线性规划及其应用

胡清淮　魏一鸣　著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书从理论和应用两方面论述了线性规划的基本理论、算法和最新发展，特别强调解大型线性规划问题．全书分为 10 章：线性规划导论；单纯形法；单纯形法的改进形式；对偶；灵敏度分析与参数规划；大型问题的分解；运输问题和指派问题；网络流；线性规划的进展与工业应用；线性规划内点法．每章后都附有习题，供读者学习与训练之用．

本书可作为从事管理科学、系统工程及相关专业的研究生和大学本科生的教材，同时也可供有关教师、研究工作者和从事实际管理工作的同志参考．

图书在版编目（CIP）数据

线性规划及其应用/胡清淮，魏一鸣著．—北京：科学出版社，2004

ISBN 7-03-012632-7

Ⅰ．线…　Ⅱ．①胡…②魏…　Ⅲ．线性规划　Ⅳ．O221.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 120920 号

责任编辑：陈　亮/责任校对：刘小梅

责任印制：安春生/封面设计：耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2004 年 3 月第　一　版　　开本：B5（720×1000）

2004 年 3 月第一次印刷　　印张：23 1/4

印数：1—3 000　　字数：446 000

定价：32.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

作 者 简 介

胡清淮　男，汉族，1940 年 5 月生，湖南醴陵人．1963 年毕业于中南工业大学，毕业后在长沙矿山研究院从事岩石力学和计算机应用的科研工作．1979～1981 年作为访问学者赴美国科罗拉多矿业学院从事运筹学与系统工程及岩石力学的学习和研究．1988 年以来就职武汉化工学院并任教授．参加了全国磷资源开发规划等三项国家级项目的研究，解决了使用微机解大型线性目标规划的算法与程序设计问题．1993 年在澳大利亚伍伦贡大学数学系和采矿与土木工程系任研究员和访问教授，主要从事数学规划的研究．曾兼任（1987～1998）国际露天采矿、复垦与环境杂志编委会编委．曾获部级一等奖并国家科技进步三等奖 1 项，部级科技进步二等奖 1 项和省部级自然科学等三等奖 3 项，以及国家版权局颁发的计算机软件版权证书两项．1992 年获国务院政府津贴，1993 年被评为湖北省有突出贡献中青年专家．现为武汉化工学院环境与城市建设学院教授．

魏一鸣　男，1968 年 3 月生，江西安远人，工学博士．现任中国科学院科技政策与管理科学研究所副所长、研究员、博士生导师．

历任助教、讲师，副研究员、研究员；研究室主任、副所长．长期从事管理科学的研究工作，研究领域包括复杂系统与复杂性、工业工程与管理、资源与环境管理．先后主持或参加并完成各种科研课题 30 余项．在国内外重要学术期刊发表论文 80 余篇，学术著作 3 部，曾获第七届中国青年科技奖等奖励 3 项．

目前，主持国家“十五”科技攻关课题、国家自然科学基金重大项目专题等重要科研课题 5 项．

前 言

作为管理科学的运筹学基础和重要分支的线性规划是在第二次世界大战期间从军事应用中发展起来的．目前它的应用已遍及各行各业和各部门各地区以及众多的企业，用于他们的各种计划与规划以及生产和社会活动的筹划之中．

有关线性规划方面的文章和图书国内已经很多了，但多是从教学和科研的角度出发，重点阐述线性规划的基本理论，而从应用方面出发，特别是对解大型问题来说，在提供实用算法和实践应用方面仍感欠缺．另一方面，随着世界科技的迅猛发展和进步，线性规划的基本理论有了新的改进和发展，特别是 20 世纪 80 年代以来内点法的提出、发展和应用，标志着线性规划领域的一次新的飞跃．当今的线性规划已今非昔比．因此作者深感有必要编写一本能够深入反映当今线性规划的概貌及其新进展的书，并把作者在这方面工作的科研实践经验提供给有关人员参考和借鉴．

全书分为 10 章．第 1、2 章为线性规划的基本理论和方法部分．第 3 章讲述基于改进单纯形法的一些可解较大问题的实用算法，包括有界变量问题及大型问题的 LU 分解算法和广义上界算法．第 4 章论述对偶理论和对偶单纯形法等．第 5 章论述灵敏度分析和参数规划．第 6 和第 7 章则分别论述大型问题的 Dantzig-Wolfe 分解算法、运输问题与指派问题．第 8 章论述网络流．第 9 章论述线性规划的进展与工业应用．第 10 章论述线性规划内点法．每章后都有习题，供读者学习与训练之用．

作者是以解大型线性规划问题的思路来展开全书的论述，因此在内容上较全面和深入地讨论了基于有界变量的各种算法，如有界变量改进单纯形法，有界变量对偶单纯形法和有界变量灵敏度分析等；在解大型问题的 LU 分解算法和广义上界问题的论述中，提出了独特、实用且适于编程的计算表；系统和详尽地论述了退化性、循环和多余性问题；详尽地讨论了影子价格问题，论述了在退化情况下对偶变量向量并不等于影子价格向量，从而使这一方面的认识更加完善；论述了大型问题的 Dantzig-Wolfe 分解算法和阶梯状多阶段问题的套分解算法；讨论了运输问题中的转运问题和混合问题；网络流一章中重点强调状态（out-off kilter）算法；论述了单纯形法的最新进展和较全面地讨论了作为最新发展的线性规划内点法等等．

本书可作为从事管理科学、系统工程和相关领域的研究生和大学本科生的教材，同时也可供广大教师、研究工作者和从事实际管理工作的同志参考．由于作

者经验与学识原因，书中错误和缺点在所难免，诚请读者批评指正.

在本书的写作和编辑过程中，中国科学院科技政策与管理科学研究所的范英副研究员、陈长杰博士、马晓微博士以及研究生梁强，原武汉化工学院的范体军博士、赵振峰博士以及刘红蓉同学等提供了热忱帮助，值此，向他们表示衷心感谢！同时，也对所有为本书的出版提供支持和帮助的专家、编辑和朋友们表示诚挚的谢意！

作　者

2003 年 10 月

目　　录

第 1 章　线性规划导论

线性规划是运筹学的一个重要分支.它的实质是从很多变量中选取一组适当的变量作为解,使这组变量满足一组确定的线性式或条件,而且使一个线性目标函数达到最优(最大或最小).

自从 1949 年美国数学家 G.B.Dantzig 提出解决线性规划问题的“单纯形”法[1]以来,线性规划无论在理论上、计算方法和开拓新的应用领域中,都获得了长足的进步.线性规划理论构成了数学规划论很多领域的基础,包括目标规划、网络流、凸规划、整数规划、几何规划和非线性规划等.本书首先论述基于单纯形法的线性规划的基本理论与算法,在此基础上全面论述它的现代发展及应用.作为基础部分的论述主要参考了书籍[1~7]等.

1.1　线性规划问题

1. 基本定义

如下形式的问题叫做线性规划问题:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx \\
\text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant b_2 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant b_m \\
& x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0
\end{aligned} \tag{1.1.1}
$$

这里 $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ 叫做目标函数,它是未知变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性函数,系数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 叫做目标函数系数或价值系数.min 表示使目标函数值为最小.线性不等式 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i\,(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$称为第 i 个约束条件,其中 a_{ij}为第 i 个约束条件中对应第 j 个变量的约束条件系数,b_i 叫做第 i 个约束条件的右边常数,它表示必须满足的某种最低要求.$x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0$ 叫做非负约束.符号 s.t.是英文“subject to”,即“受约束于”的意思.

