

矢量水听器原理 及应用引论

杨德森 洪连进 著



科学出版社
www.sciencep.com

矢量水听器原理 及应用引论

杨德森 洪连进 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

声波是水下远距离信息传播和接收的唯一有效载体。矢量水听器的出现,改变了传统上对水下声信号的接收只能依赖声压标量的状态,而其对水下声矢量信号的接收已显现出越来越大的优势。本书较为系统地描述了水下声矢量信号的特性、测量原理、测量系统及信号处理方法。全书由4章组成,包括声学基本量及相关函数等的基本介绍、水下声矢量信号的获取、水下声矢量信号特性、声矢量信号的检测原理等。书中还给出了一些基于矢量水听器的湖上和海上试验结果以及矢量水听器在工程上应用的实例。

本书是关于矢量水听器及其工程应用的专业书籍,可供水声工程领域的广大科技人员使用,也可作为高等院校和科研院所水声工程专业高年级本科生、研究生的教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

矢量水听器原理及应用引论/杨德森,洪连进著. —北京:科学出版社,2009

ISBN 978-7-03-024851-0

I. 矢… II. ①杨… ②洪… III. 矢量-水听器-研究 IV. TB565

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第104497号

责任编辑:王飞龙 胡 凯/责任校对:陈玉凤

责任印制:钱玉芬/封面设计:王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年6月第 一 版 开本:A5(890×1240)

2009年6月第一次印刷 印张:5 1/2

印数:1—2 000 字数:212 000

定价:38.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈双青〉)

前 言

矢量水听器作为 20 世纪晚期出现的一种新型水下声传感器,可以同步共点地获得声场的标量和矢量信息,增加了信息种类和数量,也拓展了后置信号处理空间,改善了水声系统的性能.同时它又具有良好的低频指向性、抑制各向同性噪声等诸多优点,为解决水声工程中的许多问题提供了新的思路和方法.矢量水听器技术一经出现,就受到了各海洋大国的普遍关注,被广泛应用于海洋开发与研究和现代声纳工程领域,国外文献公开报道称我国为第三个拥有矢量水听器技术的国家.矢量水听器技术已经成为 21 世纪我国水声技术领域最具有发展前景的方向之一.近年来,我国矢量水听器制作工艺日益成熟,同时人们也逐渐认识和了解了其性能和能力.目前水声学各研究领域对矢量水听器的需求日益迫切,极大地促进和推动了矢量水听器技术及声矢量信号处理理论和试验研究的快速发展.在此背景下,作者收集、整理了多年来从事矢量水听器及其在工程应用方面的研究成果,给出了水下声矢量信号的获取、水下声矢量信号特性及处理、水下声矢量信号的检测原理等.书中还给出了一些基于矢量水听器的湖上和海上试验结果以及矢量水听器在工程上应用的实例.本书内容新颖、系统性强,是我国第一部关于矢量水听器技术及工程应用方面的书籍.本书的部分研究成果是在多项国家专项基金(如国家自然科学基金项目(40827003))资助下取得的.

本书由 4 章组成,第 1 章简要回顾了声学基本量及相关函数、谱密度函数等有关概念;第 2 章针对水下声矢量信号的测量,对矢量水听器进行了深入的阐述,并给出了水下声矢量信号的获取方法;第 3 章围绕水下环境噪声谱特性及噪声场中矢量信号的分析,研究了各向同性噪声场中声压和质点振速的时空相关性和环境噪声场中信号的谱;第 4 章深入研究了水下声矢量信号的检测原理,同时还研究了矢量水

听器阵列处理技术, 给出了部分试验研究结果及矢量水听器应用实例, 最后对矢量水听器技术的发展前景进行了展望.

由于作者知识水平和经验有限, 本书的不足之处在所难免, 敬请读者批评指正.

作 者

2009 年 4 月

目 录

前言

| | |
|-------------------------------|----|
| 第 1 章 概述 | 1 |
| 1.1 声学基本量 | 1 |
| 1.2 声矢量的描述 | 5 |
| 1.3 相关函数与谱密度函数 | 7 |
| 1.4 相关函数与谱密度函数的应用 | 21 |
| 1.4.1 自相关函数的应用 | 21 |
| 1.4.2 自谱密度函数的应用 | 25 |
| 1.4.3 互相关函数的应用 | 27 |
| 1.4.4 互谱密度函数的应用 | 29 |
| 1.5 估计方法和误差 | 31 |
| 1.5.1 相关函数的估计方法 | 32 |
| 1.5.2 谱估计方法 | 34 |
| 1.5.3 统计采样误差 | 39 |
| 第 2 章 水下声矢量信号的获取 | 41 |
| 2.1 介质质点振速的测量原理 | 41 |
| 2.2 矢量水听器 | 45 |
| 2.3 矢量水听器的基本参数 | 47 |
| 2.4 振动传感器 | 50 |
| 2.4.1 压电式传感器 | 50 |
| 2.4.2 电容式传感器 | 56 |
| 2.4.3 动圈式磁电传感器 | 62 |
| 2.5 水下复合式矢量水听器 | 65 |
| 2.5.1 压差式矢量水听器 | 68 |
| 2.5.2 复合式同振型矢量水听器 | 75 |

| | | |
|--------------|-------------------------|------------|
| 2.6 | 水下声信号的获取 | 82 |
| 第 3 章 | 水下声矢量信号特性 | 88 |
| 3.1 | 海洋环境噪声谱特性 | 88 |
| 3.2 | 矢量信号处理的相关函数和谱特性 | 90 |
| 3.2.1 | 相关函数 | 90 |
| 3.2.2 | 谱密度函数 | 93 |
| 3.2.3 | 任意一点相干函数 | 94 |
| 3.2.4 | 声场的矢量信号分析 | 96 |
| 3.2.5 | 各向同性噪声场中声压和质点振速的时空相关性 | 100 |
| 3.3 | 环境噪声中信号的谱 | 106 |
| 3.3.1 | 环境噪声场中的相干分量和散射分量的关系 | 106 |
| 3.3.2 | 声压与振速(加速度)分量之间的相位关系 | 108 |
| 第 4 章 | 声矢量信号的检测原理 | 113 |
| 4.1 | 最大似然检测 | 113 |
| 4.2 | 声能流矢量检测器的增益 | 115 |
| 4.2.1 | 各向同性噪声场中声能流矢量检测器的增益 | 115 |
| 4.2.2 | 声能流矢量检测器的增益与时间带宽积的关系 | 118 |
| 4.3 | 最大似然方位估计 | 122 |
| 4.4 | 声能流矢量检测器的频域实现和 DOA 估计 | 126 |
| 4.5 | 矢量水听器阵列处理 | 129 |
| 4.5.1 | 矢量阵波束形成 | 129 |
| 4.5.2 | 矢量阵子空间谱估计 | 131 |
| 4.5.3 | 矢量水听器目标定位 | 132 |
| 4.5.4 | 矢量阵的空间增益 | 134 |
| 4.6 | 部分外场研究结果 | 136 |
| 4.6.1 | 声能流矢量检测器增益的试验结果 | 138 |
| 4.6.2 | 声能流矢量检测器方位估计及 CRB 的试验结果 | 142 |
| 4.6.3 | 多目标方位分辨试验结果 | 146 |
| 4.6.4 | 矢量阵外场试验结果 | 149 |

| | |
|-------------------------|-----|
| 4.7 矢量水听器的部分应用 | 154 |
| 4.8 矢量水听器技术的前景与展望 | 160 |
| 参考文献 | 162 |

第 1 章 概 述

声学是物理学的一个分支, 是一门古老的学科, 同时也是一门发展着的学科. 声学是研究声音的产生、传播、接收及声学现象的发生和处理的学科. 随着科学技术的发展, 它已渗透到其他许多自然科学领域中, 在与其他学科共同发展过程中, 也推动了许多相关学科的产生和发展.

