李　　群

邵丹　邵亮　郭紫　著

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本书系统地论述了李群、李群的李代数、纤维丛和联络论及杨图理论.书中为所述内容提供了全面的论证、详细的运算和大量的实例，也为其在前沿领域中的应用做了准备. 全书结构严谨，自成体系，对与物理学关系密切的内容的论述尤为关注.

本书可作为大学物理系、数学系研究生的教材，也可供大专院校相关专业的师生及科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

李群/邵丹，邵亮，郭紫著. —北京：科学出版社，2008
ISBN 978-7-03-021182-8

I. 李… II. ①邵… ②邵… ③郭… III. 李群–研究
IV. 0152.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 026250 号

责任编辑：鄢德平 张 静 杨 然 / 责任校对：张怡君
责任印制：赵德静 / 封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社编务公司排版制作
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2008 年 3 月第 一 版 开本：B5 (720×1000)
2008 年 3 月第一次印刷 印张：18
印数：1—3 000 字数：341 000

定价：48.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

本书以代数与几何相结合的方式，系统地论述李群及其李代数的内容，以及纤维丛和联络论，同时还介绍了杨图及其应用. 在研究李群的局部性质和李群的李代数的同时，对李群整体结构和拓扑性质也作了研究. 书中为基本内容提供了全面的论证、详细的运算和大量的实例，也为李群、李代数和纤维丛在物理学前沿领域中的应用做了充分的准备和介绍.

第 1 章是关于集合论、群、拓扑空间和流形等的基本知识. 第 2、3 章主要介绍李群并引入李群的李代数. 第 4 章主要用来证明李的三定理和叙述李的三定理的逆定理. 第 5 章研究群的表示理论. 第 6、7 章在前几章的基础上，专门用来阐述正交群、酉群、庞加莱群和洛伦兹群等. 第 8 章简要论述李代数的一般理论. 第 9 章用来论证半单李代数的构造和单李代数的分类. 第 10 章介绍了关于杨图的理论,同时借助杨图研究了群的张量表示理论. 第 11 章从最简单的纤维丛构造开始，阐述了纤维丛和联络论.

全书概念自成体系，结构严谨，论述详尽，在具有数学的完整性的同时，对与物理学关系密切的内容尽量地给予关注. 本书并不要求具备较多的预备知识，具有线性代数和数学分析基础知识的读者即可阅读. 书后备有索引，以便查阅. 本书初稿自 80 年代始在高校使用，现经整理出版.

对江汉大学、武汉科技大学的资助，深表谢忱!

邵丹　邵亮　郭紫

于武汉汤逊湖玉龙岛

主要符号表

一般符号:

$\simeq$	近似相等，同伦
$\cong$	同构
$\Rightarrow$	蕴含，推出
$\Leftrightarrow$	等价
$\forall$	对任一
$\exists$	存在
$\ni$	使得
$\mathbf{R}$	实数域，等
$\mathbf{C}$	复数域，等
1∶1	一一
*	复(数)共轭，对偶
A^*	矩阵 A 的复共轭
$\tilde{A}$	矩阵 A 的转置
$A^\dagger$	矩阵 A 的转置共轭
tr	取迹
G_{e}	群 G 的幺连通支

与流形 M 有关的:

F^t	M 上微分 t-形式的集合
F_p^t	点 $p\in M$ 的微分 t-形式的集合
T_p	点 $p\in M$ 的切矢量空间
T_p^*	点 $p\in M$ 的微分构成的与 T_p 对偶的线性空间
$\hat{\Theta}$	解析无穷小变换的集合

与李群 G 有关的:

G	$\boldsymbol{G}$ 的李代数
G^*	MC 形式的集合(G 的对偶空间)
$\hat{\Theta}^*$	解析微分 1 形式的集合
L_a	$x\mapsto ax$ (左移动)
R_a	$x\mapsto xa$ (右移动)

目　　录

第 1 章　群、拓扑空间与流形

1.1　集　　合

这里不准备专门论述关于集合的现代述说，而是由于本书的概念和理论系统将建筑在集合论的有关内容之上，因而把集合作为本书论述的开始.

1. 集合

集合是数学中的基本概念之一. 本书使用的集合(或集)是指满足某种条件的对象的全体. 例如：

自然数的全体；

实数的全体(记为 $\mathbf{R}$)；

复数的全体(记为 $\mathbf{C}$)；

开区间内点的全体(记为(a, b))；

闭区间内点的全体(记为$[a, b]$)；

某几何图形上点的全体；

n维矢量空间中线性变换的全体；

实数域上 $m\times n$ 矩阵的全体；

复数域上 $n\times n$ 方阵的全体

等都是集合. 集合通常用大写字母表示. 集合中的对象称为集合中的**点**或**元素**，有时也简称为**元**，通常用小写字母表示.

设 A 为一个集合，若 a 是 A 的一个元素，记为 $a\in A$，读作 a 属于 A；若 a 不是 A 的元素，记为 $a\notin A$，读作 a 不属于 A. 为了表示集合 A 是由满足某种条件 P 的对象 a 构成的，并且是只由满足这种条件的对象构成，可采取记法：

$$A=\{a|\text{条件 } P\}.$$

例如

$$A=\{a|a\text{ 是正整数}\}$$

表示 A 是由正整数全体构成的集合.

当集合的元素可以具体写出来时，也可将该集合的元素写在花括号(或圆括号)之内，以表示这个集合. 例如

$$x=\{x^1,x^2,x^3,x^4\}$$

表示 x 是由 x^1，x^2，x^3，x^4 四个元素构成的集合. 也可将集合 x 简写成 $x=(x^i)$，$i=1,\cdots,4$.

2. 运算

集合 A 和 B 包含的元素相同时，记为 $A=B$.

集合 B 的每一元素都属于 A 时，B 称为 A 的**子集**(见图 1.1)，记为 $B\subset A$ (或 $A\supset B$)，读作 B 包含于 A(或 A 包含 B).

定理 1.1.1　若 $B\subset A$，同时 $A\subset B$；则 $A=B$.

定义 1.1.1　既属于集合 A 又属于集合 B 的元素构成的集合，称为 A 和 B 的**交**，记为 $A\bigcap B$ (见图 1.2). 即 $A\bigcap B=\{a\,|\,a\in A,a\in B\}$.

定义 1.1.2　由集合 A 的所有元素和集合 B 的所有元素构成的集合,称为 A 和 B 的**并**，记为 $A\bigcup B$ (见图 1.3). 即 $A\bigcup B=\{a\,|\,a\in A$ 或 $a\in B\}$.

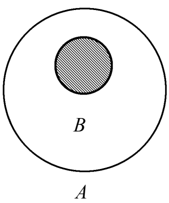

图 1.1

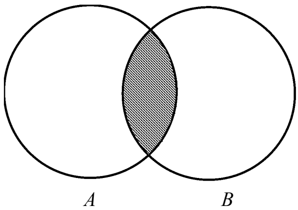

图 1.2

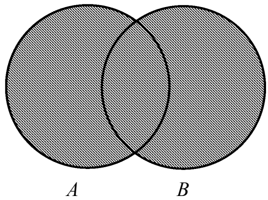

图 1.3

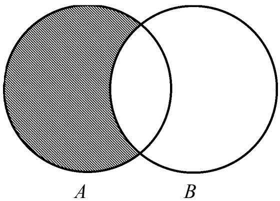

图 1.4

定义 1.1.3　设 A 和 B 是两个集合，由 A 的那些不属于 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的**差**，记为 $A-B$ (见图 1.4). 由于 $A-B$ 是 A 中除去 A 在 B 中的所有元素后，余下的元素形成的集合，因而 $A-B$ 也称为 B 关于 A 的**余集**. 即 $A-B=\{a\,|\,a\in A$ 且 $a\notin B\}$.