满足上述所有约束条件的一组数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 叫做该线性规划问题一组可

行解，或可行点、可行向量．所有这些点构成该问题的可行解解域或可行解空间．

线性规划问题也可以求目标函数最大值，而且可以互相转换，即所有目标函数系数乘以 −1，求最大值的问题就变成了求最小值的问题，即

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = -\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1.2}$$

求出最优解后，把最优目标函数值反号即得出原问题的目标函数值．

约束条件可以是“≥”形式，也可以是“≤”形式或“＝”形式．前两者称为非等式约束，带等号者则称等式约束．变量的非负约束，则是由于对大多数实际问题来说，未知数代表某种物理量，它们常常是非负的．即使是它们的符号未受限制，例如 x_j，我们可以用两个非负的新未知数 x_j' 和 x_j'' 来代替它，使 $x_j = x_j' - x_j''$，因而问题的所有变量都化为非负的．综上所述，对线性规划问题可小结如下：

线性规划问题是在服从一组非等式或等式线性约束条件下求线性目标函数的最小值或最大值的问题．也就是说在所有它的可行解中找出这样一组解，它使目标函数值为最小（或最大）．应特别注意，这里目标函数和约束条件都是线性的．当存在非线性的情况下，问题则变成了非线性规划问题．

例 1.1　考虑如下线性规划问题：

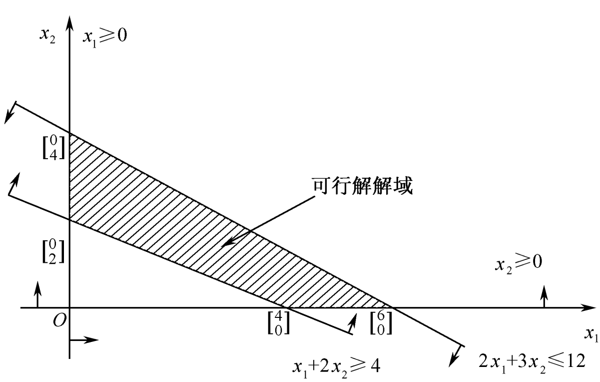


图 1.1　可行解解域图示

$$\begin{aligned}
\min \quad & 2x_1 + 5x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \geqslant 4 \\
& 2x_1 + 3x_2 \leqslant 12 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

该问题具有两个变量 x_1 和 x_2．目标函数是 $2x_1 + 5x_2$，问题是求它的最小值．约束条件及可行解域如图 1.1 所示．要求在这个可行解域中找到这样一个可行点，使它对应的目标函数值为最小．

2. 标准形式

为了便于求解,常把线性规划问题化成标准形式.所谓线性规划问题的标准形式,是其中所有约束条件都是等式约束,且所有未知数都是非负的.因此标准形式的线性规划问题为

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x \\
\text{s.t.} \quad & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\
& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \\
& x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{1.1.3}
$$

对标准形式的线性规划问题,应特别注意如下三点:

(1)所有约束都是等式约束;

(2)所有变量都是非负的,即 $x_j \geqslant 0$;

(3)所有右边常数都是非负的,即 $b_i \geqslant 0$.

对于非等式的约束,可以引用松弛变量或剩余变量把它变为等式约束.例如:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leqslant 12$$

引进松弛变量 $y_1 \geqslant 0$,上式可变成:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + y_1 = 12$$

而在情形

$$x_1 + 8x_2 \geqslant 6$$

时,则减去剩余变量 $y_1 \geqslant 0$,上式成为

$$x_1 + 8x_2 - y_1 = 6$$

对含有非限制变量的约束条件,可引用两个非负变量把它变成标准形式.

3. 典则形式

除线性规划问题的标准形式外,还要提到它的典则形式(canonical form).因为解线性规划问题的单纯形法,首先要把问题变成标准典则形式.所谓标准典则形式是指约束条件系数矩阵中含有单位矩阵的标准形式.例如:

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad + 2x_3 &= 2 \\
x_2 - 4x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

这时称相应于系数为单位矩阵所在列的变量为基变量,而其他变量为非基变量.

若令所有非基变量为零,则所有基变量等于相应约束条件的右边常数,这样就得出了一组基可行解.如上例,这时

$$x_3 = 0 \quad \text{非基变量}$$

$$x_1 = 2 \quad 基变量, \qquad x_2 = 1 \quad 基变量$$

通过适当变换,还可以得出其他可能的基可行解.假定从上例的情形出发,若使 x_3 进入基和使 x_1 退出基,应用消去法,第一行除以 2,第二行加上原第一行乘以 2,约束条件变为

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right) x_1 \qquad\quad + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 \qquad &= 5 \end{aligned}$$

这时基变量为 x_2 和 x_3,非基变量为 x_1,基可行解变为:$x_1 = 0$,$x_2 = 5$ 和 $x_3 = 1$.

4. 矩阵形式

用矩阵向量形式,可以把线性规划问题更简明地表示出来.为明了起见,考虑如下具有 m 个约束条件和 n 个变量的线性规划问题:

$$\begin{aligned} &\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, 2, \cdots, m \\ &\qquad x_j \geqslant 0 \quad j = 1, 2, \cdots, n \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

以 $\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 分别表示以下的行向量和列向量,以 A 表示约束条件系数矩阵,即

$$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

则上述线性规划问题可以写成如下矩阵形式:

$$\begin{aligned} &\min \quad \boldsymbol{cx} \\ &\text{s.t.} \quad \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \\ &\qquad\quad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可以列向量($\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$)的形式表示,式中,$\boldsymbol{a}_j$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中第 j 列向量,这时上述问题成为

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_j x_j = \boldsymbol{b} \tag{1.1.6}$$
$$x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, n$$

1.2　补充数学知识

这一节我们简要地补充一些关于矩阵运算和凸集与凸函数分析的某些基本数学知识.这些知识有助于更好地理解线性规划的数学原理及求解方法.

1. 矩阵和方程组的补充知识

关于矩阵、向量及线性方程组的数学概念和基本运算是大家所熟悉的.这里只介绍矩阵的初等变换、高斯消去法及逆矩阵的计算.

1）矩阵的初等变换

矩阵行和列的初等变换统称为矩阵地的初等变换.它是指

(1)互换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一行或一列;

(2)用一个不为零的数乘以 $\boldsymbol{A}$ 的一行或一列;

(3)用一个数乘一行加到另一行上去,或乘一列加到另一列上去.

例 1.2　矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

用初等变换把 $\boldsymbol{A}$ 的前三列变为下三角矩阵.

采用行变换.把第三行乘以(−1)加到第二行上去;第三行乘以(−2)加到第一行上,得出

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 & -18 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

第二行乘以 3 加到第一行上去;第一行除以 −12,最后得出

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

2）高斯消去法

矩阵的初等变换对解线性方程组非常有用.例如上例的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相应于如下线性方程组的增广矩阵$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$,最后把 $\boldsymbol{A}$ 化简为相应的三角矩阵,其过程叫高斯消

去法.从三角矩阵很容易解出这个方程组:即由第一方程得出 $x_1=2$,再逐步代入第二方程和第三方程得出 $x_2=4$ 和 $x_3=2$.