水声学科是声学的的一个分支, 早在 14 世纪人们就试验了声波在水介质中的发生、传播和接收现象. 在第二次世界大战中及后来的冷战时期, 水声工程学科得到了快速发展, 现在已成为人们了解海洋、开发海洋、开展海洋研究的主要工具. 就目前掌握的信息载体来说, 人们期待着的海洋透明化离不开水下声工程的研究与进步. 近年来, 水声学科的发展又有了新的内容, 这就是以水下矢量传感器技术为基础的新型水下信号的接收和处理技术的发展. 这项技术被称为水声学科的一个标志性进步. 本书以研究水下声矢量信号的接收和处理为目标, 介绍矢量水听器的工作原理和近几年的研究成果.

1.1 声学基本量

声波是一种机械振动状态的传播现象, 它可以在一切弹性介质中传播, 它的传播与介质本身的性质有关. 介质弹性力的作用使得距发射器较远处的介质依次振动. 介质具有质量, 因而有惯性, 惯性的作用使得介质的振动依次落后一定时间, 通过介质的弹性和惯性作用, 介质中相应局部的振动状态或形变就传到另一处去, 这就是声波的传播过程. 当振动在流体中传播时, 形成介质的压缩和伸张交替运动, 声波表现为压缩波的形式传播, 即纵波. 固体中由于有切应力, 所以还有横波的传播形式. 介质中振动传播过程有时间滞后, 即声波在介质中传播

有一定速度,称为声波的传播速度,简称声速.在介质中,声波所涉及的区域统称为声场.

连续介质中,任一点附近的运动状态可用压强、介质密度和介质振动速度来表示,这些量随着时间和在声场中的位置改变,可以分别用 $P(x, y, z, t)$, $\rho(x, y, z, t)$, $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ 表示介质中的压强、介质密度和介质质点速度.

在理想流体中,由于没有切应力,压强是一个标量函数.设介质没有扰动时静压强为 $P_0(x, y, z, t)$, 声波传到同一点的压强变为 $P(x, y, z, t)$, 其变化量 $p(x, y, z, t) = P(x, y, z, t) - P_0(x, y, z, t)$ 称为声压. 声波作用使得介质压缩或者伸张, 介质中各点的压强比静压可大可小, 因此声压可正可负. 此时介质中的质点围绕着它的平衡位置往复振动, 其瞬时状态 (如振动的位移和振动速度) 均随时间而变, 因此也可用质点的振动位移或速度描述声场.

声场中各点的声压、介质质点的振动位移或振动速度都是空间坐标和时间变量的函数, 它们都是可以用来描述声场性质的基本物理量. 但是, 由于声场中介质的振动速度不仅随时间而变, 同时各处振速的方向也不同, 即振速分布是个矢量场, 这与声压是个标量很是不同. 在理想流体介质中, 同一声场的声压函数与振速函数可以很方便地相互转化^[1].

设没有扰动时介质的静态流速为 $\mathbf{v}_0(x, y, z, t)$, 在声波作用下变为 $\mathbf{v}_1(x, y, z, t)$, 其改变量为

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \mathbf{v}_1(x, y, z, t) - \mathbf{v}_0(x, y, z, t) \quad (1.1.1)$$

$\mathbf{v}(x, y, z, t)$ 就是介质质点的振动速度.

在国际标准单位制中, 声压的单位是 N/m^2 , 简称 Pa(Pascal), 位移的单位是 m 或 cm, 振速的单位是 m/s 或 cm/s .

声场中的质点随着声波的传播而振动, 介质的密度也会发生变化. 设没有声波扰动时的介质的静态密度为 $\rho_0(x, y, z, t)$, 声波通过时介质的密度变为 $\rho(x, y, z, t)$, 其改变量为

$$\rho'(x, y, z, t) = \rho(x, y, z, t) - \rho_0(x, y, z, t) \quad (1.1.2)$$

取介质密度的相对变化量 (又称压缩量)

$$s(x, y, z, t) = \frac{\rho(x, y, z, t) - \rho_0(x, y, z, t)}{\rho_0(x, y, z, t)} \quad (1.1.3)$$

应当强调的是, 上述对场的特征的描述都要采用分布函数.

在声波传播过程中, 介质中各点的能量也发生变化, 振动引起动能变化, 形变引起位能变化, 这种由于声波传播而引起的介质能量的变化称为声能. 声能也是介质运动过程中的机械能. 从能量守恒观点看, 由声源发出的声能量, 其机械能部分除了被介质或者是介质界面吸收以外, 其余都以介质振动的声能形式存在于声场中, 声波传播过程中声能从一个区域传向另一个区域. 在单位时间内, 通过与能量传播方向垂直的单位面积的声能为声能流密度 ω , 显然声能流密度也是一个矢量.

设在理想介质中, 单位体积中的声能称为声能密度 E , 由文献 [1] 知其表达式为

$$E = \frac{1}{2}\rho_0\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{\rho_0c^2} \quad (1.1.4)$$

式中, c 为声波在介质中的传播速度.

取一单位微分元体积, 由能流连续概念和机械能守恒原理可以认为: 声波传播时, 声能流入又流出, 而该体积内的净余量应等于该体积内的声能密度的增加量. 依照连续性方程式的推导方法可得

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla \cdot \omega \quad (1.1.5)$$

式 (1.1.5) 表示声能密度的时间变化率等于能流密度的负梯度.