一个集合的元素可以是有限的，也可以是无限的. 元素是有限的集合，叫做**有限集**；元素是无限的集合，叫做**无限集**. 若一个集合只有一个元素,则称为**单元素集**. 一个集合也可以不含任何元素，这样的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$. 由数 0 形成的单元素集可记为 $\{0\}$，显然 $\{0\}$ 与空集 $\varnothing$ 是不同的两个集合. 如果集合 A 和 B 的交是个空集，即 $A\bigcup B=\varnothing$，则 A 和 B 不含有共同的元素，并称 A 和 B 为**非交的**.

定义 1.1.4　设 A 和 B 是两个集合，由所有的序偶 (a,b)，$a\in A$，$b\in B$，所构成的集合称为 A 和 B 的**直积**或笛卡儿积，记为 $A\times B$. 即 $A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A$ 且 $b\in B\}$.

例 1.1.1　令 $\mathbf{R}$ 为实数集合，$\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 便是所有实数序偶 (a,b) 构成的集合

$\{(a,b) \mid a\in\mathbf{R}$，且 $b\in\mathbf{R}\}$； $\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}$ 则是所有 n 个有次序的实数 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 构成的集合 $\{(a_i)\mid a_i\in\mathbf{R}, i=1,\cdots,n\}$，称为 n 重数空间.

1.2 关系与映射

1. 关系

定义 1.2.1 设 A 和 B 为两个集合，S 为直积 $A\times B$ 的一个子集，则称 S 为 A 到 B 中的**关系**. 若 $(a,b)\in S$，则称 a 与 b 是 S-相关的，记为 aSb.

例 1.2.1 设 $A=(1, 2, 3, 4, 5)$， $B=(1, 2, 3, 4)$，令

$$S=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B, a<b\}$$

$$=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\},$$

则上述序偶的集合 S 是直积 $A\times B$ 的一个子集，S 是 A 到 B 中的一个关系，即小于关系. 当集合 $A=B$ 时， $S\subset A\times A$，此时 S 将成为 A 到 A 中的关系，称为 A 中的关系. $I=\{(a,a)\mid a\in A\}$ 称为**单位关系**； $0=\{\varnothing\mid\varnothing\subset A\times A\}$，称为**空关系**.

设 f 与 g 分别是 A 到 B 中与 B 到 C 中的关系，则 $g\circ f$ 是 A 到 C 中的**合成关系**.

若 f 与 g 都是 A 到 B 中的关系，且 $f\subset g$，则 f 称为 g 的**限制**， g 称为 f 的**延拓**.

关系是数学中经常使用的概念.例如，数的相等、大于或小于，图形的全等、相似，集合间的包含、对应等，这些都是关系. 下面介绍一种重要的关系(即等价关系)和等价类.

定义 1.2.2 若元素 $a,b,c,\cdots$ 构成的集合 A 中的关系 S 具有如下性质：

(1) 自反性：aSa；

(2) 对称性：$aSb\Rightarrow bSa$；

(3) 传递性：aSb， $bSc\Rightarrow aSc$，

则称 S 为 A 中的**等价关系**.

定义 1.2.3 若 S 是 A 中的等价关系，集合 A 的元素 a 的**等价类**是 A 的一个子集 $\{b\in A\mid bSa\}$，记为 $[a]$.

从该定义可知，相互等价的元素属于同一等价类， A 是各个等价类的一个非交集. 每一等价类可用一个元素代表.

这些等价类的集合通常用 A/S 表示， A/S 称作 A 关于等价关系 S 的**商集**.

例 1.2.2 令 $\mathbf{R}$ 为实数域，设 $a_0\in\mathbf{R}$，若 $a-a_0=\pm 2\pi n$， $n=0,1,2,\cdots$；则可规定等价关系 $S: aSa_0$，从而得到等价类 $[a_0]=\{a\in\mathbf{R}\mid a\pm 2\pi n=a_0\}$. 显然，等价

类$[a_0]$可看作圆周上的一点.

2. 映射

定义 1.2.4　若 A 和 B 是两个集合，如果存在一个 A 到 B 的关系 f，使得任一元素 $a\in A$，有一确定的元素 $b\in B$ 与之相对应，则关系 f 叫做 A 到 B 中的**映射**，记为

$$f:A\to B，\ a\mapsto b \text{ 或 } A\xrightarrow{f}B，\ a\overset{f}{\mapsto}b.$$

例 1.2.3　令 $A=(a,b,c)$，$B=(a',b',c',d')$. 若规定

$$f:a\mapsto a'，\ b\mapsto b'，\ c\mapsto a'，$$

则 f 便是 A 到 B 中的一个映射.

例 1.2.4　令 $A=B=(a,b,c)$，则

$$f:a\mapsto a，\ b\mapsto b，\ c\mapsto a$$

是 A 到 B 中的一个映射. 由于 $A=B$，实际上 f 是 A 到 A 中的一个映射.

例 1.2.5　令 $A=B$ 是全体自然数的集合，对于这一无限集，可规定如下一对应法则：

$$f:1\mapsto 2, 2\mapsto 4, 3\mapsto 6,\cdots, n\mapsto 2n,\cdots,$$

f 便是自然数集合到其自身中的一个映射.

设 f 是集合 A 到 B 中的映射：

$$A\overset{f}{\mapsto}B,\qquad a\overset{f}{\mapsto}b,$$

则 b 叫做 a 在映射 f 下的**象**，记为 $f(a)=b$； a 叫做 b 的**原象**或**逆象**. b 的原象的全体叫做 b 在映射 f 下的原象，记为 $f^{-}(b)$.

若 $f(A)$ 是 B 的一个子集 $\{f(a)\,|\,a\in A\}$，则称 $f(A)$ 是 A 在映射 f 下的象，若 $f^{-1}(B)$ 是 A 的一个子集 $\{a\,|\,f(a)\in B\}$，则称 $f^{-1}(B)$ 是 B 在映射 f 下的原象或逆象.

若对任一 $b\in f(A)$，存在唯一的一个 $a\in A$，使得 $f(a)=b$，则 f 具有**逆映射** f^{-1}：

$$f(A)\overset{f^{-1}}{\mapsto}A,\qquad b\overset{f^{-1}}{\mapsto}a=f^{-1}(b),$$

将这种映射 f 称为**一一映射或单射**.

若 $f(A)=B$，则映射 f 称为**到上的映射**，即是 A 到 B 上的映射，也称为**满射**.

若映射 f 是一一和到上的，则 f 称为**双射**(或称为 A 与 B 间的 **1∶1 对应**).

例 1.2.6 前面例 1.2.3 至例 1.2.5 的三例中的映射都不是到上的. 例 1.2.3 和例 1.2.4 中的映射不是一一的. 如果将例 1.2.5 中的集合 B 改为自然数中的所有偶数的集合，则映射 f 将成为到上的.

例 1.2.7 若 $x \mapsto x^3$，$x \mapsto \exp x$，$x \mapsto x^3 + x^2$，$x \mapsto \sin x$ 均为实数域 $\mathbf{R}$ 到实数域 $\mathbf{R}$ 中的映射，不难知道这些映射具有如下性质：

$x \mapsto x^3$ 是个双射；

$x \mapsto \exp x$ 是个一一的但不是到上的映射；

$x \mapsto x^3 + x^2$ 是个到上的但不是一一的映射；

$x \mapsto \sin x$ 既不是到上的也不是一一的映射.