对一般情形,方程组为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

其中,$\boldsymbol{A}$ 为一 $n\times n$ 非奇异矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

高斯消去法是把 $\boldsymbol{A}$ 分解为一下三角矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和一上三角矩阵 $\boldsymbol{U}$ 的乘积,即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$$

因此该方程组可由解下列两个三角矩阵的方程组解出

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Y}$$

为了明显地表明用高斯消去法把 $\boldsymbol{A}$ 分解为 $\boldsymbol{L}$ 或 $\boldsymbol{U}$ 的消去过程,例如计算 $\boldsymbol{U}$ 时,对第一列的处理是把该列除第一个元素之外的其他元素化为零,这时相当于 $\boldsymbol{A}$ 矩阵前乘一 $\boldsymbol{M}_1$ 矩阵,$\boldsymbol{M}_1$ 为

$$\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -m_{21} & 1 & & 0 & \\ -m_{31} & 0 & 1 & & \\ \cdots & \cdots & & \ddots & \\ -m_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $m_{i1}=a_{i1}/a_{11}(a_{11}\neq 0),i=2,\cdots,n$.

同样处理第二列,即是在 $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}$ 前面乘一矩阵 $\boldsymbol{M}_2$,$\boldsymbol{M}_2$ 为

$$\boldsymbol{M}_2=\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & 0 & \\ 0 & -m_{32} & 1 & & & \\ 0 & -m_{42} & 0 & 1 & & \\ \cdots & \cdots & & & \ddots & \\ 0 & -m_{n2} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $m_{i2}=a_{i2}^{(2)}/a_{22}^{(2)}$,这里 $a_{ij}^{(2)}$是经第一次消除运算后的矩阵元素值.

同样对第 $k(k=1,2,\cdots,n)$次的消除处理亦是这样.因此,有

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_{n-1}\boldsymbol{M}_{n-2}\cdots\boldsymbol{M}_1$$

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}$$

而由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{U}$ 得

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{M}^{-1}=\boldsymbol{M}_1^{-1}\boldsymbol{M}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{M}_{n-1}^{-1}$$

很容易证实 $\boldsymbol{M}_k^{-1}$ 是 $\boldsymbol{M}_k$ 除对角线元素外其余元素反号的矩阵,因此,有

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

因此 $\boldsymbol{L}$ 可在计算 $\boldsymbol{U}$ 的消去过程同时直接得出.且由于

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{b}$$

故 $\boldsymbol{Y}$ 也可在计算 $\boldsymbol{L}$ 的同时由消去过程得出.而最终解 $\boldsymbol{x}$ 由 $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Y}$ 代解出.

实际上在计算过程中,$\boldsymbol{A}$ 的某对角元素 $a_{kk}^{(k)}$ 可能变为零或接近于零,这时应把 k 行与 k 下面的某一行进行交换,以保证 $a_{kk}^{(k)}\neq 0$.而把 $\boldsymbol{A}$ 的 k 行与其下面的 s 行互换,相当于 $\boldsymbol{A}$ 左乘如下一个置换矩阵 $\boldsymbol{Q}_k$:

$$\boldsymbol{Q}_k=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0\cdots 1 & & & \\ & & & \cdots\quad\cdots & & & \\ & & & 1\cdots 0 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \\ k\ 行 \\ \\ s\ 行 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

实际上若考虑到计算精度,每次都选取主行,以保证对所有(i,j),$|m_{ij}|\leqslant 1$.这时高斯消去法的精度极其平稳.

3)逆矩阵的计算

逆矩阵若存在的话,可以通过有限步骤的初等变换求得.它是通过一系列的初等变换,把矩阵 A 改化为单位矩阵,因而同样系列的初等变换会把$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})$改化为$(\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}^{-1})$.事实上,这相当于前乘一矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

例 1.3　$\boldsymbol{A}^{-1}$存在

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

构成增广矩阵,即

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第一行除以 2,把新第一行加到第二行上去,第三行减去新第一行,得

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第二行乘 $\frac{2}{5}$,新第二行乘 $-\frac{1}{2}$ 并加到第一行上去,新第二行乘以 $\frac{3}{2}$ 并加到第三行上去,得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

第三行乘以 $\frac{5}{12}$,新第三行乘以 $-\frac{3}{5}$ 并加到第二行上去,新第三行乘以 $-\frac{1}{5}$ 并加到第一行上去,得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{3}{12} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{12} & \frac{3}{12} & -\frac{3}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} & \frac{3}{12} & \frac{5}{12} \end{bmatrix}$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

例 1.4　$\boldsymbol{A}^{-1}$不存在

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 11 \end{bmatrix}$$

显然逆矩阵并不存在,因为 $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$,第三列为前二列的线性组合.为检验起见,仍构成增广矩阵并进行初等变换.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

把第一行乘以 -2 加到第二行上去,第三行减去第一行,得

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

第二行除以-3,然后第一行和第三行分别减去新第二行,得

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right]$$

至此,右边的矩阵无法通过初等变换化为单位矩阵,因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 没有逆矩阵.

2. 凸集和凸函数

1) 凸集

假如对 n 维空间的一个集合 $\boldsymbol{X}$ 中任意给出的两点 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$,有 $\lambda\boldsymbol{x}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{X}$,其中 $\lambda\in[0,1]$,则这个集合叫做凸集.

凸集的意义可作如下的几何解释:由于 λ 在区间$[0,1]$,$\lambda\boldsymbol{x}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}_2$ 表示连接两点 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 的线段上的一点,因此连接集合中的任意两点的线段必属于集合 $\boldsymbol{X}$.

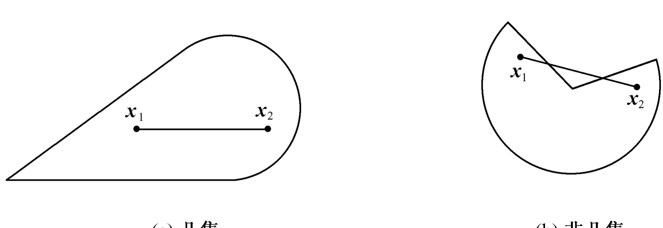
具有 $\lambda\boldsymbol{x}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}_2$ 形式的点,其中式 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$,称为凸组合;而如果 $\lambda\in(0,1)$,则这个凸组合称为严格的.

图 1.2(a)和(b)分别表示一个凸集和非凸集的例子.下式则为某些凸集例子.

(1)$\{(x_1,x_2):x_1^2+x_2^2\leqslant 1\}$

(2)$\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\}$,式中 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{b}$ 是 m 维向量.

(3)$\left\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x}=\lambda_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}\right\}$, $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\geqslant 0$



(a) 凸集 (b) 非凸集

图 1.2 凸集和非凸集例

凸集具有如下性质：

(1)如果 $\boldsymbol{C}$ 是一凸集，β 是一实数，则集合 $\beta\boldsymbol{C}=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x}=\beta\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\in\boldsymbol{C}\}$ 是凸集.

(2)如果 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 是凸集，则集合 $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d},\boldsymbol{c}\in\boldsymbol{C},\boldsymbol{d}\in\boldsymbol{D}\}$ 是凸集.

(3)凸集中任何集的交是凸集.

2）极点

凸集中的一点 $\boldsymbol{x}$，如果不能表示成 $\boldsymbol{X}$ 中的两个不同点的内点，则叫做 $\boldsymbol{X}$ 的极点.即是说，若 $\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}_2$，$\lambda\in(0,1)$和 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{X}$，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2$.