将声场中的声能密度的表示式 (1.1.4) 代入式 (1.1.5), 即得

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \rho_0\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0c^2}p \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.1.6)$$

利用小振幅声场 (即 $\rho = \rho_0 + \rho'$, $\rho' \ll \rho_0$) 中的运动方程和连续性方程, 可得

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (1.1.7)$$

代入式 (1.1.6) 中, 有

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla p - p \nabla \cdot \mathbf{v} = -\nabla \cdot (p\mathbf{v}) \quad (1.1.8)$$

比较声能密度变化量的式 (1.1.5) 和式 (1.1.8), 便可得到声能流密度矢量

$$\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{v} \quad (1.1.9)$$

由此可见, 声能通过单位面积的能流瞬时值在数量上等于该点压声和质点振速的相乘积. 对于谐和振动情况, 声场中各点 p 和 \mathbf{v} 频率相同, 但相位不一定相同 (在球面波场中可以看到此类情况). 因此 $p\mathbf{v}$ 乘积可正可负. 当它为正时, 表示能流沿波传播方向流出; 当它为负时, 表示能流向波传播方向的反方向流动. 当振源表面能流为正时, 表示振源对介质做正功, 即振幅辐射声能; 能流为负时, 表示振源做负功, 即声场把能量交还给振源.

取能流密度的时间平均值 (周期 T 中的平均) 表示声能量的强度, 称声波强度, 简称声强. 通常用 I 来表示

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T p v dt \quad (1.1.10)$$

即声场中任意一点的声波强度是通过与能流方向垂直的单位面积的声能量的平均值. 声波强度可类比为电路中的有功功率. 显然, 在谐和律变化的声场中, 声波强度取决于声压和振速的振幅值和它们之间的相位差, 有

$$I = \frac{1}{2} p_0 v_0 \cos \phi_0 \quad (1.1.11)$$

式中, p_0 和 v_0 分别为声场中某点声压和振速的振幅值, 一般地说, 它们是空间坐标的函数; ϕ_0 为 p 和 v 之间的相位差, 它也可能是空间坐标的函数.

式 (1.1.9) 表明声能流的传播方向就是介质质点振速的方向. 行波场中, 既然有能量的传播, 因而必定有 $I > 0$, 也即 p 和 v 之间的相位差必然小于 $\pi/2$, 且能量随着波的传播和扩散, 声波强度将衰减. 这种

现象在球面波场反映最明显. 但在平面驻波场中, 可以证明, 这时 p 和 v 相位差为 $\pi/2$, 于是通过任意波面的声波强度为零. 然而这并不意味着声场中没有能量, 只是说能量有时集中在这一地区, 有时移至另一地区, 使各点的能流密度值时而大, 时而小, 甚至为零.

1.2 声矢量的描述

近几十年世界各海洋大国都对水下声场进行了广泛、深入的研究, 但在研究水下声场的能量和方向特性时, 很多结论都是建立在声压量测量的基础上的, 通常也就把“声强”等同于势能密度 E_p . 因为根据定义声强是一个矢量, 所以在只进行标量测量时丢失了很多与声强矢量特性有关的实际声场信息.

基于声压测量所计算的强度 $I = \langle |p(t)|^2 \rangle$ 称为标量强度, 它与矢量强度 $\mathbf{I} = \langle p(t)\mathbf{v}(t) \rangle$ 是不同的, 其中 $p(t)$ 、 $\mathbf{v}(t)$ 分别是介质质点的瞬时声压和振速矢量; $\langle \dots \rangle$ 表示时间的平均.

在实际研究声场时, 必须考虑声场所有的声学基本量: 势能密度 E_p 、动能密度 E_k 、声强矢量 \mathbf{I} (能流密度矢量) 等, 通常把在声矢量研究基础上的声学简称为矢量声学.

在声强矢量的研究中, 声场中任一点的声波强度都可以有 4 个分量: 声压 $p(t)$ 和介质质点振速矢量的三个正交分量 $\mathbf{v} \{v_x(t), v_y(t), v_z(t)\}$.

平面波瞬时强度矢量可写为

$$\mathbf{j} = p(t)v(t)\hat{\mathbf{n}} \quad (1.2.1)$$

式中, $\hat{\mathbf{n}}$ 为波传播方向的单位矢量.

在单频平面行波条件下声压和振速为

$$\begin{aligned} p(t) &= p_0 \cos(\omega t - kx - \varphi_p) \\ v(t) &= v_0 \cos(\omega t - kx - \varphi_p) \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

式中, p_0 和 v_0 分别为声压与振速的幅值, ω 为角频率, t 为时间, k 为波数, φ_p 为初始相位.

瞬时能量密度为

$$E(t) = \rho v_0^2 \cos^2(\omega t - kx - \varphi_p) = \frac{p_0^2}{\rho c^2} \cos^2(\omega t - kx - \varphi_p) \quad (1.2.3)$$

单频平面行波的平均能量密度为

$$E = \frac{1}{2} \rho v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{\rho c^2} \quad (1.2.4)$$

由声场基本量的描述, 瞬时声强为

$$I(t) = p(t)v(t) = \frac{1}{2} p_0 v_0 + \frac{1}{2} p_0 v_0 \cos 2(\omega t - kx - \varphi_p) \quad (1.2.5)$$

式 (1.2.5) 中的第一项与时间 t 无关, 第二项在一个周期时间内等于零, 这样, 平面波的平均声强 (或简称声强) 为

$$\mathbf{I} = \langle I(t) \hat{\mathbf{n}} \rangle = \frac{1}{2} p_0 v_0 \hat{\mathbf{n}} \quad (1.2.6)$$

如果在声场中的测量点上有几个同频率、不同方向的平面单频声波通过, 那么总的合成振速就会相对于声压产生相移, 并且方向也不同于波的传播方向. 此时, 该点声场的 4 个分量分别为

$$\begin{cases} p(t) = p_0 \cos(\omega t + \varphi_p) \\ v_x(t) = v_{0,x} \cos(\omega t + \varphi_p - \varphi_x) \\ v_y(t) = v_{0,y} \cos(\omega t + \varphi_p - \varphi_y) \\ v_z(t) = v_{0,z} \cos(\omega t + \varphi_p - \varphi_z) \end{cases} \quad (1.2.7)$$

式中, $p_0, v_{0,x}, v_{0,y}, v_{0,z}$ 为幅值, ω 为角频率, t 为时间, $\varphi_p - \varphi_x, \varphi_p - \varphi_y$ 和 $\varphi_p - \varphi_z$ 分别为振速分量 v_x, v_y, v_z 与声压之间的相位差.

对于式 (1.2.7), 总的合成振速矢量为

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{i}v_x(t) + \mathbf{j}v_y(t) + \mathbf{k}v_z(t) \quad (1.2.8)$$

式中, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 为笛卡儿坐标系的单位矢量.

总的合成声强分量的平均值 I_x, I_y, I_z 在笛卡儿坐标系可写为

$$\begin{cases} I_x = \frac{1}{2} p_0 v_{0,x} \cos(\varphi_p - \varphi_x) \\ I_y = \frac{1}{2} p_0 v_{0,y} \cos(\varphi_p - \varphi_y) \\ I_z = \frac{1}{2} p_0 v_{0,z} \cos(\varphi_p - \varphi_z) \end{cases} \quad (1.2.9)$$

总声能流密度矢量的平均值为

$$\mathbf{I}(t) = \mathbf{i}I_x + \mathbf{j}I_y + \mathbf{k}I_z \quad (1.2.10)$$

平均声强写为复数形式

$$I = \frac{1}{2} \langle \text{Re } p(t) v^*(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle \text{Re } p^*(t) v(t) \rangle \quad (1.2.11)$$

式中, Re 为复数的实部, $*$ 为复共轭.