若 f 和 g 是集合 A 到 B 中的两个映射，如果 $\forall a \in A$，有 $f(a) = g(a)$，则称映射 f 和 g **相等**.

若 A、B、C 为三个集合，令 $a \in A$，$b \in B$，$c \in C$，且令 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$，$a \overset{f}{\mapsto} b \overset{g}{\mapsto} c$；则可写成

$$c = g(b) = g(f(a)) = g \circ f(a),$$

这里 $g \circ f$ (或简写为 gf)称为映射 f 与 g 的**合成**或**积**(应注意二者的次序). 若 f、g 为两个任意映射，由它们构成的积通常并不具有交换性，即 $g \circ f \neq f \circ g$. 如果三个映射：$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$，$a \overset{f}{\mapsto} b \overset{g}{\mapsto} c \overset{h}{\mapsto} d$，不难证明它们具有结合性：

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

若 f、g、h 是如下三个映射：

$$A \xrightarrow{f} B,\ B \xrightarrow{g} C,\ A \xrightarrow{h} C,$$

则可将如上映射关系画成如下面的三角图所示. 若三个映射满足 $h = g \circ f$，则这个图叫做**对易**的(或**交换**的).

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "h"] & \\
B \arrow[rr, "g"'] & & C
\end{tikzcd}$$

若 f 和 g 是两个双射，可以证明，f 和 g 之积的逆具有下面的性质：

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

定义 1.2.5　集合 A 到自身上的任一双射叫做 A 的一个**变换**. 若 A 是个有限集，则 A 的变换称为 A 的**置换**.

若一映射将集合 A 的每一元素映射成该元素自身，则该映射称为 A 的**恒同映射**或**单位映射**.

集合 A 中任意元素 a 和集合 B 中任意元素 b，以一定法则与集 C 中的唯一元素 c 之间的对应关系称为**代数运算**，可以“$\circ$”记之，即 $a \circ b = c$. 当 $A = B$，$c \in A$ 时，则称 A 对运算“$\circ$”是**封闭**的；A 的任意三元素 a，b，c 满足等式 $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$，则称 A 对运算“$\circ$”是**结合**的；如果 $a \circ b = b \circ a$ 成立，则称 A 对运算“$\circ$”是**交换**的.

1.3　群

1. 群的定义

定义 1.3.1　**群**是一个定义了合成运算的集合 G，满足如下性质：

1) 封闭性

若 a，$b \in G$，由合成运算将规定一元素 $c = a \circ b \in G$(这里用“$\circ$”表示 G 的两元素的合成运算). 由群的这一性质可知，集合 G 在合成运算下是封闭的. 封闭性可简写为

$$a \circ b \in G, \qquad \forall a, b \in G.$$

2) 结合性

群元素的合成运算是可结合的. 即对任意的 $a, b, c \in G$，有

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

结合性可简写成

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), \quad \forall a, b, c \in G.$$

3) 单位元

存在 G 的一元素 e，称为 G 的单位元或恒元，使得对于所有的 $a \in G$，有

$$e \circ a = a \circ e = a.$$

这一性质，可写成

$$\exists e \in G, \ni e \circ a = a \circ e = a, \quad \forall a \in G.$$

4) 逆元

对每一元素 $a \in G$，存在一逆元素 $a^{-1} \in G$，使得

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e.$$

这一性质可写成

$$\forall a \in G, \ \exists a^{-1} \in G, \ \ni a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e.$$

群元素的合成运算又称群的乘法或合成律. 对于具体的群，其乘法可以是通常的加法、乘法或矩阵乘法等. 表示群元素相乘的符号“∘”，通常可以省略.

若群的元素数目是有限的，则这种群称为**有限群**；如果元素数目是无限的，则这种群称为**无限群**.

有限群的元素数目叫做这个群的**阶**.

例 1.3.1

(1) 最简单的群是由一个元素构成的**平庸群**，这个元素即是单位元 e，单位元的逆元，是其自身；而且容易验证，由单位元 e 构成的集合也满足群的其他三个规则.

(2) 另一个简单的群是由两个元素构成的二阶有限群. 如，由数 1 和−1 在乘法下构成的群. 对于这个群，1 是其单位元；规定元素−1 的逆元仍是−1，可知这个由 1 和−1 构成的集合满足群的四个规则.

(3) 整数集合在加法下构成一个群，叫做**整数加(法)群**. 对于任意两个整数 a 和 b，$a+b$ 也是个整数，整数加法的结合律便是整数加群的结合性；整数零是单位元，即 $0+a=a+0=a$；对于任一整数 a，都存在一整数 $-a$，使得 $a+(-a)=-a+a=0$；所以整数集合将满足群的规则. 显然整数加群是个无限群.

然而正整数集合不能构成群. 因为这个集合中的元素不存在逆元素，同时也不存在单位元. 稍后将看到，正整数集合将构成一个半群.

(4) 容易看出，实数集合在加法下构成一个无限群. 复数集合在复数加法下也构成一个无限群. 它们分别称为**实数加群**和**复数加群**.

(5) 正实数集合在乘法下构成一个无限群，单位元是 1，任一正实数 a 的逆元为 $1/a$.

(6) 两个矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，在矩阵乘法下将构成一个二阶群.

(7) 复数 $1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}$ 在复数乘法下将构成一个四阶群.

(8) 所有 $n \times n$ 非奇异实方阵(即其行列式不为零)在矩阵乘法下构成一个无限群，叫做**一般线性群**，记为 $GL(n,R)$.

(9) 所有 $m \times n$ 矩阵在矩阵加法下构成一个无限群. 单位元是 $m \times n$ 零矩阵，元

素 a 的逆元为 $-a$.

若群的任意两个元素相乘时，都是可对易的，即 $\forall a$，$b \in G$，有 $a \circ b = b \circ a$，则这种群叫做**交换群**或**可换群**，也称 Abel 群.

上述 9 个例子中，除例(8)外，其余都是交换群.

若集合 A 中定义了合成运算，但不能全部满足群的四个性质，而只能满足其中部分性质,则 A 将成为胚群、半群或广群. 群、胚群、半群和广群所满足的性质如表 1.1 所示.

表 1.1　群、胚群、半群和广群所满足的性质

	封闭性	结合性	单位元	逆　元
群	有	有	有	有
胚　群	有	有	有	
半　群	有	有		
广　群	有			

2. 群的共轭类

设 a，b 为群 G 的两个元素，若有一元素 $g \in G$，使 $a = gbg^{-1}$，则称 a 是 b 的**共轭元素**，或简称**共轭**. 这种运算叫做 b 在 g 下的**相似变换**. 显然，这里的共轭是群 G 中的一个关系.

共轭关系的性质：

(1) 任一元素是其自身的共轭：

$$a = eae^{-1}.$$

(2) 若 a 是 b 的共轭，则 b 是 a 的共轭：

$$a = gbg^{-1} \Rightarrow b = g^{-1}ag = (g^{-1})a(g^{-1})^{-1}.$$

(3) 若 a 是 b 的共轭，b 是 c 的共轭，则 a 是 c 的共轭：

$$\left.\begin{aligned} a &= gbg^{-1} \\ b &= g'cg'^{-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = (gg')c(g'^{-1})(g^{-1}) = (gg')c(gg')^{-1}.$$

所以共轭是个等价关系.

这样，群 G 可按共轭关系划分成一些等价类，使每一等价类中的所有元素都是相互等价的，而不存在相互共轭又分别属于不同等价类的元素. 群 G 的这些等

价类叫做它的**共轭类**，简称为**群的类**.