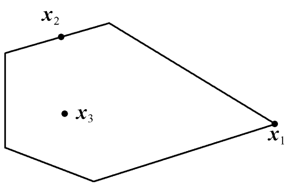


图1.3　极点和非极点

极点在线性规划理论中起特殊重要的作用，图1.3表示凸集的极点和非极点.其中 $\boldsymbol{x}_1$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的极点，$\boldsymbol{x}_2$ 和 $\boldsymbol{x}_3$ 不是极点.注意到极点不可能成为凸集中任何一条线段的内点的性质，这是它的特殊处.

3）超平面与半空间

超平面：形式$\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{px}\}=k$ 的集合称为 n 维欧几里德空间 $\boldsymbol{E}^n$ 中的超平面.这里 $\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{E}^n$ 中的非零向量，k 是标量.$\boldsymbol{p}$ 通常称为超平面的法线(见图1.4).显然超平面是 $\boldsymbol{E}^2$ 中的直线和 $\boldsymbol{E}^3$ 空间中的平面的推广.

上述意义即是，超平面是由所有满足方程 $\sum_{j=1}^{n} p_i x_j = k$ 的点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$组成.其中常数 k 可参照超平面上一个固定点 $\boldsymbol{x}_0$，而 $\boldsymbol{H}$ 是超平面的代号，即 $\boldsymbol{px}_0=k$，$\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{H}$。因此消去 $\boldsymbol{k}$，超平面可以表示为满足 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=0$ 的点的集合(见图1.4).显然超平面是一个凸集.

半空间：超平面把 $\boldsymbol{E}^n$ 分成两个区域，称为半空间，它们分别表示为如下形式的点的集合：

$$\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{px}\geqslant k\} \quad 和 \quad \{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{px}\leqslant k\}$$

两个半空间的联合就是欧几里德空间 $\boldsymbol{E}^n$.

引进一个在超平面上的固定点 $\boldsymbol{x}_0$，则半空间(见图1.5)表示为

$$\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\geqslant 0\} \quad 和 \quad \{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\leqslant 0\}$$

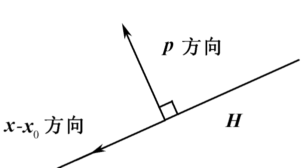


图1.4　超平面

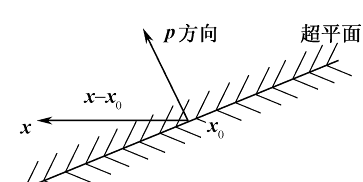


图1.5　半空间

4）凸集的方向

射线的方向：形式$\{\boldsymbol{x}_0+\lambda\boldsymbol{d}:\lambda\geqslant 0\}$的点的集合为一射线.这里$\boldsymbol{x}_0$称为射线的顶点，$\boldsymbol{d}$为一非零向量，称为射线的方向.射线也是一个凸集.

凸集的方向：对给定的一个凸集，如果对集合中的每个$\boldsymbol{x}_0$，射线$\{\boldsymbol{x}_0+\lambda\boldsymbol{d}:\lambda\geqslant 0\}$也属于这个集合，则非零向量$\boldsymbol{d}$称为凸集的方向.显然如果集合有界，它就没有方向.

考虑一个非空的多边形集$\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\}$，则对$\lambda\geqslant 0$和$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$，当且仅当$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{d})=\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{d}\geqslant\boldsymbol{0}$时，非零向量$\boldsymbol{d}$是$\boldsymbol{X}$的方向.

由于λ可以是任意大的数，因此上面条件又意味着$\boldsymbol{A}\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$和$\boldsymbol{d}$必须是非负的.即当且仅当$\boldsymbol{d}\geqslant\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{d}\neq\boldsymbol{0}$和$\boldsymbol{A}\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$时，$\boldsymbol{d}$是$\boldsymbol{X}$的方向.

同样可知，当且仅当$\boldsymbol{d}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{d}\geqslant\boldsymbol{0}$和$\boldsymbol{A}\boldsymbol{d}\geqslant\boldsymbol{0}$时，$\boldsymbol{d}$是非空集合$\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\}$的方向.

例 1.5　考虑集合$\boldsymbol{X}=\{(x_1,x_2):x_1-3x_2\geqslant -5,x_1-x_2\geqslant -1,x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 1\}$

如果$\boldsymbol{d}=(d_1,d_2)^{\mathrm{T}}$是该集合的方向，则

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}\geqslant\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1-3d_2 \\ d_1-d_2 \end{bmatrix}\geqslant\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

上式意味着：$d_1\geqslant 0$，$d_2\geqslant 0$，$d_1\geqslant 3d_2$，且

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

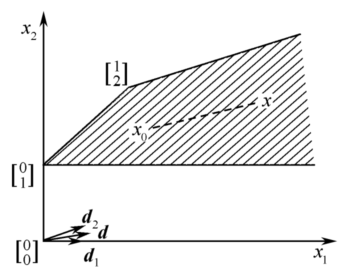


图 1.6　凸集的方向

图 1.6 为向量图，其中把每个方向都正规化，使其长度为一个单位.

5）凸集的极方向

极方向的概念类似于极点.凸集的极方向是凸集的这样一个方向，它不能表示为凸集的两个不同方向的一个正组合.两个向量$\boldsymbol{d}_1$和$\boldsymbol{d}_2$，如果$\boldsymbol{d}_1$不能表示成$\boldsymbol{d}_2$乘以某一正数，则说这两个向量是不同的，或不相当的.

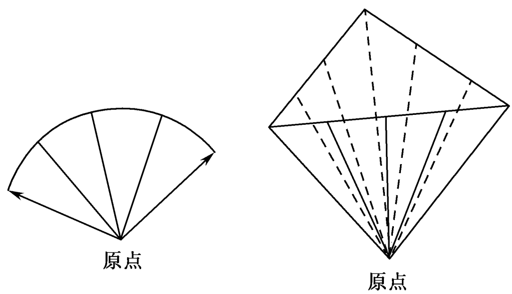
如上例中$\boldsymbol{d}_1=(1,0)^{\mathrm{T}}$和$\boldsymbol{d}_2=\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^{\mathrm{T}}$就是两个极方向.集合中任何一个数乘以$\boldsymbol{d}_1$或一数乘以$\boldsymbol{d}_2$的方向，都可以表示成$\lambda_1\boldsymbol{d}_1+\lambda_2\boldsymbol{d}_2$，这里$\lambda_1,\lambda_2>0$.包含在凸集中且其方向是某一极方向的射线，称为极射线.

6）凸锥

凸锥$\boldsymbol{C}$是带如下附加性质的一个凸集，即对每个$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}$和$\lambda\geqslant 0$，$\lambda\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}$.令$\lambda=0$，可知凸锥经常包含原点在内，并且对任何给定点$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}$、射线(或半线)$\{\lambda\boldsymbol{x}:\lambda$

$\geqslant 0\}$属于 $\boldsymbol{C}$.因此凸锥是完全由从原点发射出的射线组成的凸集(见图 1.7),而且其特征可完全由其极方向来表示.

图 1.7 是某些凸锥的例子.作为另一个例子,考虑极方向为$(1,0)^{\mathrm{T}}$ 和$(1,2)^{\mathrm{T}}$的凸锥,可知它是集合$\{(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}: x_2 \geqslant 0, x_2 \leqslant 2x_1\}$,这个凸锥可用其极方向的一个非负组合表示(见图 1.8).