在某个测量点 $A(x, y, z)$, 声能流密度矢量的正交分量的复数形式为

$$\begin{cases} I_x = \frac{1}{2} \langle \text{Re } p(t) v_x^*(t) \rangle \\ I_y = \frac{1}{2} \langle \text{Re } p(t) v_y^*(t) \rangle \\ I_z = \frac{1}{2} \langle \text{Re } p(t) v_z^*(t) \rangle \end{cases} \quad (1.2.12)$$

1.3 相关函数与谱密度函数

相关函数与谱密度函数及其分析, 在工程应用中有着广泛的应用, 这一点在本书的后面将有详尽的描述. 这是因为相关函数或它的傅里叶变换——谱密度函数可以用来描绘一组或几组数据之间的线性关系. 但从历史上看, 它们是各自发展起来的. 相关函数是数学和统计学工作者的共同结晶, 而谱密度函数主要是作为一种工程工具发展起来的^[2]. 在研究水下声矢量信号时, 相关函数和谱密度函数作为十分有效的数学工具, 可以用比较方便的形式提供所需要的信息.

对于相关函数, 文献 [2], [3] 考虑了一个试验, 它产生两组成对的测量 $x_i(i = 1, 2, 3, \dots, N)$ 和 $y_i(i = 1, 2, 3, \dots, N)$. 例如, x_1 是作用在一个系统上的输入, y_1 是测量得到的系统输出, x_2 和 y_2 分别是另一个系统的输入和输出. 以此类推, 对于 N 个不同的输入都可以做这样的输入和输出测量, 得到的结果如图 1.3.1 所示. 在理想情况下, 所得到的测量结果将如图 1.3.1(a) 所示, 输入 x_i 与输出 y_i 之间具有精确的线性关系. 在此情况下, 可以写出如下公式:

$$y = a + bx \tag{1.3.1}$$

式中, a 为零交点, b 为 y 与 x 线性关系的斜率. 在另一种极端情况中, 假定测量的输出 y_i 只是与输入无关的噪声, 那么得到的结果就如图 1.3.1(d) 所示. 在实际中, 经常发生的测量问题是这两种极端情况之

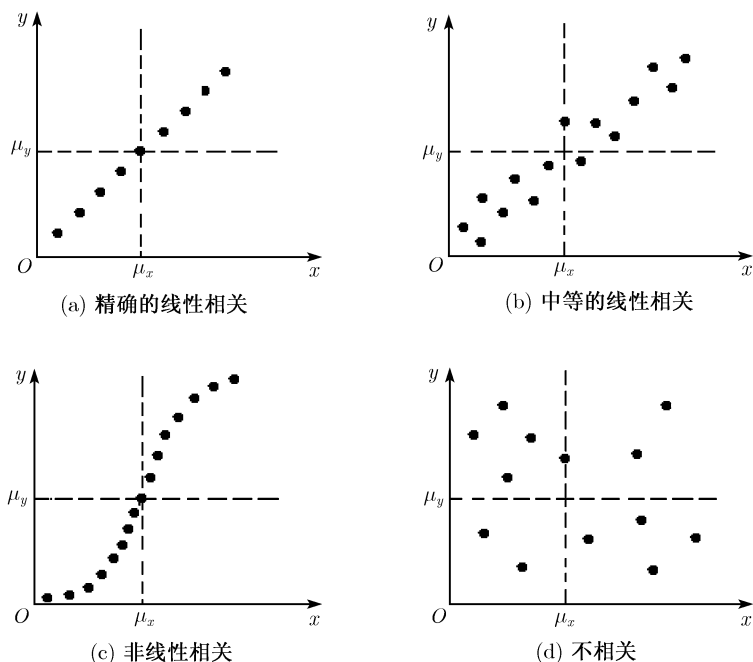


图 1.3.1 相关程度的变化情况

间的情况,如图 1.3.1(b) 和 1.3.1(c) 所示. 在图 1.3.1(b) 中, x 与 y 之间基本上是线性关系,但没有严格的解析联系,因为关系中有一定的随机性,或者叫测量中有噪声. 在图 1.3.1(c) 中, x 与 y 之间可以找到一个精确的解析关系式,但不一定是线性的.

如果用经典的方法来评价 x 与 y 之间的线性关系,比较简单的方法是计算 $x - \mu_x$ 与 $y - \mu_y$ 的平均乘积. 取样本容量 $N \rightarrow \infty$ 时的极限,这个平均乘积就成为 x 与 y 之间的协方差,其定义是

$$\sigma_{xy} = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y) \quad (1.3.2)$$

对于图 1.3.1(d) 的情况, x 与 y 是不相关的, $x_i - \mu_x$ 与 $y_i - \mu_y$ 的正积和将等于负积和,因而平均乘积为 $\sigma_{xy} = 0$. 但是对于图 1.3.1(a) 的情况, $x_i - \mu_x$ 为正时, $y_i - \mu_y$ 总是正的; $x_i - \mu_x$ 为负时, $y_i - \mu_y$ 又总是负的,因此它们的乘积都是正的,从而得到如下的平均乘积:

$$\sigma_{xy} = \sigma_x \sigma_y \quad (1.3.3)$$

事实上,式 (1.3.3) 定义了两个随机变量之间协方差的最大可能值. 因此,一般用如下的归一化比值表示相关性:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad -1 \leq \rho_{xy} \leq 1 \quad (1.3.4)$$

式中, ρ_{xy} 为相关系数. 相关系数 ρ_{xy} 可以用来评定任意两个变量 x 与 y 之间的线性关系程度. 这种线性关系程度的变化范围是 $-1 \sim +1$. $\rho_{xy} = -1$, 意味着 x 与 y 之间的关系是逆的,而不是正的. 图 1.3.1(b) 与 1.3.1(c) 中的数据将具有零到 ± 1 之间的相关系数.

式 (1.3.4) 中 ρ_{xy} 取值还可以这样证明: 对任何实常数 a 和 b , 期望值

$$E[\{a(x - \mu_x) + b(y - \mu_y)\}^2] \geq 0 \quad (1.3.5)$$

式中, E 为期望值算子.