由于对任一$a \in G$，有$aea^{-1} = e$，所以群的恒元自身形成群的一个类. 由于交换群的任意两个元素相乘时的次序是可对易的，因而交换群的每一元素自身形成它的一个类.

3. 子群

定义 1.3.2 设G为一个群，H是G的一个非空子集. 若H对于G的合成运算也构成一个群，则称H为G的**子群**.

若H是G的子群，则H的单位元就是G的单位元；若a是H的一个元素，a在H中的逆元就是a在G中的逆元. 显然，群G自身是G的一个子群，群G的单位元e也是G的一个子群. 这两个子群叫做群G的**当然子群(或平庸子群)**.

若群G除当然子群外，还具有其他子群，则该子群叫做G的**真子群**.

例 1.3.2

(1) 整数加群是实数加群的子群.

(2) 平面绕垂直于该平面的轴线的转动的集合构成一个群，叫做平面转动群. 其中转角为0、$\dfrac{\pi}{2}$、π、$\dfrac{3\pi}{2}$的转动的集合，构成一个平面转动群的子群.

(3) 空间绕其中一定点的转动的集合构成一个空间转动群. 该转动群中绕过该定点的某个固定轴的转动的集合，构成一个该转动群的子群.

上述三个例子中的子群，显然都是真子群.

4. 群的直积

若G_1和G_2为两个群，它们的单位元分别是e_1和e_2. 我们取所有序偶(a_1，a_2)的集合，将其记为$G_1 \otimes G_2$，$a_1 \in G_1$，$a_2 \in G_2$. 若在集合$G_1 \otimes G_2$中定义合成运算：$\forall(a_1，a_2) \in G_1 \otimes G_2$和$(b_1, b_2) \in G_1 \otimes G_2$，有$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$；则$G_1 \otimes G_2$构成一个群. 事实上，集合$G_1 \otimes G_2$的合成运算具有封闭性和结合性；($e_1$，$e_2$)是$G_1 \otimes G_2$的单位元；元素($a_1$ a_2)$\in G_1 \otimes G_2$的逆元为$(a_1 a_2)^{-1} = (a_1^{-1}, a_2^{-1})$；所以$G_1 \otimes G_2$是一个群，称为群$G_1$与$G_2$的**直积**.

5. 循环群

设G是一个群，$a \in G$，考虑G的元素$a, a^2, \cdots, a^p, \cdots$. 若$G$是一个有限群，则这些元素不可能都是不同的. 从而可令

$$a^p = a^q \quad (p > q),$$

这将得到

$$a^{p-q} = e, \quad e \text{为} G \text{的单位元.}$$

若n是满足关系

$$a^n = e$$

的最小正整数，则元素 $a,a^2,\cdots,a^n$ 将都是不同的，且这些元素将构成一个群，叫做 n 阶**循环群**. n 阶循环群通常记为 Z_n.

不难验证，由单位矩阵 $-I$ 和 I 将构成二阶循环群 Z_2，即 $Z_2=\{-I,I\}$.

1.4 置 换 群

1. 置换群

可通过多种方式给出 k 个对象的置换，从而得到置换群，这里介绍其中常见的情况.

考虑由数 1，2，3，4，5 标定的 5 个对象组成的集合. 一个**置换**，即是一个这样的变换，如

$$a=\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\3\,1\,2\,5\,4\end{pmatrix},$$

这里的 a 可看作一个映射，它将 1 映射到 3，2 映射到 1，3 映射到 2 等；也可将置换 a 看成是它将 1 用 3 代替，将 2 用 1 代替，将 3 用 2 代替等. 在置换 a 的记法中，列的顺序是无关紧要的，也可以把上述记法写成

$$a=\begin{pmatrix}2\,3\,5\,4\,1\\1\,2\,4\,5\,3\end{pmatrix},$$

而不改变置换 a 的意义. 置换

$$e=\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\1\,2\,3\,4\,5\end{pmatrix}$$

是**单位置换**(或称为**恒同置换**). 若取两个置换，如

$$a=\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\3\,1\,2\,5\,4\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\5\,3\,1\,2\,4\end{pmatrix},$$

则 a 和 b 的**乘积**被定义成 a，b 连续施行得到的置换

$$b\circ a=\begin{pmatrix}3\,1\,2\,5\,4\\1\,5\,3\,4\,2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\3\,1\,2\,5\,4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\1\,5\,3\,4\,2\end{pmatrix}.$$

在书写两个置换的乘积时，应注意二者的顺序，这里的 $b\circ a$ 意味着置换 a 是

先施行的，b 是后施行的. 不难写出置换

$$a=\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\3\,1\,2\,5\,4\end{pmatrix}$$

的逆为

$$a^{-1}=\begin{pmatrix}3\,1\,2\,5\,4\\1\,2\,3\,4\,5\end{pmatrix}.$$

同时可以证明，连续施行的置换满足结合性. 从而可知，上述 5 个对象的所有置换的集合构成一个群. 容易证明，这个群是一个非交换群.

一般地说，k 个对象的所有置换的集合构成一个群，称为**置换群**，通常记为 S_k . 置换群数学上有时也叫做**对称群**.

若 S_k 为一置换群，则可用

$$a=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & k\\ a1 & a2 & a3 & \cdots & ak\end{pmatrix}$$

表示 S_k 的一个元素. 这表明，用 i 标定的对象将由用 ai 标定的对象代替，这里 $i=1, 2, \cdots, k$. $a1$，$a2$，$a3$，$\cdots$，ak 是数字 $1, 2, 3, \cdots, k$ 的一个排列. 由于 $a1$ 可通过 k 个方式选取，$a2$ 可通过 $k-1$ 个方式选取等，所以置换群 S_k 的阶为 $k!$.

2. 置换的分解、轮换

令

$$a=\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\\4\,3\,9\,6\,1\,7\,5\,8\,2\end{pmatrix}$$

为置换群 S_9 的一个置换. 在这个置换下，元素 1 用元素 4 代替，元素 4 用元素 6 代替，元素 6 用元素 7 代替，元素 7 用元素 5 代替，元素 5 用元素 1 代替，从而可得到如下一个置换：

$$\begin{pmatrix}1\,4\,6\,7\,5\\4\,6\,7\,5\,1\end{pmatrix}.$$

这个置换叫做一个**轮换**或**循环置换**，可简记为

$$1\to4\to6\to7\to5\to1 \text{ 或 } (1\;4\;6\;7\;5).$$

将这种寻找轮换的操作重复进行下去，可发现 a 可分解成三个轮换的积：

$$a=(1\ 4\ 6\ 7\ 5)(2\ 3\ 9)(8).$$

上述三个轮换都不包含相同的元素，因而彼此是**独立的**.

轮换中包含元素的数目称作该轮换的**长度**，如上从左至右的三个轮换的长度分别为 5，3，1. 长度为 1 的轮换通常可略去，从而可以将 a 写成

$$a=(1\ 4\ 6\ 7\ 5)(2\ 3\ 9).$$

这里指出，两个独立的轮换是可交换的. 这样，a 也可写成

$$a=(2\ 3\ 9)(1\ 4\ 6\ 7\ 5)\ \text{或}\ \ a=(9\ 2\ 3)(7\ 5\ 1\ 4\ 6).$$

当将置换写成独立轮换的乘积时，每一长度的轮换出现的数目叫做该置换的**循环结构**. 若一置换具有较多数目的轮换，可用上标来表示具有某种长度的轮换的数目. 这样，一个置换具有 $i_1, i_2, i_3, \cdots$ 个长度各为 $l_1, l_2, l_3, \cdots$ 的独立轮换，则它的循环结构可写成

$$(l_1^{i_1}, l_2^{i_2}, l_3^{i_3}, \cdots).$$

有时为了明确起见，也可将其具有各相同长度的独立轮换列在一起写出，以反映置换的循环结构.