(a)　　　　(b)

图 1.7　某些凸锥的例子

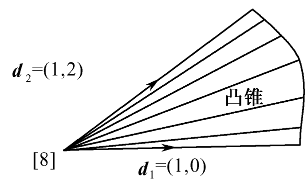


图 1.8　以极方向表示的凸锥

对一组向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_K$,凸锥可由这些向量的所有非负组合产生,即

$$\mathbf{C} = \left\{ \sum_{j=1}^{K} \lambda_j \boldsymbol{a}_j, \lambda_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, K \right\}$$

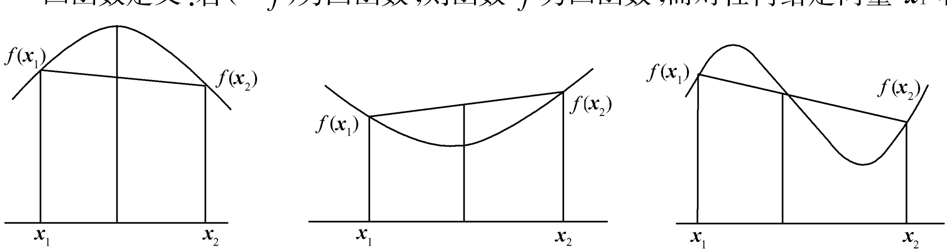
7) 凸函数和凹函数

凸函数和凹函数在最优化问题中起很重要的作用.线性最优化问题的参数分析自然会引出这些函数.

凸函数定义:对任意两个向量 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$,如果下列不等式成立,则该向量的函数 f 是凸函数:

$$f(\lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2) \leqslant \lambda f(\boldsymbol{x}_1) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{x}_2), \text{对所有 } \lambda \in [0,1]$$

凹函数定义:若$(-f)$为凸函数,则函数 f 为凹函数,而对任何给定向量 $\boldsymbol{x}_1$ 和



(a) 凸函数　　(b) 凹函数　　(c) 既非凸函数也非凹函数

图 1.9　凸函数和凹函数

x_2，有

$$f(\lambda \boldsymbol{x}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}_2)\geqslant \lambda f(\boldsymbol{x}_1)+(1-\lambda)f(\boldsymbol{x}_2)\quad \text{对所有 } \lambda\in[0,1]$$

图 1.9(a)表示凸函数的例子.如图所示，$\lambda f(\boldsymbol{x}_1)+(1-\lambda)f(\boldsymbol{x}_2)(\lambda\in[0,1])$在这里表示连接函数曲线上两点$(\boldsymbol{x}_1,f(\boldsymbol{x}_1))$和$(\boldsymbol{x}_2,f(\boldsymbol{x}_2))$的弦在点 $\lambda\boldsymbol{x}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}_2$ 上的高，根据凸函数定义，这个弦高至少不小于该点的函数值本身.

图 1.9(b)表示凹函数的例子，而图 1.9(c)既不是凸函数也不是凹函数.

3. 多面集

1）定义

以$\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}\}$表示的集合称为多面集，其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{b}$ 为 m 维向量.多面集是凸集的特殊情形，它对线性规划理论极为重要.

因为等式可用两个不等式($\geqslant$和$\leqslant$)表示.因此，一个多面集可用有限数的线性不等式(或等式)表示.例如，考虑由如下不等式限定的多面集：

$$-x_1+x_2\leqslant 2$$
$$3x_1+2x_2\leqslant 15$$
$$x_2\leqslant 5$$
$$x_1\geqslant 0$$
$$x_2\geqslant 0$$

注意，我们称其中每一个不等式为一个半空间，而称等式为超平面，这个多面集是由 5 个半空间交切而成的.如图 1.10 中的阴影部分.显然这个集是凸集.还注意到，这里第三个不等式是多余的，去掉它对该凸集毫不影响.为区别起见，我们说相应于第一、第二、第四和第五不等式的超平面，即以

$$\{(x_1,x_2):-x_1+x_2=2\},$$
$$\{(x_1,x_2):3x_1+2x_2=15\},$$
$$\{(x_1,x_2):x_1=0\},$$

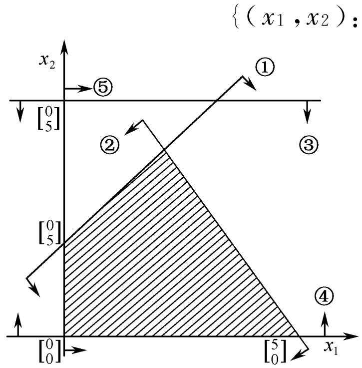


图 1.10　多面集

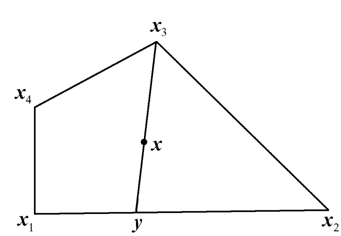


图 1.11　以极点表示一点

$$\{(x_1, x_2 : x_2 = 0)\}$$

为多面集的面，交点$[0,0]^T$，$[0,2]^T$，$\left[\frac{11}{5}, \frac{21}{5}\right]^T$ 和$[5,0]^T$ 为多面极的极点.

2）有界多面集

假如有一个数 k，在多面集每一个点有 $\|\boldsymbol{x}\| < M$，则这个多面集是有界的.有界多面集中任一点可以表示成其极点的一个凸组合.如图 1.11 的有界多面集有 4 个极点 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$ 和 $\boldsymbol{x}_4$，图中 $\boldsymbol{x}$ 为该多面集中一点，它在 $\boldsymbol{x}_3$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的连线上，因此

$$\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}_3 + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \quad \lambda \in (0,1)$$

但 $\boldsymbol{y}$ 本身又可表示为点 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 的凸组合，即

$$\boldsymbol{y} = \mu\boldsymbol{x}_1 + (1-\mu)\boldsymbol{x}_2 \qquad \mu \in (0,1)$$

把 $\boldsymbol{y}$ 代入前一式，得

$$\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}_3 + (1-\lambda)\mu\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)(1-\mu)\boldsymbol{x}_2$$

由 $\lambda \in (0,1)$和 $\mu \in (0,1)$，可知 λ，$(1-\lambda)\mu$，$(1-\lambda)(1-\mu) \in (0,1)$，且

$$\lambda + (1-\lambda)\mu + (1-\lambda)(1-\mu) = 1$$

这说明 $\boldsymbol{x}$ 是极点 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ 和 $\boldsymbol{x}_3$ 的一凸组合.更一般地，对有界多面集，以下定理成立.

定理 1.1 令 $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$为一非空的有界多面集，则其极点的集合是非空的，且极点数是有限的.比如说极点为 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_K$，而且这时 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$，这只有当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 能表示成极点 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_K$ 的凸组合时才能成立，即

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{K} \lambda_j \boldsymbol{x}_j$$

$$\sum_{j=1}^{K} \lambda_j = 1 \qquad \lambda_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,\cdots,K$$

3）无界多面集

图 1.12 是一无界多面集的例子，这个集有 3 个极点 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ 和 $\boldsymbol{x}_3$ 以及两个极方向 $\boldsymbol{d}_1$ 和 $\boldsymbol{d}_2$.注意，$\boldsymbol{x}$ 是图中一点，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ 指向 $\boldsymbol{d}_2$ 方向，因此

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \mu\boldsymbol{d}_2 = \lambda\boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2 + \mu\boldsymbol{d}_2$$

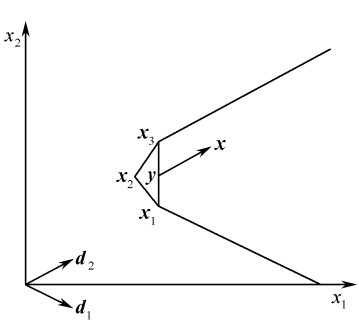


图 1.12 无界多面集的例

更一般地，对无界多面集下面定理成立.