展开式 (1.3.5), 得

$$\begin{aligned} & E[a^2(x - \mu_x)^2 + 2ab(x - \mu_x)(y - \mu_y) + b^2(y - \mu_y)^2] \\ &= a^2\sigma_x^2 + 2ab\sigma_{xy} + b^2\sigma_y^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

假定 $b \neq 0$, 可以把式 (1.3.6) 除以 b^2 , 得

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 \sigma_x^2 + 2\left(\frac{a}{b}\right) \sigma_{xy} + \sigma_y^2 \geq 0 \quad (1.3.7)$$

这是一个以 $\left(\frac{a}{b}\right)$ 为变量的二次方程. 它没有不同的实根, 因为一边是非负的. 因此, 这个关于 $\left(\frac{a}{b}\right)$ 的二次方程的判别式必须是非正的, 即

$$\text{判别式} = 4\sigma_{xy}^2 - 4\sigma_x^2\sigma_y^2 \leq 0 \quad (1.3.8)$$

由此得 $\sigma_{xy}^2 \leq \sigma_x^2\sigma_y^2$, 因此

$$-1 \leq \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} \leq 1$$

这就是式 (1.3.4) 的结论.

假定 y 由 x 的线性运算结果加上一个统计独立噪声 n (它包括了非线性的影响) 组成, 即

$$y = a + bx + n \quad (1.3.9)$$

则在这类问题中就会得到关于相关系数的一个重要关系式. 对于这类问题, 因 x 的线性关系形成的 y 的方差记为 σ_{yx}^2 , 它由下式确定:

$$\sigma_{yx}^2 = \rho_{xy}^2 \sigma_y^2 \quad (1.3.10)$$

换句话说, x 与 y 之间相关系数的平方值定义了 y 方差的一部分, 这部分等于 x 对 y 的线性影响造成的结果. 因此, 由其他所有影响 (包括非线性影响) 造成的 y 的方差将是

$$\sigma_{y:n}^2 = (1 - \rho_{xy}^2) \sigma_y^2 \quad (1.3.11)$$

式中, 角标 $y:n$ 表示与输入无关的影响 y 的方差.

式 (1.3.10) 有时称为相关输出 (功率) 公式 [2]. 其证明如下: 根据式 (1.3.9), 假定噪声 n 具有零均值, 则 y 的方差为

$$\begin{aligned}\sigma_y^2 &= E[(y - \mu_y)^2] = E[\{b(x - \mu_x) + n\}^2] \\ &= E[b^2(x - \mu_x)^2 + 2b(x - \mu_x)n + n^2] \\ &= b^2\sigma_x^2 + \sigma_n^2\end{aligned}\quad (1.3.12)$$

显然, 式 (1.3.12) 中 $b^2\sigma_x^2$ 是由 x 造成的 y 的方差部分, σ_n^2 是由 n 造成的 y 的方差部分, 即

$$\sigma_{y:x}^2 = b^2\sigma_x^2, \quad \sigma_{y:n}^2 = \sigma_n^2 \quad (1.3.13)$$

现在, 式 (1.3.2) 的 x 与 y 之间的协方差为

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] \\ &= E[(x - \mu_x)\{b(x - \mu_x)\}] \\ &= bE[(x - \mu_x)^2] = b\sigma_x^2\end{aligned}\quad (1.3.14)$$

由式 (1.3.13) 和式 (1.3.14) 得

$$\rho_{xy}^2 \sigma_y^2 = \frac{b^2 \sigma_x^4}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \sigma_y^2 = b^2 \sigma_x^2 = \sigma_{y:x}^2$$

这就是式 (1.3.10) 的结论. 另外, 由式 (1.3.13) 得

$$(1 - \rho_{xy}^2) \sigma_y^2 = \sigma_y^2 - b^2 \sigma_x^2 = \sigma_{y:n}^2$$

这就是式 (1.3.11) 中的结论.

现在考虑时间历程数据的情况, 所研究的数据是来自两个连续随机过程 $\{x(t)\}$ 和 $\{y(t)\}$ 的测量, 假定它们都是平稳 (各态历经) 的数据. 于是, 可以用单个时间历程记录 $x(t)$ 和 $y(t)$ 代表它们. 现在只要引进一个另外的变量, 即 $x(t)$ 与 $y(t)$ 之间的时间滞后 τ , 就可以直接使用 1.2 节讨论的经典相关函数概念. 在实际使用时, 时间变量可以用

任意另外感兴趣的变量 (如距离) 来代替. 也就是说, τ 也可以变成是空间量而不必单把它看成是时间量.

根据式 (1.3.2) 的定义, 对于任意时间滞后 τ , $x(t)$ 与 $y(t)$ 之间的协方差函数由下式确定:

$$\begin{aligned} C_{xy}(\tau) &= E[\{x(t) - \mu_x\}\{y(t + \tau) - \mu_y\}] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{x(t) - \mu_x\}\{y(t + \tau) - \mu_y\} dt \\ &= R_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

式中

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t + \tau) dt \quad (1.3.16)$$

对于 $x(t)$ 和 $y(t)$ 代表不同数据时的一般情况, 式 (1.3.16) 中的 $R_{xy}(\tau)$ 称为 $x(t)$ 与 $y(t)$ 之间的互相关函数. 对于 $y(t) = x(t)$ 的特殊情况, 有

$$\begin{aligned} C_{xx}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{x(t) - \mu_x\}\{x(t + \tau) - \mu_x\} dt \\ &= R_{xx}(\tau) - \mu_x^2 \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

式中

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt \quad (1.3.18)$$

称为 $x(t)$ 的自相关函数. 应该指出, 有些书中把式 (1.3.15) 所定义的协方差函数也称为相关函数. 实际上由于相关函数与协方差函数之间是用公式 $R_{xy}(\tau) = C_{xy}(\tau) + \mu_x \mu_y$ 联系的, 因此只要当一个测量的均值为零, $R_{xy}(\tau)$ 就等于 $C_{xy}(\tau)$ 了.

根据定义, 自相关函数总是 τ 的偶函数, 即

$$R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau) \quad (1.3.19)$$

但是, 互相关函数既不是 τ 的偶函数也不是 τ 的奇函数, 而满足如下公式:

$$R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau) \quad (1.3.20)$$

根据平均值和均方值的定义, 自相关函数在 $\tau = 0$ 处的值就是数据的均方值, 即

$$R_{xx}(0) = \psi_x^2 = \sigma_x^2 + \mu_x^2 \quad (1.3.21)$$

假定除了非零均值以外数据中没有其他的确定性分量, 自相关函数在 τ 变为 ∞ 时就变成一个等于均值平方的常数值, 即

$$R_{xx}(\infty) = \mu_x^2 \quad (1.3.22)$$

自相关函数和自协方差函数的这些性质如图 1.3.2 所示.

