阶收敛的且是稳定的.

用 x_{i-1}, x_i, x_{i+1} 三点所构造的差分格式中差分格式 (1.38) 的精度达到最高阶 $O(h^4)$, 称其为 **紧差分格式**.

算例 1.1.3 应用差分格式 (1.38) 计算算例 1.1.1 所给的两点边值问题.

将区间 $[0, \pi]$ 作 m 等分, 记 $h = \pi/m$, $x_i = ih$, $0 \leq i \leq m$. 差分格式为

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + \frac{1}{12} (u_{i-1} + 10u_i + u_{i+1}) \\
&= \frac{1}{12} [e^{x_{i-1}} (\sin x_{i-1} - 2 \cos x_{i-1}) + 10e^{x_i} (\sin x_i - 2 \cos x_i) \\
& \quad + e^{x_{i+1}} (\sin x_{i+1} - 2 \cos x_{i+1})], \quad 1 \leq i \leq m-1, \\
& u_0 = 0, \quad u_m = 0.
\end{aligned}$$

表 1.4 列出了 4 个结点处的精确解和取不同步长时所得的数值解. 表 1.5 给出了取不同步长时在这 4 个结点处所得数值解的误差的绝对值和数值解的最大误差

$$E_\infty(h) = \max_{0 \leq i \leq m} |u(x_i) - u_i|.$$

从表 1.5 可以看出, 当步长 h 缩小到原来的 $1/2$ 时, 最大误差约缩小到原来的 $1/16$. 图 1.3 给出了精确解曲线和取 $h = \pi/10$ 时所得数值解曲线. 由于数值解的相对误差只有万分之一左右, 数值解曲线和精确解曲线几乎重合. 图 1.4 给出了取不同步长时所得数值解的误差曲线.

表 1.4 算例 1.1.3 部分结点处的精确解和取不同步长时所得的数值解

h	x			
	$\pi/5$	$2\pi/5$	$3\pi/5$	$4\pi/5$
$\pi/10$	1.101789	3.341453	6.263188	7.255585
$\pi/20$	1.101778	3.341608	6.263684	7.256326
$\pi/40$	1.101778	3.341618	6.263715	7.256373
$\pi/80$	1.101778	3.341618	6.263717	7.256376
$\pi/160$	1.101778	3.341619	6.263717	7.256376
精确解	1.101778	3.341619	6.263717	7.256376

表 1.5 算例 1.1.3 取不同步长时部分结点处数值解的误差的绝对值和数值解的最大误差

h	x				$E_\infty(h)$	$E_\infty(2h)/E_\infty(h)$
	$\pi/5$	$2\pi/5$	$3\pi/5$	$4\pi/5$		
$\pi/10$	1.105e-5	1.658e-4	5.289e-4	7.910e-4	7.910e-4	*
$\pi/20$	5.547e-7	1.063e-5	3.339e-5	4.971e-5	4.971e-5	15.91
$\pi/40$	3.253e-8	6.685e-7	2.093e-6	3.111e-6	3.111e-6	15.98
$\pi/80$	2.000e-9	4.185e-8	1.309e-7	1.945e-7	1.946e-7	15.99
$\pi/160$	1.246e-10	2.616e-9	8.180e-9	1.216e-8	1.216e-8	16.00