3. 对换

对换是长度为 2 的轮换.

定理 1.4.1　任一轮换可以分解成对换的乘积.

例如，(1 2 3 4 5 6)= (16)(15)(14)(13)(12). 该式等号右侧是个非独立的对换的乘积，因而是不可交换的.

证明　显然，上述命题对于具有两个元素的任何轮换是成立的，这是一种平庸情况. 现在假设对具有$(k-1)$个元素的轮换定理成立，则只要证明

$$(12\cdots k)=(1k)(12\cdots k-1)=\begin{pmatrix}1 & k\\ k & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\cdots k-1\\ 23\cdots 1\end{pmatrix}$$

成立即可. 这是显见的，只要施行上式中的乘法即可得知. 证毕.

4. 置换的奇偶性

考虑如下置换：

$$a=(1\ 2\ 3)(4\ 5)(6\ 7\ 8)$$

$$=(1\ 3)(1\ 2)(4\ 5)(6\ 8)(6\ 7).$$

该置换包含的对象数目是 8，独立轮换数目是 3，这两个数字表征了这个置换的特征. 二者的差是 5，叫做这个置换的**减量**. 可以看到，减量等于一个置换分解成的对换数.

一个置换称作**偶**的(**奇**的)，如果它的减量是偶的(奇的).

置换群在数学和物理学上都具有重要的作用. 下面是关于置换群的一个重要定理.

定理 1.4.2 每一 k 阶有限群与置换群 S_k 的一子群同构.

这一定理在抽象群理论中具有重要的地位.

1.5 线 性 空 间

1. 线性空间的定义

定义 1.5.1 **线性空间**(或**矢量空间**) V 由

(1) 一个集合 V，X_0，X_1，X_2，$\cdots \in V$，称为**矢量**.

(2) 一个数域 K (实数域或复数域)，a，b，$\cdots \in K$，连同两种运算：

①矢量加法“+”，

②数量乘法“∘”

所构成，同时满足如下两个条件：

条件 $A:(V,+)$ 是个加法群，即

i. $X_i, X_j \in V \Rightarrow X_i + X_j \in V$， (封闭性)

ii. $X_i + (X_j + X_K) = (X_i + X_j) + X_K$， (结合性)

iii. $X_0 + X_i = X_i + X_0 = X_i$， (单位元)

iv. $X_i + (-X_i) = X_0 = (-X_i) + X_i$， (逆　元)

v. $X_i + X_j = X_j + X_i$； (交换性)

条件 B：

i. $a \in K, X_i \in V \Rightarrow aX_i \in V$， (封闭性)

ii. $1 \circ X_i = X_i \circ 1 = X_i$， (单位元)

iii. $a \circ (b \circ X_i) = (a \circ b) \circ X_i$， (结合性)

iv. $a \circ (X_i + X_j) = a \circ X_i + a \circ X_j$，

$(a+b) \circ X_i = a \circ X_i + b \circ X_i$. (双线性)

V 也称作数域 K 上的矢量空间，K 叫做 V 的**系数域**. 如果 V 的系数域是实数域 $\mathbf{R}$(复数域 $\mathbf{C}$)，则 V 称为实(复)矢量空间.

在上述线性空间的定义中，若将 V 取为 K，则可知实数集合或复数集合都是

线性空间.

2. 基底与坐标

定义 1.5.2　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n \in V$，若

$$a^1 X_1 + a^2 X_2 + \cdots + a^n X_n = 0 \Rightarrow a^i = 0, i = 1, 2, \cdots, n,$$

则矢量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是**线性无关**的，否则就是**线性相关**的.

定义 1.5.3　矢量空间 V 称为 $\boldsymbol{n}$ **维**的，如果能够找到一组 n 个非零线性无关的矢量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，而任意一组 $n+1$ 个非零矢量都是线性相关的. 通常将空间 V 的维数记为 $\dim V$.

任意一组这样的非零线性无关矢量的集合，可取作该矢量空间的一组**基(底)**，或**标架**. 构成基底的矢量称为**基底矢量(基矢)**或**生成元**. 因此有限维线性空间基矢的个数是确定的.

n 维矢量空间 V^n 的基底可取为如下行的形式：

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \cdots, 0), \ \cdots, \quad e_n = (0, \cdots, 0, 1),$$

也可取为列的形式. V^n 中任一矢量 X 可唯一地写成

$$X = X^1 e_1 + X^2 e_2 + \cdots + X^n e_n = X^i e_i, \tag{1.1}$$

此处 $X^i, i = 1, 2, \cdots, n$，称为矢量 X 的**坐标**. 因此也可用 $(X^1, X^2, \cdots, X^n)$ 表示矢量 X. 式(1.1)右端的记法 $X^i e_i$ 称为 Einstein(爱因斯坦)**求和约定**. 该约定规定对表达式同一端的相同的上下指标，须对该指标的值域(这里是由 1 到 n)求和.

如果 V^m 是个矢量空间,且其每一矢量都包含在矢量空间 V^n 中,则称 V^m 是 V^n 的(线性)**子空间**. 若 V^m 中的所有矢量并不能取尽 V^n 中的矢量,则 V^m 叫做 V^n 的**真子空间**. 于是 V^n 也是自身的子空间，但不是真子空间.

例 1.5.1　将 n 重数空间 $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}$ 中的每一有序实数组看作一矢量，取实数域 $\mathbf{R}$ 为系数域，按通常方式定义矢量加法和数量乘法，易知定义 1.5.1 中条件 A 和 B 是满足的. 此时空间 $\mathbf{R}^n$ 将成为 n 维实矢量空间.

设 V_1，V_2 是两个非交的矢量空间($V_1 \cap V_2 = \varnothing$)，我们用 $V = V_1 \oplus V_2$ 表示由 $V_1 \cup V_2$ 形成的矢量空间，且 $\forall$ 矢量 $X \in V$，都可用一对矢量 $X_1 \in V_1$ 和 $X_2 \in V_2$ 来写成；则称矢量空间 $V = V_1 \oplus V_2$ 为 V_1 与 V_2 的**直和**.

1.6　线 性 代 数

定义 1.6.1　**线性代数 $\boldsymbol{A}$** 由

(1) 一个集合 V，X_0，X_1，X_2，$\cdots \in V$，被称为矢量；

(2) 一个数域 K，a，b，$\cdots \in K$.

连同三种运算：

(1) 矢量加法“+”；

(2) 数量乘法“∘”；

(3) 矢量乘法“Δ”.

所构成，同时满足如下三个条件：

条件 A：定义 1.5.1 中的条件 A，

条件 B：定义 1.5.1 中的条件 B，

条件 C：

i. X_1，$X_2 \in V \Rightarrow X_1 \Delta X_2 \in V$； (封闭性)

ii. $(X_1 + X_2)\Delta X_3 = X_1 \Delta X_3 + X_2 \Delta X_3$；

$X_1 \Delta (X_2 + X_3) = X_1 \Delta X_2 + X_1 \Delta X_3$. (双线性)

对于线性代数，尚可附加一些其他的要求. 满足这些不同的附加要求，将得到不同的代数族. 这些附加要求是：

(1) $(X_1 \Delta X_2)\Delta X_3 = X_1 \Delta (X_2 \Delta X_3)$； (结合性)

(2) $X_1 \Delta 1 = X_1$； (单位元)

(3) $X_1 \Delta X_2 = \pm X_2 \Delta X_1$； (对称，反对称性)

(4) $X_1 \Delta (X_2 \Delta X_3) = (X_1 \Delta X_2)\Delta X_3 + X_2 \Delta (X_1 \Delta X_3)$.