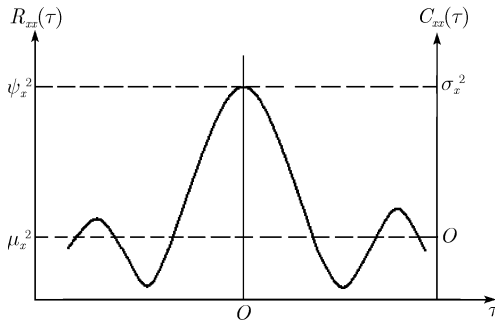


图 1.3.2 自相关函数和自协方差函数的性质

对于互相关函数, 利用推导式 (1.3.4) 所用的类似证明, 可以得

$$|R_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{R_{xx}(0)R_{yy}(0)} \quad (1.3.23)$$

式 (1.3.23) 一般称为互相关不等式. 对自协方差函数和互协方差函数使用同样的方法就得到相关系数函数

$$\begin{aligned} \rho_{xy}(\tau) &= \frac{C_{xy}(\tau)}{\sqrt{C_{xx}(0)C_{yy}(0)}} \\ &= \frac{R_{xy}(\tau) - \mu_x\mu_y}{\sqrt{[R_{xx}(0) - \mu_x^2][R_{yy}(0) - \mu_y^2]}} \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

式中, $|\rho_{xy}(\tau)| \leq 1$ 对所有的 τ 都成立. 根据式 (1.3.20), 互相关函数一般不是偶函数, $R_{xy}(0)$ 与数据记录的均方值没有特殊的联系. 图 1.3.3 给出了一个典型的互相关函数图.

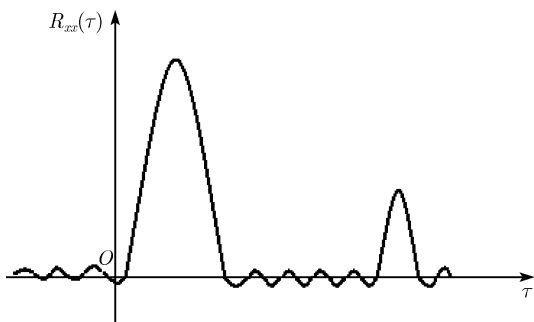


图 1.3.3 典型的互相关函数

对于谱密度函数, 我们知道, 可以用实际的滤波方法获取, 早年人们也确实这样做. 这也可以用广义傅里叶分析的方法来获取, 但最为便利的则是采用目前广泛应用的作为相关函数的傅里叶变换的方法获取. 前两种方法都曾在早年被广泛使用. 随着数值计算技术的进步, 相关函数计算谱, 已经成为十分便利、快捷且具有较高精度的方法.

首先假设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 表示平稳 (各态历经) 随机过程 $\{x(t)\}$, $\{y(t)\}$ 的两个时间历程记录, 它们之间的谱密度函数可以定义为这两个记录之间相关函数的如下傅里叶变换:

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1.3.25)$$

对于 $x(t)$ 和 $y(t)$ 代表不同的数据的一般情况, 式 (1.3.25) 中 $S_{xy}(f)$ 称为 $x(t)$ 与 $y(t)$ 之间的互谱密度函数, 或简单地称为互谱. 对于 $y(t) = x(t)$ 的特殊情况, 有

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1.3.26)$$

式中, $S_{xx}(f)$ 称为 $x(t)$ 的自谱密度函数或自谱. 根据历史上的原因以及在信号处理工程中的应用情况, 有时也称它为功率谱密度函数.

式 (1.3.25) 和式 (1.3.26) 中的谱密度函数定义在所有正负频率上, 为了强调这一事实, 称它们为双边谱. 根据式 (1.3.19) 和式 (1.3.20) 中

给出的相关函数的对称性质, 有

$$S_{xx}(-f) = S_{xx}(f) \quad (1.3.27)$$

$$S_{xy}(-f) = S_{xy}^*(f) = S_{yx}(f) \quad (1.3.28)$$

在理论分析研究方面, 经常使用双边谱密度函数. 但在实际中, 根据实际物理意义, 用定义在非负频率上的谱更为方便. 这种谱就称为单边谱密度函数. 根据式 (1.3.25) 和式 (1.3.26), 它们定义为

$$G_{xy}(f) = 2S_{xy}(f) = \begin{cases} 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau, & f \geq 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \quad (1.3.29)$$

$$G_{xx}(f) = 2S_{xx}(f) = \begin{cases} 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau, & f \geq 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \quad (1.3.30)$$

单边谱密度函数和双边谱密度函数的关系由式 (1.3.29) 和式 (1.3.30) 确定. 图 1.3.4 给出了这两种谱之间关系的示例.

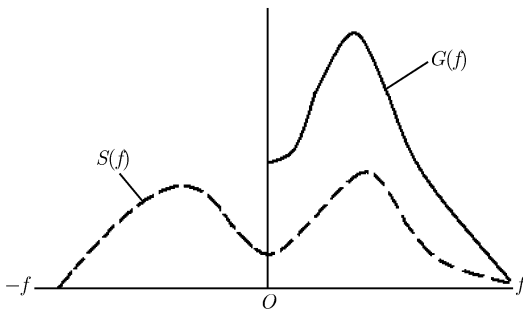


图 1.3.4 单边和双边谱密度函数

由于自相关函数总是 τ 的偶函数, 因此自谱仅由式 (1.3.26) 中傅里叶变换的实部确定. 这样有

$$G_{xx}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau$$

$$= 4 \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau \quad (1.3.31)$$

反过来, 自相关函数由如下的逆变换确定

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) e^{j2\pi f \tau} df \\ &= \int_0^{\infty} G_{xx}(f) \cos 2\pi f \tau df \end{aligned} \quad (1.3.32)$$

根据式 (1.3.21) 和式 (1.3.32), 在 $\tau = 0$ 处显然有

$$R_{xx}(0) = \int_0^{\infty} G_{xx}(f) df = \psi_x^2 = \sigma_x^2 + \mu_x^2 \quad (1.3.33)$$

换句话说, 自谱密度函数下的总面积等于数据的方差加上数据的均值的平方. 另外, 根据式 (1.3.17), 由于

$$R_{xx}(\tau) = C_{xx}(\tau) + \mu_x^2 \quad (1.3.34)$$

所以有

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau + \mu_x^2 \delta(f) \quad (1.3.35)$$

式中, $\delta(f)$ 为著名的 δ 函数. 于是, 谱密度函数中的非零均值是作为 $f = 0$ 处面积为 μ_x^2 的 δ 函数出现的. 最后, 自谱任意两个频率限 f_1 和 f_2 之间的曲线下的面积, 记为这个频率范围内数据的均方值, 即

$$\psi_x^2(f_1, f_2) = \int_{f_1}^{f_2} G_{xx}(f) df \quad (1.3.36)$$

自谱密度的这些性质如图 1.3.5 所示.