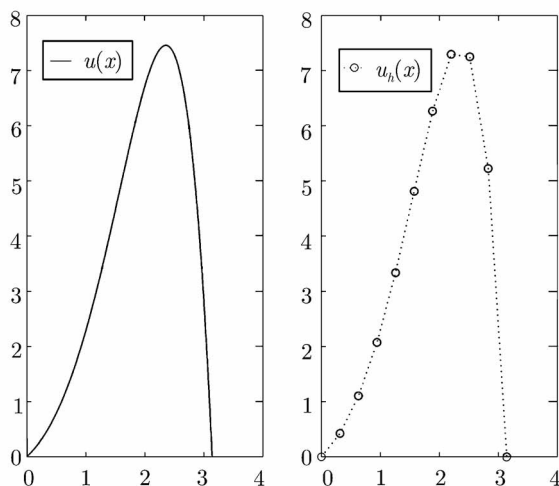


图 1.3 算例 1.1.3 精确解曲线和取 $h = \pi/10$ 时所得数值解曲线

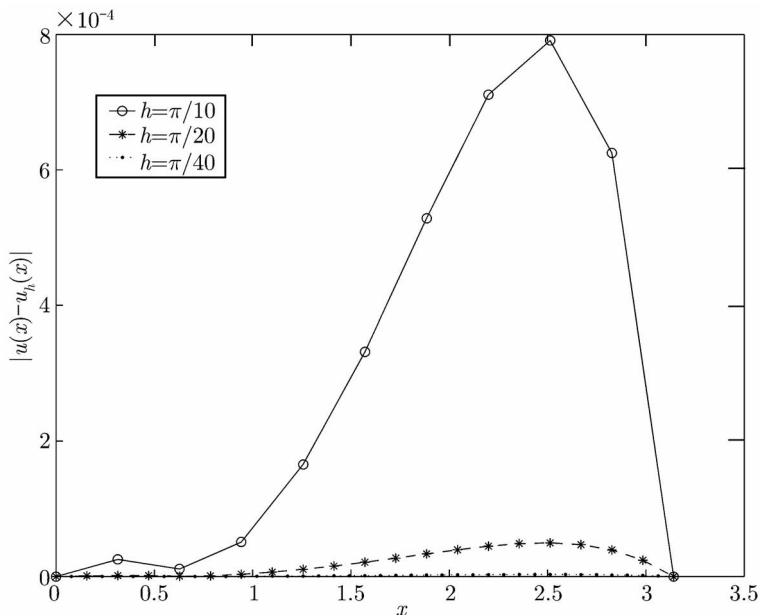


图 1.4 算例 1.1.3 取不同步长时所得数值解的误差曲线

1.2 导数边界值问题

考虑如下导数边界值问题

$$-u''(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad a < x < b, \quad (1.39-1)$$

$$-u'(a) + \lambda_1 u(a) = \alpha, \quad u'(b) + \lambda_2 u(b) = \beta, \quad (1.39-2)$$

其中 $q(x) \geq 0$, $f(x)$ 为已知连续函数, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, α, β 为已知常数, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ 和 $q(x) \equiv 0$ 不同时成立.

1.2.1 差分格式的建立

在结点处考虑 (1.39-1) 和 (1.39-2), 有

$$-u''(x_i) + q(x_i)u(x_i) = f(x_i), \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad (1.40-1)$$

$$-u'(x_0) + \lambda_1 u(x_0) = \alpha, \quad u'(x_m) + \lambda_2 u(x_m) = \beta. \quad (1.40-2)$$

对于 (1.40-1), 应用

$$u''(x_i) = \delta_x^2 U_i - \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\xi_i), \quad 1 \leq i \leq m-1,$$

对于 (1.40-2), 应用

$$u'(x_0) = \frac{u(x_1) - u(x_0)}{h} - \frac{h}{2}u''(\xi_0) = D_+U_0 - \frac{h}{2}u''(\xi_0), \quad \xi_0 \in (x_0, x_1),$$

$$u'(x_m) = \frac{u(x_m) - u(x_{m-1})}{h} + \frac{h}{2}u''(\xi_m) = D_-U_m + \frac{h}{2}u''(\xi_m), \quad \xi_m \in (x_{m-1}, x_m),$$

有

$$\begin{aligned} -\delta_x^2 U_i + q(x_i)u(x_i) &= f(x_i) - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_i), \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ -D_+U_0 + \lambda_1 u(x_0) &= \alpha - \frac{h}{2}u''(\xi_0), \\ D_-U_m + \lambda_2 u(x_m) &= \beta - \frac{h}{2}u''(\xi_m). \end{aligned} \quad (1.41)$$

忽略小量项, 可得

$$\begin{aligned} -\delta_x^2 U_i + q(x_i)u(x_i) &\approx f(x_i), \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ -D_+U_0 + \lambda_1 u(x_0) &\approx \alpha, \quad D_-U_m + \lambda_2 u(x_m) \approx \beta. \end{aligned} \quad (1.42)$$

在上式中用 u_i 代替 $u(x_i)$, 并用 “=” 代替 “ \approx ”, 可得如下差分格式

$$-\delta_x^2 u_i + q(x_i)u_i = f(x_i), \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad (1.43-1)$$

$$-D_+u_0 + \lambda_1 u_0 = \alpha, \quad D_-u_m + \lambda_2 u_m = \beta. \quad (1.43-2)$$

(1.43-1) 的截断误差为 $O(h^2)$, 而 (1.43-2) 的截断误差为 $O(h)$.

为了提高导数边界条件的逼近精度, 注意到方程 (1.39-1), 有

$$u''(x_0) = q(x_0)u(x_0) - f(x_0), \quad u''(x_m) = q(x_m)u(x_m) - f(x_m).$$

由 Taylor 展开式, 有

$$\begin{aligned} u'(x_0) &= D_+U_0 - \frac{h}{2}u''(x_0) - \frac{h^2}{6}u'''(\bar{\xi}_0) \\ &= D_+U_0 - \frac{h}{2}[q(x_0)u(x_0) - f(x_0)] - \frac{h^2}{6}u'''(\bar{\xi}_0), \quad x_0 < \bar{\xi}_0 < x_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'(x_m) &= D_-U_m + \frac{h}{2}u''(x_m) - \frac{h^2}{6}u'''(\bar{\xi}_m) \\ &= D_-U_m + \frac{h}{2}[q(x_m)u(x_m) - f(x_m)] - \frac{h^2}{6}u'''(\bar{\xi}_m), \end{aligned}$$

$$x_{m-1} < \bar{\xi}_m < x_m.$$