定理 1.2 令 $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$为一非空多面集，其极点的集合也是非空集，且有有限数目的极点，如 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_K$.当且仅当 $\boldsymbol{X}$ 是有界多面集时，其极方向的集合是空集，如果 $\boldsymbol{X}$ 不是有界的，则极方向的集合是非

空集,且有有限数目的极方向,如 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\cdots,\boldsymbol{d}_L$.这时 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$,只是当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 能表示成 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_K$ 的凸组合加上 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\cdots,\boldsymbol{d}_L$ 的非负线性组合时才能成立,即

$$\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{K}\lambda_j\boldsymbol{x}_j+\sum_{t=1}^{L}\mu_t\boldsymbol{d}_t$$

$$\sum_{j=1}^{K}\lambda_j=1\quad \lambda_j\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,K,\quad \mu_t\geqslant 0,\quad t=1,2,\cdots,L$$

习　题

1.1　考虑下列线性规划问题

$$\begin{aligned}
\max\quad & 4x_1-2x_2+3x_3-4x_4\\
\text{s.t.}\quad & 2x_1-2x_2+4x_3-2x4\leqslant 6\\
& -x_1-2x_2+4x_3-2x_4=4\\
& -3x_1+3x_2-x_3+2x_4\geqslant 12\\
& x_1,x_2,x_4\geqslant 0,x_3\text{ 无限制}
\end{aligned}$$

(1)写成标准形式;(2)写成求最大的问题.

1.2　把下列问题转换成标准形式的线性规划问题

$$\begin{aligned}
\min\quad & |x|+|y|+|z|\\
\text{s.t.}\quad & x+y\leqslant 1\\
& 2x+z=4
\end{aligned}$$

1.3　某钢铁公司有 3 个铁矿,日产矿石量分别为 5000 吨、3000 吨和 1000 吨.公司有 4 个炼铁厂,每天所需矿石量分别为 4000 吨、2500 吨、1000 吨和 1500 吨(假定采出的矿石可不经选矿而直接炼铁).铁矿与炼铁厂之间的距离见表 1.1.问公司应怎样安排运输,既满足各炼铁厂的需要,又使总的运输费用(按吨公里计)最小.列出线性规划问题并写成标准形式(运输问题).

表 1.1　铁矿与炼铁厂的距离(公里)

矿山 \ 炼铁厂	1	2	3	4
1	16	30	41	50
2	34	30	32	45
3	55	40	24	33

1.4　一个工厂经理编制 3 种产品和 4 台机器的生产计划,每台机器都能生产这些产品.单位生产成本见表 1.2.每台机器生产单位产品所耗时间如表 1.3 所示.

表 1.2　机器单位生产成本(元)

产品	机器			
	1	2	3	4
1	4	4	5	4
2	6	7	5	6
3	12	10	8	11

表 1.3　机器生产单位产品耗时(小时)

产品	机器			
	1	2	3	4
1	0.3	0.25	0.2	0.2
2	0.2	0.3	0.2	0.25
3	0.8	0.6	0.6	0.5

假定 1,2,3 产品需要量分别是 4000、5000 和 3000 单位,4 台机器有效利用时间分别为 1500、1200、1500 和 2000 小时,列出生产计划的线性规划问题,并写成标准形式.

1.5　有一牲畜饲料厂要求年生产猪、羊和鸡饲料 10 吨、6 吨和 8 吨. 使用的原料是谷物、动物骨质粉、黄豆和鱼粉.这些原料的单价、供应量以及含 4 类营养成分的含量见表 1.4,各种饲料每公斤中要求含营养成分的最小与最大量见表 1.5.列出线性规划问题使总成本为最小(配料或营养问题).

表 1.4　饲料生产的原料单价、供应是及营养成分含量

原料	单价(元/公斤)	供应量(公斤)	营养成分(公斤)			
			维生素	蛋白质	钙	脂肪
谷物	5	6000	8	12	6	8
骨质	4	5000	2	4	10	6
黄豆	8	8000	10	12	6	6
鱼粉	12	4000	4	8	6	9

表 1.5　饲料每公斤营养成分最大与最小量

产品	营养成分(公斤)							
	维生素		蛋白质		钙		脂肪	
	最小	最大	最小	最大	最小	最大	最小	最大
猪饲料	6	∞	6	∞	7	∞	5	8
羊饲料	6	∞	7	∞	6	∞	5	7
鸡饲料	4	6	8	∞	0	∞	4	6

1.6　王明存了 5 万元钱，打算在近 5 年内每年都投资或买证券，每年年初他可以向银行存一年整取和两年整取的存款，利息分别为 8% 和 17% .从第二年年初开始，他每年可以买某制革公司的 3 年还款证券，总利息为 27% .列出该线性规划问题，使 5 年总效益为最大(投资预算问题).

1.7　某煤矿公司拥有 6 个大型露天矿，作业规定如下：

1)利润与总热值(英国热量单位 B,T,U)成正比.

2)煤要求：平均热值≥10000(英国热量单位)；平均含硫量≤1.0%；产量(每月)=90000(吨).

下两个月可采的矿区的资料为

矿区	可采矿量(吨)	热值(英制单位)	硫含量(%)
1	100000	11000	0.7
2	70000	10500	0.8
3	80000	9500	0.9
4	100000	9000	1.0
5	120000	9800	0.6
6	120000	9000	0.9

要求编制下两个月按月安排的生产计划，使利润值最大.列出线性规划问题，并化成标准形式(生产计划问题).

1.8　假定有 m 个废物源和 n 个排泄场.在废物源 i 产生的废物总量是 a_i，排泄场 j 排泄能力为 b_j.问题是要从 k 个设施中选择适当的处理设施.设施 k 固定价格为 P_k，运输能力为 Q_k，每吨废物单位处理成本为 α_k.令 c_{ik} 和 c_{kj} 分别为从废物源 i 运到设施 k 和从设施 k 运到排泄场 j 的单位运费.选择处理设施和运输方案，使总投资和设施作业成本加上运输成本为最小.列出这个分配问题的线性规划问题.(提示：假如设施 k 被选定，则令 y_k 为 1；否则 y_k 为零.)

1.9　对两个变量的线性规划问题可用图解法求解，其过程是首先根据约束条件构成了问题可行解的解域，然后绘出具有相同目标函数值的目标函数等值线(方程式 $\boldsymbol{cx}=z$)，在使目标函数值减小得最快的方向(即 $-\boldsymbol{c}$ 方向)平行移动这个等值线，直到它与其可行解解域边界上某点(极点)相切为止.