互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 由式 (1.3.25) 双边互谱 $S_{xy}(f)$ 的逆傅里叶变换确定. 因此有

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) e^{j2\pi f \tau} df \quad (1.3.37)$$

用单边谱表示时, 式 (1.3.25) 变为

$$G_{xy}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = C_{xy}(f) - jQ_{xy}(f) \quad (1.3.38)$$

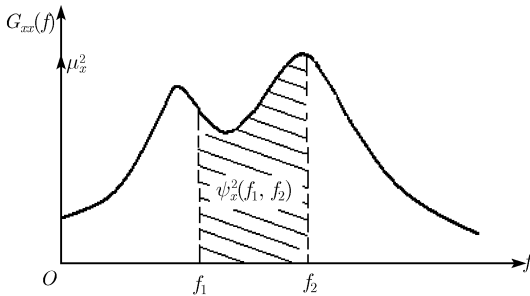


图 1.3.5 自谱密度函数的性质

其实部

$$C_{xy}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau \quad (1.3.39a)$$

称为共谱密度函数 (cospectrum), 而虚部

$$Q_{xy}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) \sin 2\pi f \tau d\tau \quad (1.3.39b)$$

称为重谱密度函数 (quadspectrum). 这两个名称多在外文资料中出现. 对于式 (1.3.37), 用 $C_{xy}(f)$ 和 $Q_{xy}(f)$ 表达时, 有

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} G_{xy}(f) e^{j2\pi f \tau} df + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} G_{xy}^*(f) e^{-j2\pi f \tau} df \\ &= \int_0^{\infty} [C_{xy}(f) \cos 2\pi f \tau + Q_{xy}(f) \sin 2\pi f \tau] df \end{aligned} \quad (1.3.40)$$

注意, 用 $C_{xy}(f)$ 的信息可以确定 $R_{xy}(0)$. 在实际中, 用振幅和相角来表示互谱也是常用的方便方法, 即

$$G_{xy}(f) = |G_{xy}(f)| e^{-j\theta_{xy}(f)} \quad (1.3.41a)$$

式中,

$$|G_{xy}(f)| = \sqrt{C_{xy}^2(f) + Q_{xy}^2(f)} \quad (1.3.41b)$$

$$\theta_{xy}(f) = \arctan \left[\frac{Q_{xy}(f)}{C_{xy}(f)} \right] \quad (1.3.41c)$$

图 1.3.6 给出了一个典型的互谱密度图。

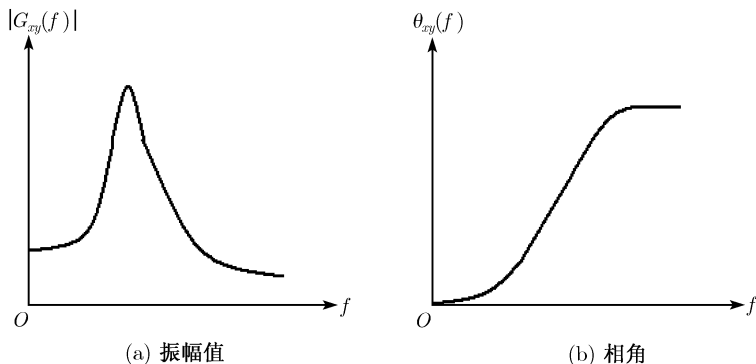


图 1.3.6 典型的互谱密度函数

互谱项 $C_{xy}(f)$ 和 $Q_{xy}(f)$ 可正可负, 它们的符号确定了相角 $\theta_{xy}(f)$ 的象限. 这些符号也表明了任意频率处 $y(t)$ 是否跟在 $x(t)$ 的后面. 例如, $y(t) = x(t - \tau_0)$, $\tau_0 > 0$ 表示信号从点 x 传到 y 是一个正的时间滞后. 当这两点之间的信号用公共时间基测量时, $y(t) = x(t - \tau_0)$ 就表明 $y(0) = x(-\tau_0)$, $y(\tau_0) = x(0)$. $\theta_{xy}(f)$ 取正值意味着在频率 f 处 $y(t)$ 落在 $x(t)$ 的后面, 而 $\theta_{xy}(f)$ 取负值则意味着在频率 f 处 $x(t)$ 落在 $y(t)$ 的后面.

有关互谱幅值的一个重要关系式是互谱不等式 [2]

$$|G_{xy}(f)|^2 \leq G_{xx}(f)G_{yy}(f) \quad (1.3.42)$$

它类似于式 (1.3.23) 的互相关不等式. 由此给出了如下定义的相干函数:

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_{xx}(f)G_{yy}(f)}, \quad 0 \leq \gamma_{xy}^2(f) \leq 1 \quad (1.3.43)$$

它类似于式 (1.3.24) 中的平方相关系数函数. 但是, 对于许多工程应用, 特别是水声工程中的应用来说, 相干函数 (有时称为平方相干) 与相关系数函数相比则要有效得多、方便得多. 这一点将在以后的章节中看到.

研究谱密度函数的第二种方法是对原始数据记录作正傅里叶变换. 具体地讲, 考虑两个平稳 (各态历经) 随机过程 $\{x(t)\}$ 和 $\{y(t)\}$, 对代表每个过程的长为 T 的第 k 个记录作有限傅里叶变换

$$\begin{cases} X_k(f, T) = \int_0^T x_k(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ Y_k(f, T) = \int_0^T y_k(t) e^{-j2\pi ft} dt \end{cases} \quad (1.3.44)$$

两个随机过程之间的双边谱密度函数, 用 X^*Y 的形式表示为

$$S_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E [X_k^*(f, T) Y_k(f, T)] \quad (1.3.45)$$

式中, 期望值运算符 E 表示的是对指标 k 的一种平均运算. 用单边谱密度函数表示时, 互谱和自谱由下式确定:

$$G_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} E [X_k^*(f, T) Y_k(f, T)] \quad (1.3.46)$$

$$G_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} E [|X_k(f, T)|^2] \quad (1.3.47)$$

式 (1.3.45)~ 式 (1.3.47) 所定义的函数 $S_{xy}(f)$, $S_{xx}(f)$, $G_{xy}(f)$, $G_{xx}(f)$ 分别恒等于用式 (1.3.25)、式 (1.3.26)、式 (1.3.29)、式 (1.3.30) 中相关函数的傅里叶变换所定义的相应函数. 这种相等关系, 即所谓的维纳-欣钦 (Wiener-Khinchin) 关系. 于是, 前面所研究的谱的性质及所有关系式在这里都可以适用.