一般地，单位元 1 不同于矢量加法或矢量乘法的单位元. 不满足矢量乘法结合律的线性代数，称为**非结合线性代数**.

例 1.6.1 $n \times n$ 实方阵的集合，在矩阵加法和实数的数量乘法下，构成一个 n^2 维实矢量空间. 该矢量空间的基矢可取为 E^i_j. E^i_j(这里 i，j 是矩阵指标)是第 i 行第 j 列上的一个元素为 1 而其余元素皆为零的 $n \times n$ 方阵. $\{E^i_j\}(i, j=1, 2, \cdots, n)$构成这一矢量空间的一组基. 如果要求此矢量空间还具有矩阵乘法，且将矩阵乘法当作矢量乘法 Δ，则这一空间就成为一个线性代数. 加法“+”的单位矢量是 0 矢量；矢量乘法“Δ”的单位矢量是单位矩阵 $I = [I^i_j]$，这里 i，j 为矩阵元指标；数乘“∘”的单位元是数 1. 此外，该矢量空间还满足附加要求中的(1)和(2)，故将其称为具有单位元的**线性结合代数**.

例 1.6.2 我们知道 $n \times n$ 实对称方阵的集合是例 1.6.1 讨论的矢量空间的线性子空间. 这种方阵可以记成

$$\tilde{A}^i_j = A^j_i = A^i_j \quad 或 \quad \tilde{A} = A,$$

这里“~”为矩阵的转置符号. 然而这样一些方阵的集合却不能满足矩阵乘法运算

封闭性的要求，因而不能成为代数. 这是因为，两个对称方阵之积一般地并不是对称方阵：

$$\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A} = BA \neq AB$$

或

$$\widetilde{A^i_j B^j_k} = B^k_j A^j_i \neq A^k_j B^j_i \, .$$

若把矢量乘法运算“Δ”定义为

$$A \Delta B = \{A, B\} = AB + BA \, ,$$

且规定

$$\{A, aB + bC\} = a\{A, B\} + b\{A, C\} \, ,$$

这里{ , }称为**反对易算子**, 此时, 线性代数定义中的条件 C 全部被满足, 所以 $n \times n$ 实对称方阵在对称化矢量乘法(或反对易矢量乘法)下，构成一个代数.

例 1.6.3　$n \times n$ 实反对称方阵的集合在矩阵乘法下也不封闭. 若采用反对称化矢量乘法定义合成运算“Δ”，即

$$A \Delta B = [A, B] = AB - BA \, ,$$

$$[A, aB + bC] = a[A, B] + b[A, C] \, ,$$

这里[,]称为**对易算子**, 此时线性代数定义中的条件 C 也全部被满足，因而将得到一个代数.可以验证，这一代数是非结合代数，通常也不具有单位元 1.

从前面几节的论述可知，随着所要求条件的增加，我们由集合逐次得到了群、矢量空间和线性代数. 对于集合，并没有规定代数运算；群具有乘法运算；矢量空间除具有交换群的乘法(矢量加法)运算外，尚具有数乘运算；代数除具有矢量空间所具有的两种运算外，尚具有矢量乘法(代数乘法)运算. 一个系统所满足的条件越多，它的结构就越复杂. 对于结构较简单的系统成立的结果，当该系统纳入较复杂的系统中之后，这些结果仍然成立.

如果一个代数结构(群、矢量空间或代数等)到另一个类似的代数结构中的映射，保持该代数结构的合成运算不变，则此映射叫做**同态**. 若这样的映射是个双射，则称该映射为**同构**. 这样的两个结构也被称为同构.

当这两个代数结构是同一个时，这种同构(同态)称为**自同构**(**自同态**).

若这种由一个代数结构到另一个代数结构中的映射能够具体地写出和解析地描述，则该映射被称为这一代数结构的**实现**. 若这种映射是一个代数结构到矩阵集合中的映射，则该映射被称为这一代数结构的**线性表示**. 线性表示是最重要最常用的表示，本书只限于讨论线性表示，并简称为**表示**.

1.7 拓扑空间与度量空间

我们对 n 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 都很熟悉，度量空间是欧氏空间的一种自然推广，由度量空间又可过渡到更一般的拓扑空间.

1. 度量空间

定义 1.7.1 设 U 是一个集合， $\rho:U\times U\to\mathbf{R}$ 为一映射，若对任意的 $a,b,c\in U$ ，有

(1) $\rho(a,b)\geqslant 0$，且 $\rho(a,b)=0$，当且仅当 $a=b$； (非负性)

(2) $\rho(a,b)=\rho(b,a)$； (对称性)

(3) $\rho(a,c)\leqslant \rho(a,b)+\rho(b,c)$， (三角不等式)

则称 ρ 为 U 的一个**度量**. 序偶(U , ρ)称为**度量空间**，当度量 ρ 无需指明时，也可称 U 为度量空间. $\rho(a,b)$ 叫做点 a 到点 b 的**距离**，因而度量空间又称**距离空间**.

例 1.7.1 欧氏空间 $\mathbf{R}$.

令 $\mathbf{R}$ 为实数集合，定义映射 $\rho:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 如下：对任意 $(a,b)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ ， $\rho(a,b)=|a-b|$ ，这里| |为绝对值符号. 可以验证 ρ 为 $\mathbf{R}$ 的一个度量. 因而序偶($\mathbf{R}$, ρ)为度量空间，称为**欧几里得空间**. $\mathbf{R}$ 的这一度量 ρ 通常是自明的，因而也可称 $\mathbf{R}$ 为一维欧几里得空间.

例 1.7.2 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$.

令 $\mathbf{R}^n$ 是实数集合 $\mathbf{R}$ 的 n 重直积，定义映射 $\rho:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 如下：对于任意 $a=(a_1,\cdots,a_n)$， $b=(b_1,\cdots,b_n)\in\mathbf{R}^n$ ，定义

$$\rho(a,b)=\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

可以验证，这样定义的 ρ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个度量. 序偶($\mathbf{R}^n$ ， ρ)是个度量空间，称为 ***n* 维欧几里得空间**. 也可将 $\mathbf{R}^n$ 称为 ***n* 维欧氏空间**.

例 1.7.3 离散度量空间.

令 U 是一个集合，映射 $\rho:U\times U\to\mathbf{R}$ 定义为：对于任意 $(a,b)\in U\times U$ ，有

$$\rho(a,b)=\begin{cases}0, & \text{若}\, a=b;\\ 1, & \text{若}\, a\neq b.\end{cases}$$

可验证 ρ 为 U 的一个度量，称为**离散度量**. 序偶(U, ρ)称为**离散度量空间**.

令 a 为度量空间(U, ρ)上的任一点，ε 是任一正数. U 中满足不等式 $\rho(a,x)<\varepsilon$

的点 x 的集合，称为 U 中的以 a 点为中心以 ε 为半径的**开球**.

定义 1.7.2　设 A 是度量空间 U 的一个子集，若 A 的每一点都有一个开球包含于 A，则 A 叫做度量空间 U 的**开集**.

2. 拓扑空间

定义 1.7.3　设 U 是一个集合，$\mathcal{T}$ 是 U 的子集族，满足下面的条件：

(1) $\varnothing$，$U \in \mathcal{T}$；

(2) $\mathcal{T}$ 中任意个集合的并属于 $\mathcal{T}$；

(3) $\mathcal{T}$ 中任意有限个集合的交属于 $\mathcal{T}$；

则称 $\mathcal{T}$ 为 U 的一个**拓扑**. 序偶(U，$\mathcal{T}$)称为**拓扑空间**，当拓扑 $\mathcal{T}$ 无需指明时，也可称 U 为拓扑空间. $\mathcal{T}$ 中的集合可称为拓扑空间(U，$\mathcal{T}$)的**开集**.