(1) 对下列 3 个问题用图解法求解：

① $$\begin{aligned} \max\quad & 2x_1+5x_2 \\ \text{s.t.}\quad & x_1+2x_2\leqslant 16 \\ & 2x_1+x_2\leqslant 12 \\ & x_1,x_2\geqslant 0 \end{aligned}$$

② $$\begin{aligned} \max\quad & 2x_1+3x_2 \\ \text{s.t.}\quad & x_1+x_2\leqslant 2 \\ & 4x_1+6x_2\leqslant 9 \\ & x_1,x_2\geqslant 0 \end{aligned}$$

③ $$\max\quad x_1-x_2$$

④ $$\min\quad -2x_1+3x_2$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} -3x_1+2x_2&\leqslant 6\\ -2x_1+4x_2&\leqslant 16\\ x_1,x_2&\geqslant 0 \end{aligned} \qquad\qquad \text{s.t.}\quad \begin{aligned} -x_1+2x_2&\leqslant 2\\ 2x_1-x_2&\leqslant 3\\ x_2&\geqslant 3\\ x_1,x_2&\geqslant 0 \end{aligned}$$

(2) 说明问题①是惟一最优解;问题②是不定最优解,并找出两个最优极点;问题③是一个无界最优解问题;问题④是空可行解域.

1.10　对下列矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) 用消去法求 $\boldsymbol{A}$ 的上三角矩阵和下三角矩阵;

(2) 用初等变换计算 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

1.11　指出下列集合中哪些是凸集,哪些不是:

(1) $\{(x_1,x_2):x_1^2+x_2^2\leqslant 1\}$

(2) $\{(x_1,x_2,x_3):x_1+x_2\leqslant 1,\quad x_1-x_3\leqslant 2\}$

(3) $\{(x_1,x_2):x_1^2-x_2^2=0\}$

(4) $\{(x_1,x_2,x_3):x_2\geqslant x_1^2,\quad x_1+x_2+x_3\leqslant 6\}$

(5) $\{(x_1,x_2):x_1=1,|x_2|\leqslant 4\}$

(6) $\{(x_1,x_2,x_3):x_3=|x_2|,\quad x_1\leqslant 4\}$

1.12　证明下列线性规划问题可行解的集合构成一个凸集:

$$\begin{aligned} \min\quad & \boldsymbol{cx}\\ \text{s.t.}\quad & \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\\ & \boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

1.13　考虑非空多面集 $\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\}$,说明当且仅当 $\boldsymbol{d}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{Ad}\leqslant\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{d}\geqslant\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{d}$ 是这个集的方向.

1.14　令 $\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\}$,这里 $\boldsymbol{A}$ 为秩并为 m 的 $m\times n$ 矩阵.当且仅当 $\boldsymbol{d}$ 是一个正数乘以向量 $(-\boldsymbol{Y}_j^{\mathrm{T}},0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{d}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的一个极方向.且有:

$\boldsymbol{Y}_j=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_j$

$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{B},\boldsymbol{N}]$(其中 $\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 可求逆矩阵)

$\boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{N}$ 矩阵中的一列

1 出现在位置 j

1.15　证明当且仅当多面集 $\boldsymbol{X}$ 没有方向时它才是有界的,并说明下例有没有方向?为什么?

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 \quad\quad & \leqslant 4 \\
x_1 + x_2 + x_3 & \leqslant 6 \\
x_3 & \geqslant 1 \\
x_1, x_2, x_3 & \geqslant 0
\end{aligned}
$$

1.16　找出如下多面集的所有极点和极方向：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{X} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} : x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0, \\
-x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_2 + x_4 = 2\}
\end{aligned}
$$

把点 $\boldsymbol{x}=\left(1,\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$ 表示成 $\boldsymbol{X}$ 的极点的凸组合和 $\boldsymbol{X}$ 的极方向的非负组合的和.

第 2 章　单纯形法

2.1　线性规划解的定义和基本定理

第 1 章中已讲述了线性规划的基本概念，并从几何上说明了线性规划问题的解和其可行解域的极点的关系．在讨论线性规划问题的基本解法之前，本书从严格的代数意义上阐述线性规划问题的有关定义和基本定理．

对线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{cx} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

定义　对约束方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{b}$ 是 m 维向量．假定：增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 的秩 $=$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $=m$．把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列进行可能的重新排列，使 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{B},\boldsymbol{N}]$，这里 $\boldsymbol{B}$ 为 $m\times m$ 矩阵，且有逆矩阵存在；而 $\boldsymbol{N}$ 是一个 $m\times(n-m)$ 维矩阵 $(n>m)$．取

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \qquad (m \text{ 维向量})$$

$$\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0} \qquad (n-m \text{ 维向量})$$

这时点 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{bmatrix}$ 称为该约束方程组的基解，如果 $\boldsymbol{x}_B\geqslant\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{x}$ 称为基可行解，$\boldsymbol{B}$ 称为基矩阵（或简称基），$\boldsymbol{N}$ 称为非基矩阵．$\boldsymbol{x}_B$ 的分量称为基变量，$\boldsymbol{x}_N$ 的分量称为非基变量．如果 $\boldsymbol{x}_B>\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{x}$ 称为非退化基可行解；如果至少有一个 $\boldsymbol{x}_B$ 的分量为零，则 $\boldsymbol{x}$ 称为退化基可行解．

基可行解和极点是相当的，也就是说，一个点是基可行解则必是可行解域的一个极点，而且非空多面集 $\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\}$ 至少有一个极点（或基可行解）存在．这可概括为如下定理：

定理 2.1　基可行解的集合和极点的集合是对应的，如果可行解域是非空的，则极点的集合和基可行解的集合也是非空的．

证明　先证明基可行解和极点的对应．

首先设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 是按上述定义的 $\boldsymbol{A}$ 矩阵列的排列顺序重新排列后的线性规划问题的一基可行解，则

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{b}$$

这里 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的前 m 列的列矩阵，根据定义，它们是线性独立的．如果 $\boldsymbol{x}$ 可以表示成(2.1.1)可行解域中另外两个不同点 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$ 的凸组合，即

$$\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{y}+(1-\alpha)\boldsymbol{z}\quad 0<\alpha<1\quad \boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{z}$$

由于 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$ 的非负性，可知 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$ 的后面 $n-m$ 个分量必为零，因此，有

$$y_1\boldsymbol{a}_1+y_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+y_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{b}$$

$$z_1\boldsymbol{a}_1+z_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+z_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{b}$$

由向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 的线性无关性，得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}$，因此 $\boldsymbol{x}$ 是(2.1.1)的可行解域的一个极点．

反之，设 $\boldsymbol{x}$ 是(2.1.1)的可行解域的一个极点，假定 $\boldsymbol{x}$ 的前 K 个分量不为零，则

$$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_K\boldsymbol{a}_K=\boldsymbol{b}$$

$$x_i>0,\ i=1,2,\cdots,K$$

要说明 $\boldsymbol{x}$ 是一个基可行解，必须证明向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_K$ 是线性独立的．现用反证法证明之．假定 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_K$ 线性相关，则它的某个线性组合为零，即

$$y_1\boldsymbol{a}_1+y_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+y_K\boldsymbol{a}_K=\boldsymbol{0}$$

定义 n 维向量 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_K,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，因为 $\boldsymbol{x_i}>0,1\leqslant \boldsymbol{i}\leqslant \boldsymbol{K}$，则有可能选择某一 ε，使得

$$\boldsymbol{x}+\varepsilon\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}-\varepsilon\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}\quad(\varepsilon\neq 0)$$

这样

$$\boldsymbol{x}=\frac{(\boldsymbol{x}+\varepsilon\boldsymbol{y})}{2}+\frac{(\boldsymbol{x}-\varepsilon\boldsymbol{y})}{2}$$

它为(2.1.1)的可行解域中两个不同点的凸组合．这是不可能的，因为 $\boldsymbol{x}$ 是极点．因此 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_K$ 是线性独立的，这里因为 $K\leqslant m$，如果 $K=m$，则 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_K,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 即为一个基可行解；如果 $K<m$，则是一个退化基可行解．