用式 (1.3.45) 中的谱密度函数定义, 现在可以证明式 (1.3.42) 所叙述的互谱不等式. 给定式 (1.3.44) 所定义的有限傅里叶变换, 对任意实常数 a, b 和互谱相角 $\theta_{xy}(f)$, 有

$$\frac{1}{T} E \left[\left| aX_k(f, T) + bY_k(f, T) e^{j\theta_{xy}(f)} \right|^2 \right] \geq 0 \quad (1.3.48)$$

把括号内的项展开, 得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} E [a^2 |X_k(f, T)|^2 + abX_k^*(f, T) Y_k(f, T) e^{j\theta_{xy}(f)} \\ & + abX_k(f, T) Y_k^*(f, T) e^{-j\theta_{xy}(f)} + b^2 |Y_k(f, T)|^2] \geq 0 \end{aligned} \quad (1.3.49)$$

根据式 (1.3.45), 对式 (1.3.49) 取 $T \rightarrow \infty$ 的极限, 得

$$a^2 S_{xx}(f) + ab[S_{xy}(f)e^{j\theta_{xy}(f)} + S_{yx}(f)e^{-j\theta_{xy}(f)}] + b^2 S_{yy}(f) \geq 0 \quad (1.3.50)$$

但是由式 (1.3.28) 知 $S_{yx}(f) = S_{xy}^*(f)$, 故有

$$\begin{cases} S_{xy}(f) = |S_{xy}(f)| e^{-j\theta_{xy}(f)} \\ S_{yx}(f) = |S_{xy}(f)| e^{j\theta_{xy}(f)} \end{cases} \quad (1.3.51)$$

把式 (1.3.51) 代入式 (1.3.50), 得

$$a^2 S_{xx}(f) + 2ab |S_{xy}(f)| + b^2 S_{yy}(f) \geq 0 \quad (1.3.52)$$

假定 $b \neq 0$, 现在我们就可以用 b^2 除式 (1.3.52), 得

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 S_{xx}(f) + 2\left(\frac{a}{b}\right) |S_{xy}(f)| + S_{yy}(f) \geq 0 \quad (1.3.53)$$

这是一个关于 $\left(\frac{a}{b}\right)$ 的二次方程, 没有不同的实根. 它类似于互相关函数不等式证明中的式 (1.3.7). 与前一样, 方程 (1.3.53) 的判别式必须非正, 即

$$4|S_{xy}(f)|^2 - 4S_{xx}(f)S_{yy}(f) \leq 0 \quad (1.3.54)$$

这就证明了

$$|S_{xy}(f)|^2 \leq S_{xx}(f)S_{yy}(f) \quad (1.3.55)$$

根据式 (1.3.29) 和式 (1.3.30), 可得

$$|G_{xy}(f)|^2 \leq G_{xx}(f)G_{yy}(f)$$

这样就证明了式 (1.3.42) 和式 (1.3.43).

前面介绍了两种谱密度函数分析办法, 除此以外还可以通过实际滤波器进行谱密度函数分析, 在出现和广泛使用数字信号处理设备之前, 谱密度函数 (主要是自谱密度函数) 一般都用模拟滤波分析仪进行估计处理. 随着数字信号处理技术的发展, 这种方法已经很少使用, 而且目前即使使用, 有些滤波器也已经变成工作带宽可以自设和任意调

整的数字滤波器. 但是作为一种传统方法, 这种方法可直接得到结果, 概念上没有任何困难. 以前国际上一些仪器生产制造商还专门生产系列化的滤波器谱密度函数分析仪器, 这种模拟分析仪的方块如图 1.3.7 所示. 它们的工作原理是很经典的.

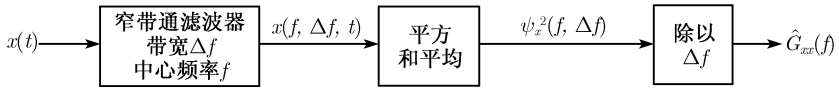


图 1.3.7 用滤波获得自谱的测量框图

设 $x(t)$ 是所研究数据的一个时间历程记录, 通过一个带宽为 Δf 、可变中心频率为 f 的窄带通滤波器. 然后对记为 $x(f, \Delta f, t)$ 的滤波器输出进行平方, 除以 Δf , 得到一个如下的自谱密度估计

$$\hat{G}_{xx}(f) = \frac{1}{(\Delta f) T} \int_0^T x^2(f, \Delta f, t) dt \quad (1.3.56)$$

如果对式 (1.3.56) 取 $T \rightarrow \infty$ 和 $\Delta f \rightarrow 0$ 而 $(\Delta f) T \rightarrow \infty$ 的极限, 则得到的是前面式 (1.3.30) 和式 (1.3.47) 所定义的单边自谱密度函数, 即

$$G_{xx}(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta f} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(f, \Delta f, t) dt \right] \quad (1.3.57)$$

参考文献 [2], [3] 都证明了这个等式的正确性.

1.4 相关函数与谱密度函数的应用

在本书后面的章节将会看到, 相关函数和谱密度函数可以被认为是水下声矢量传感器的特殊输出信号, 由此引发的在各种水声工程问题中的应用使人们获得了明显的益处. 作为这方面的应用, 在此对这些函数作扼要的一般性解释.

1.4.1 自相关函数的应用

随着人们对自相关函数的理解, 随机数据的自相关函数最直接的解释就是, 用数据的过去值预计未来值时的准确程度. 当然, 根据前面

的讨论和统计学的理论, 已知数据的概率密度函数 $p(x)$, 总可以得到有关将来时间历程值落在一个指定区间内的概率. 但是, 如果在一个已知的滞后值 τ 处自相关函数不同于 μ^2 (或在 $\mu = 0$ 的假设下, 不同于零), 则精确时间历程 $x(t) (0 \leq t \leq T)$ 的信息比 $p(x)$ 提供的一般概率陈述更有助于改进 $x(t)$ 在未来时刻 $t = T + \tau$ 处的预测. 为了证明这一点, 我们考虑实践中常用来作为最佳近似的 4 种普通数据: ① 正弦波; ② 正弦波加宽带随机噪声; ③ 窄带随机噪声; ④ 宽带随机噪声. 图 1.4.1 给出了这四种情况的典型时间历程记录.

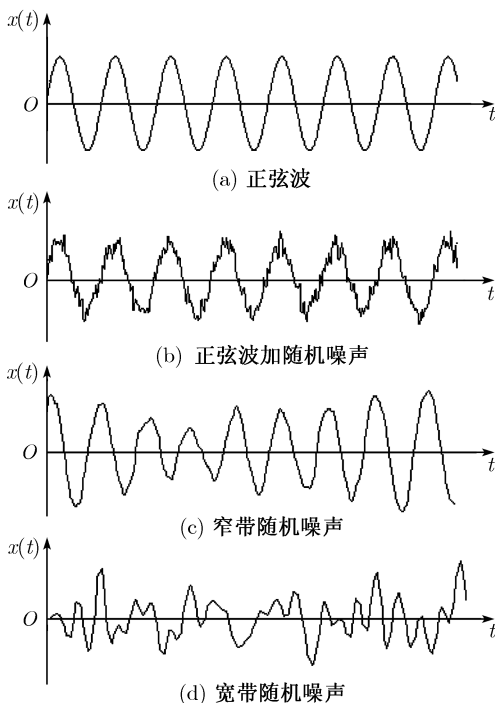


图 1.4.1 4 种特殊时间历程

首先考虑图 1.4.1(a) 所示的正弦数据. 一条正弦波可以看作平稳 (各态历经) 随机过程的一个样本记录

$$x_k(t) = X \sin(2\pi f_0 t + \theta_k) \quad (1.4.1)$$