令 x 为拓扑空间 U 中的一点，包含 x 的 U 的开集 N_x 叫做 x 在 U 中的**邻域**. 用符号记之，将有 $x \in N_x \in \mathcal{T}$.

对于具体问题的讨论，上面定义的拓扑空间过于一般，为此常引入对拓扑空间的限制条件. 例如，下面的一个**分离性公理**便是常采用的：

拓扑空间 U 中的任意两个不同的点具有不相交的邻域，即若点 a，$b \in U$，$a \neq b$，则一定存在两个邻域 N_a，$N_b \in \mathcal{T}$，把这两个点分离，或写成 $N_a \cap N_b = \varnothing$.

满足如上分离性公理的拓扑空间叫做**豪斯多夫(Hausdorff)空间**.

一个集合 U，当定义了它的度量 ρ 时，U 就成为一个度量空间；当定义了它的拓扑 $\mathcal{T}$ 时，它将成为拓扑空间. 若把度量空间(U，ρ)的全体开集记作 $\mathcal{T}$，则 $\mathcal{T}$ 便是 U 的一个拓扑，因而是拓扑空间(U，$\mathcal{T}$)的拓扑. $\mathcal{T}$ 叫做度量 ρ 所诱导出的 U 的拓扑，因而度量空间(U，ρ)也可被看作拓扑空间，这个拓扑空间就是(U，$\mathcal{T}$).

反过来，已知一拓扑空间(U，$\mathcal{T}$)，如果存在 U 上的一个度量 ρ，使得 $\mathcal{T}$ 就是 ρ 所诱导的度量空间(U，$\mathcal{T}$)的全体开集，则称拓扑空间(U，$\mathcal{T}$)是可度量化的. 顺便指出，并非每一拓扑空间都是可度量化的，拓扑空间比度量空间更为广泛.

例 1.7.4　二维欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 是一个点集，$\mathbf{R}^2$ 上的拓扑可以用具有任意中心和任意半径的一些开圆提供. $\mathbf{R}^2$ 的拓扑是由所有这些开圆及其任意个的并和有限个的交构成. 也可以利用具有任意中心和任意边长的一些开正方形作为 $\mathbf{R}^2$ 上的拓扑. 这两种方式构成的拓扑是等价的. 在这个拓扑下，$\mathbf{R}^2$ 是一个豪斯多夫空间. 因为对于不相同的任意两点 $a, b \in \mathbf{R}^2$，距离 $\rho(a,b) \neq 0$，我们总可以 a 和 b 为中心，以 $\frac{1}{3}\rho(a,b)$ 为半径找到两个不相交的开圆，这两个开圆将是 $\mathbf{R}^2$ 的不相交的两个邻域.

例 1.7.5　n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 在“球”或“方体”拓扑下是个豪斯多夫空间.“球”

拓扑将由具有任意中心和任意半径的一些开球提供. 所有这些开球及其任意个的并和有限个的交构成了 $\mathbf{R}^n$ 的一个拓扑. “方体”拓扑将由具有任意中心和任意边长的开方体及其任意个的并和有限个的交构成. $\mathbf{R}^n$ 的这种“球”和“方体”拓扑是等价的. 显然, $\mathbf{R}^n$ 中的任意两点是可以被分离的, 因而 $\mathbf{R}^n$ 是一个豪斯多夫空间.

拓扑空间 U 到拓扑空间 V 的映射 f 在 $x\in U$ 是连续的, 如果给定 $f(x)$ 的任一邻域 $B\subset V$, 存在一个 $x\in U$ 的邻域 A 使得 $f(A)\subset B$. 若 f 在 U 的所有点 x 连续, 则称 f 在 U 上**连续**.

设 $f: U\to V$ 为拓扑空间 U 到拓扑空间 V 上的映射, 当且仅当对 V 的任一开集 B, 原象 $f^{-1}(B)$ 是 U 的开集时, f 才是连续的.

设 U, V 为拓扑空间, 若映射 $f: U\to V$ 是个连续双射, 且 f^{-1} 也是连续的, 则称 f 是 U 到 V 上的**同胚**, 也称 U 与 V 同胚.

拓扑空间之间的同胚是个等价关系.

例 1.7.6　$n+1$ 维欧氏空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的 n 维超球面 S^n 是个拓扑空间. 当 S^n 上的一点(如“北极”)去掉后, 该拓扑空间将与 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 同胚.

设(U, $\mathcal{T}$)为拓扑空间, $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{T}$ 的子集族, 若 $\mathcal{T}$ 的每一成员(即 U 的每一开集)都是 $\mathcal{B}$ 中某些成员的并, 则称 $\mathcal{B}$ 为拓扑 $\mathcal{T}$ 的**基**, 或称 $\mathcal{B}$ 为拓扑空间 U 的**基**.

对任何拓扑空间(U, $\mathcal{T}$), $\mathcal{T}$ 本身就是个基.

度量空间中所有的开球构成的集族是这个度量空间作为拓扑空间时的基. 作为特例, 欧氏空间 $\mathbf{R}$ 中所有开区间的集族为 $\mathbf{R}$ 的基.

3. 积空间与商空间

设$(U_1, \mathcal{T}_1), (U_2, \mathcal{T}_2), \cdots, (U_n, \mathcal{T}_n)$ 为拓扑空间, 则 $U=U_1\times U_2\times\cdots\times U_n$ 的以子集族

$$\mathcal{B}=\{S_1\times S_2\times\cdots\times S_n \mid S_i\in\mathcal{T}_i,\ \ i=1,2,\cdots,n\}$$

为基的拓扑 $\mathcal{T}$ 称为 U 的**积拓扑**. 拓扑空间(U, $\mathcal{T}$)称为拓扑空间(U_1, $\mathcal{T}_1$), (U_2, $\mathcal{T}_2$), $\cdots$, (U_n, $\mathcal{T}_n$)的**积空间**(或**拓扑积**).

集合的直积可以使我们由已给的集合做出新的集合. 拓扑积即拓扑空间的直积, 它可以使我们由已有的拓扑空间构造出新的拓扑空间, 并能把较复杂的拓扑空间化为较简单的拓扑空间来研究.

定义 1.7.4　设(U_1, $\mathcal{T}_1$)为拓扑空间, U_2 为一个集合, $f: U_1\to U_2$ 为一个到上的映射; 则 U_2 的子集族 $\mathcal{T}_2=\{A\subset U_2 \mid f^{-1}(A)\in\mathcal{T}_1\}$ 便是 U_2 的一个拓扑, 叫做**商拓扑**.

令 U 为拓扑空间，且在 U 中给定了一个等价关系 S，于是可得到一个 U 关于 S 的商集 $U/S=\{[x]\mid x\in U\}$，这里 $[x]=\{y\in U\mid ySx\}$. 同时还可得到一到上的映射 $\pi:U\to U/S$， $y\mapsto[x]$ 称为**自然投影**. 这样，通过自然投影 π 以及 U 的拓扑可以给予 U/S 以商拓扑，使之成为拓扑空间.

定义 1.7.5　若 U 为拓扑空间，S 为 U 中的等价关系，则 $(U/S$， $\mathcal{T}_{\mathrm{s}})$ 称 U 为关于 S 的商空间，这里 $\mathcal{T}_{\mathrm{s}}$ 为 U/S 的(通过 U 的拓扑和自然映射 π 给予的)商拓扑.