再证明定理的后面部分．

如果(2.1.1)的可行解域是非空的，则至少存在一个可行解 $\boldsymbol{x}$．不失一般性，设 $\boldsymbol{x}$ 的前面 L 个分量大于零，则

$$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_L\boldsymbol{a}_L=\boldsymbol{b}$$

这里有相应于向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_L$ 是线性独立的和线性相关的两种情形．

对情形(1)，假设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_L$ 是线性独立的，必有 $L\leqslant m$．如果 $L=m$，这个解就是基可行解，问题得证．如果 $L<m$，因为 $\boldsymbol{A}$ 的秩是 m，则 $m-L$ 个列向量可从 $\boldsymbol{A}$ 中的其余 $n-L$ 个列中找出，使合成的 m 个列向量为线性独立的．给相应的 $m-L$ 个变量赋以零值，得出一退化的基可行解．

对情形(2)，假设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_L$ 是线性相关的，则必有这些向量的一线性组合为零，即

$$y_1\boldsymbol{a}_1+y_2\boldsymbol{a}_2+\cdots,+y_L\boldsymbol{a}_L=\boldsymbol{0}$$

其中 $y_1,y_2,\cdots,y_L$ 为常数,且其中至少有一个可设为正数.上式乘以标量 ε,并从前一式中减去,得

$$(x_1-\varepsilon y_1)\boldsymbol{a}_1+(x_2-\varepsilon y_2)\boldsymbol{a}_2+\cdots+(x_L-\varepsilon y_L)\boldsymbol{a}_L=\boldsymbol{b}$$

定义 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_L,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,可知对任何 ε,$\boldsymbol{x}-\varepsilon\boldsymbol{y}$ 是等式方程组的解(但不一定对所有 i,$x_i-\varepsilon y_i\geqslant 0$).当 $\varepsilon=0$ 时,上式变成起始可行解.当 ε 从零增加时,取决 y_i 为负值、正值和零,相应分量会增加、减少和不变.但由于至少一个 y_i 为正数,因此当 ε 增加时至少一个分量会减少.把 ε 增加到此点,使一个或几个分量为零.特别是按下式确定 ε:

$$\varepsilon=\min_i\left\{\frac{x_i}{y_i}:y_i>0\right\}$$

对这个 ε 值,由式 $\boldsymbol{x}-\varepsilon\boldsymbol{y}$ 给出的解是可行解,且至少有 $L-1$ 个正变量.必要时重复这个过程,我们可继续消去正变量,直到给出的解是可行解,且相应的列是线性独立的为止.这时变成情形(1).于是定理得证.

从习题 1.9 也曾看到,线性规划问题的最优解存在,则最优极点也存在.现从代数上加以证明.

对(2.1.1)的线性规划问题,令$(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_K)$是该约束集的极点,$\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\cdots,\boldsymbol{d}_L$ 是其极方向,则满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 的任何点 $\boldsymbol{x}$ 可表示为

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{K}\lambda_i\boldsymbol{x}_i+\sum_{t=1}^{L}\mu_t\boldsymbol{d}_t \tag{2.1.2}$$

式中,$\sum_{i=1}^{K}\lambda_i=1$;$\lambda_i\geqslant 0$,$i=1,2,\cdots,K$;$\mu_t\geqslant 0$,$t=1,2,\cdots,L$.因此线性规划问题可转换为以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_K$ 和 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_L$ 为变量的下列线性规划问题:

$$\begin{aligned}\min\quad&\sum_{i=1}^{K}(\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}_i)\lambda_i+\sum_{t=1}^{L}(\boldsymbol{c}\boldsymbol{d}_t)\mu_t\\ \text{s.t.}\quad&\sum_{i=1}^{K}\lambda_i=1\\ &\lambda_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,K\\ &\mu_t\geqslant 0,\quad t=1,2,\cdots,L\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

因为 μ_t 可取任意大值,因此如对某个 $t(t=1,2,\cdots,L)$有 $\boldsymbol{c}\boldsymbol{d}_t<0$,则线性规划问题的目标函数为 $-\infty$.而对所有 $t(t=1,2,\cdots,L)$有 $\boldsymbol{c}\boldsymbol{d}_t\geqslant 0$ 时,把相应的 μ_t 取为零,则目标函数式中,第二项的最小值为零.为使目标函数式中,第一项对 λ_i 在 $\lambda_i\geqslant 0$ 和 $\sum_{i=1}^{K}\lambda_i=1(j=1,2,\cdots,K)$的条件下求最小值,可简单地找出最小的 $\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}_i$,比如说 $\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}_p$,而令 $\lambda_p=1$ 和其他的 $\lambda_j=0$,即得.下面的例子更详细说明上面的论述.

例 2.1　(见图 2.1(a))

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ & -x_1 + 3x_2 \leqslant 8 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

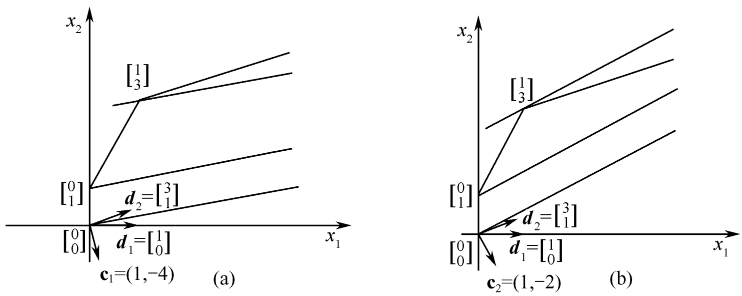


图 2.1　可行解域与极方向

该可行解域有三个极点 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ 和 $\boldsymbol{x}_3$ 以及两个极方向，且有

$$\boldsymbol{cx}_1 = (1,-4)\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = 0,\quad \boldsymbol{cx}_2 = (1,-4)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = -4$$

$$\boldsymbol{cx}_3 = (1,-4)\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = -11$$

$$\boldsymbol{cd}_1 = (1,-4)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = 1,\quad \boldsymbol{cd}_2 = (1,-4)\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = -1$$

由于 $\boldsymbol{cd}_2 = -1$，因此解趋向于 $-\infty$，即解无解，如图 2.1(a)所示之情况．而对目标函数 $x_1 - 2x_2$，则如图 2.1(b)所示，这时，

$$\boldsymbol{cx}_1 = (1,-2)\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = 0,\quad \boldsymbol{cx}_2 = (1,-2)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = -2$$

$$\boldsymbol{cx}_3 = (1,-2)\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = -5$$

$$\boldsymbol{cd}_1 = (1,-2)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = 1,\quad \boldsymbol{cd}_2 = (1,-2)\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = 1$$

即所有 $\boldsymbol{cd}_t$（$t=1,2$）均大于等于零．这时存在有限最优解，且最优极点为 $\boldsymbol{x}_3$，目标函数值为 -5．

综上所述，关于最优解存在如下定理：

定理 2.2　若可行解域是非空的，则当且仅当对所有 t，$\boldsymbol{cd}_t \geqslant 0$，（$t=1,2,\cdots,L$），才存在有限的最优解，这里 $\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\cdots,\boldsymbol{d}_L$ 是可行解域的极方向（L 是极方向数）．否则最优解无界．

定理 2.3　如果存在最优解，则存在最优极点解(或最优基可行解)．