1.8　连通性、紧致性与同伦

1. 连通性

定义 1.8.1　若一个拓扑空间 U 是它的两个非交的非空开子集 A 与 B 的并，则 U 叫做**非连通空间**，否则，叫做**连通空间**.

通常把非连通的拓扑空间的这样一对子集 A 与 B 叫做 U 的一个**分解**：$U=A\bigcup B$.

设 U 是一个拓扑空间，a， $b\in U$， $I=\{t\mid 0\leqslant t\leqslant 1\}$ 是实数空间 $\mathbf{R}$ 中的单位闭区间.若连续映射

$$f:I\to U,$$

使得 $f(0)=a$， $f(1)=b$，则 f 叫做 U 中由 a 到 b 的一条**道路**.

如果对于 U 中的任意两点，U 中都有一条连接它们的道路，则 U 叫做**道路连通**的.

这里指出，U 中的一条道路是一个映射 $f:I\to U$，而不是点集 $f(I)\subset U$. 可能存在另一个映射 $g:I\to U$， $g\neq f$，使得 f 与 g 是 U 中的两条不同的道路；但集合 $f(I)=g(I)$. 顺便指出，道路连通的拓扑空间一定是连通的；而连通的拓扑空间不必是道路连通的.

例 1.8.1　一维欧氏空间 $\mathbf{R}$ 以及 $\mathbf{R}$ 中的任意区间是连通的. n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 以及 $\mathbf{R}^n$ 中的任意球或方体是连通的.

2. 紧致性

定义 1.8.2　设 U 是一个拓扑空间，若 U 中的一族开集 $\{U_\alpha\}$ 满足 $\bigcup\limits_{a\in J}U_\alpha=U$，则称 $\{U_\alpha\}$ 为 U 的一个**开覆盖**. 这里 J 是一个指标集合. 若开覆盖中的开集 U_α 的个数有限，则称其为**有限开覆盖**. 若 $\{U_\alpha\}$ 中的一部分 $\{U_\beta\}(\beta\in J'\subset J)$，仍是 U 的一个开覆盖，则称 $\{U_\beta\}$ 为 $\{U_\alpha\}$ 的**子覆盖**.

定义 1.8.3　若拓扑空间 U 的每个开覆盖有一个有限子覆盖，则称 U 为紧

致的.

例 1.8.2 一维欧氏空间 **R** 不是紧致空间. 因为

$$\{(-n,n)\mid n=1,2,\cdots\}$$

是 **R** 的一个开覆盖，但它不含有 **R** 的有限子覆盖.

下面给出一个定理：

定理 1.8.1 若 A 为 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的子集，则

$$A\text{紧致} \Leftrightarrow A\text{是有界闭集.}$$

例 1.8.3 欧氏空间 **R** 中的任一开区间不是紧致的， **R** 中的有界闭区间是紧致的. n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 不是紧致的， $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集是 $\mathbf{R}^n$ 的紧致子集.

紧致性、连通性和分离性是拓扑空间的重要性质. 这些性质在同胚映射下将保持不变. 拓扑空间这一在同胚映射下保持不变的性质叫做**拓扑不变性**.

3. 同伦

定义 1.8.4 设U与V为两个拓扑空间，$f_0,f_1:U\to V$ 是连续映射. 若存在另一连续映射 $F:U\times I\to V$ ， $I=\{t\mid 0\leqslant t\leqslant 1\}$ ，使得 $F(x,0)=f_0(x)$ ， $F(x,1)=f_1(x)$ ，对于所有的 $x\in U$ ，则称 f_0 与 f_1 **同伦**(记作 $f_0\simeq f_1$)；F 叫做 f_0 到 f_1 的一个**同伦**或**伦移**.

对于 $(x,t)\in U\times I$ ，有时可将 t 看成时间，从而有 $F(x,t)=f_t(x)$. 在时刻 $t=0$ ，我们有 f_0 ;在时刻 $t=1$,我们有 f_1 . $f_t(x)$ 同时连续地依赖于点 x 与时间 t . 在 f_0 伦移成 f_1 的任一时刻 t ，U 在 V 中的象是 $f_t(x)$. 当时间由 0 增加到 1 时，映射 f_0 连续地变成映射 f_1 .

如果映射 f_0 ， f_1 ： $U\to V$ 同伦，且 $f_1(U)$ 是 V 中的一个点，则称 f_0 **零伦**，可记作 $f_0\simeq 0$ ： $U\to V$.

定义 1.8.5 由 a 到 b 的两条道路 f 与 g **同伦**，如果存在一连续映射 $F:I\times I\to U$ ，使

$$F(0,t)=a,\quad F(1,t)=b,\quad \forall t\in I;$$

$$F(s,0)=f(s),\quad F(s,1)=g(s),\quad \forall s\in I\,.$$

因而道路间的同伦是通常意义下的同伦再加上整个同伦中端点保持固定的条件(见图 1.5). 若两条道路同伦，则其中一条可以通过连续变形变成另一条. 在通常欧氏空间中，所有具有相同始点和终点的道路都是同伦的. 同伦和道路同伦都是等价关系. 同伦是拓扑学中一个十分重要的概念，它具有明显的直观意义，能够用来描述空间的拓扑性质.

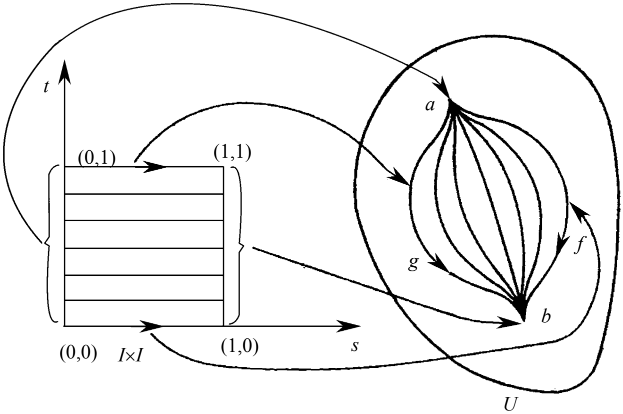

图 1.5

4. 同伦群

若 S^1 为圆周，则映射 $f: S^1 \to U$ 叫做 U 中的**闭道路**. 闭道路是一条道路，这条道路的始点 a 又是它的终点 b (即 $a=b$).

若把以 a 为始点以 b 为终点的道路记为 ab ，把以 b 为始点以 c 为终点的道路记为 bc ；则可将道路 ab 与 bc 的乘积(道路 ab 的终点为道路 bc 的始点)定义为道路 abc .

现在来考虑 U 中将 a 作为始点同时又作为终点的闭道路的集合. 把由单独一点 a 形成的道路叫做**零道路**,任何与其同伦的道路叫做**零伦**的. 很显然,以 a 为始点的定义到一个同伦的闭道路的集合，对于如上规定的乘法将构成一个群，叫做**同伦群**. 因为以 a 为始点的两条闭道路的乘积仍是以 a 为始点的闭道路，零道路将是这个群的单位元，任何一条道路 $abca$ 具有逆道路 $acba$ ，而且二者的乘积是零伦的. 最后，乘法的结合律是明显成立的. 历史上，如此定义的同伦群也称为**基本群**.

1.9　流　　形

定义 1.9.1　设 M 是一个豪斯多夫空间，它有一个开覆盖 $\bigcup\limits_{a\in J} U_\alpha = U$ ，且满足：

(1) $\forall \alpha \in J$ ，存在一同胚映射

$$\psi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \text{ (欧氏空间 } R^n \text{ 中的一个开集)};$$

(2) 若 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ ，则