



中国科学院规划教材

ZHONGGUO KEXUEYUAN GUIHUA JIAOCAI

决策理论与方法

方志耕 刘思峰 朱建军 胡明礼 编著



科学出版社

www.sciencep.com

中国科学院规划教材

决策理论与方法

方志耕 刘思峰 编著
朱建军 胡明礼

本书受到教育部博士点基金(200802870020)
和江苏省研究生管理决策理论与方法课程
体系改革与实践研究项目共同资助

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是经济、管理专业的核心教材。全书的内容分为决策分析的基本方法以及决策分析的新理论新方法两个方面。其中,决策分析的基本方法包括确定型决策与不确定型决策、风险决策、动态决策等;决策分析的新理论新方法包括不确定性多属性决策、熵决策、群决策、灰色决策、灰色博弈分析、粗糙决策、模糊决策等。本书在理论阐述上力求简明扼要、深入浅出、通俗易懂,用大量实例和算例来说明各类决策理论和方法的原理和应用。为了方便教师授课和学生自学,我们还制作了配套的教学课件。

本书是中国科学院规划教材,适合作为高等院校经济、管理专业研究生或高年级本科生教材,也可用做理工类和人文社会科学各专业的教材和参考书,还可作为企事业单位管理人员、科研人员及工程技术人员等实际工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

决策理论与方法 / 方志耕等编著. —北京:科学出版社,2009

(中国科学院规划教材)

ISBN 978-7-03-022584-9

I. 决… II. 方… III. 决策学-教材 IV. C934

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 111840 号

责任编辑:林 建 李 欢 苏雪莲/ 责任校对:曾 茹

责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 2 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2009 年 2 月第一次印刷 印张:16 1/2

印数:1—3 500 字数:313 000

定价:29.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈科印〉)

前言

决策理论与方法是研究如何科学有效地作决策的相关理论和方法的科学,是经济、管理专业一门重要的专业课程。本书是在作者多年讲授“预测与决策理论”课程及从事相关研究的基础上,依照经济、管理专业的特点,吸收国内外优秀决策理论教材的成果凝练而成。书中系统介绍了决策分析的基本方法,如确定型决策方法、风险型决策分析方法等;以及新兴的决策理论与方法,如灰色决策法、灰色博弈分析法、不确定性多属性决策法、群决策法、熵决策方法、粗糙决策分析方法等。本书主要特色是强调决策理论与方法的实用性,尽量减少烦琐的数学推导的介绍,在理论阐述上力求简明扼要、深入浅出、通俗易懂,用大量实例和算例来说明各种决策方法的具体应用,努力突出决策分析思想的渗透和实际应用,能够为解决经济与管理决策中出现的问题提供有力的分析工具。

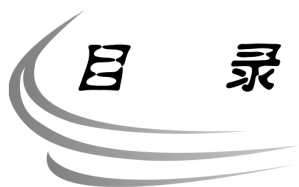
全书共分十章,第一章由刘思峰、方志耕、张娜编写;第二章由施红星、张娜、陈长军编写;第三章由朱建军、朱宁宁编写;第四章由王鹏飞、徐正栋编写;第五章由朱建军、丁叶编写;第六章由刘思峰、施红星编写;第七章由方志耕、徐正栋编写;第八章由方志耕、刘思峰编写;第九章由胡明礼编写;第十章由胡明礼、付君兴编写。全书最后由方志耕、刘思峰、朱建军、胡明礼负责统稿和审定。

本书在编写过程中,有关专家、学者提出了宝贵意见,同时得到了其他同行和科学出版社的大力支持。此外,本教材的出版得到了中国科学院规划教材项目和南京航空航天大学精品课程建设基金的支持,在此一并表示感谢!

限于作者水平,书中的缺点和错误在所难免,殷切期望有关专家和广大读者批评指正。

作者

2009年1月



前言

第一章

绪论	1
第一节 决策概述	1
第二节 决策的基本要素	7

第二章

决策分析的基本方法	10
第一节 确定型决策和不确定型决策	10
第二节 风险型决策分析方法	13

第三章

多属性决策及不确定性多属性决策方法	46
第一节 多属性决策问题的决策方法	46
第二节 不确定性多属性决策方法	48

第四章

熵决策	67
第一节 熵	67

第二节	极大熵准则及其应用	71
第三节	复熵及其应用	79
第四节	灰信息熵原理及其应用	89

第五章

	群决策理论与方法	98
第一节	群决策的基本概念	98
第二节	群决策偏好集结理论模型及方法	100

第六章

	灰色决策	120
第一节	灰色决策基本概念	120
第二节	灰靶决策	122
第三节	灰色关联决策	126
第四节	灰色发展决策	134
第五节	灰色聚类决策	138
第六节	单目标化局势决策	141

第七章

	灰博弈决策分析	145
第一节	基于纯策略的标准灰矩阵博弈分析	145
第二节	标准灰矩阵博弈的纯策略解	151
第三节	标准灰矩阵博弈的灰混合策略	154
第四节	最大、最小灰博弈值与灰混合策略的灰鞍点	163
第五节	灰混合策略的线性规划模型	165
第六节	灰混合策略的灰线性规划模型求解	166

第八章	
	灰色双矩阵博弈分析 172
第一节	灰势-纯策略博弈分析 172
第二节	“灰数规整”顺推归纳法 183
第三节	基于经验理想产量与最佳决策系数的双寡头战略定产问题研究 192
第九章	
	粗糙集决策 200
第一节	粗糙集的基本概念 200
第二节	不完备决策系统中的粗糙决策分析方法 204
第三节	偏好决策系统中获取决策规则的粗糙集方法 213
第十章	
	模糊决策 226
第一节	模糊理论的基本概念 226
第二节	模糊意见集中决策 231
第三节	模糊二元对比决策 234
第四节	模糊综合评判决策 241
第五节	模糊决策的应用 247
参考文献	 250



绪 论

■ 第一节 决策概述

一、决策和决策分析

所谓决策,简单地讲,就是作出决定,是指人们为实现预定的目标,根据一定的条件,采用科学的方法和手段,从所有可供选择的方案中找出最满意的一个方案进行实施,直至目标的实现。传统的决策常依赖于决策者个人或群体知识和才能的积累,缺乏规范性和可操作性,基本属于经验型的决策。单纯依赖这样的决策方式,显然不适合结构庞大、复杂多变的现代经济社会。系统论、控制论、信息论等新学科的出现,运筹学、概率统计等应用数学的产生和发展,为实现科学的决策提供了基础。对决策的研究和应用,产生了决策科学。目前决策科学已经得到很大发展,内容涵盖了决策心理学、决策自动化、决策支持系统、决策的评价等多方面。决策存在于社会生活的各个领域。

决策是理性(rational)人普遍从事的一种活动,也是极为重要的制胜手段。它的核心是,对未来活动的多个目标及途径作出合理的选择,以寻求最满意的行动方案。决策具有以下特点:①面对新问题和新任务作出科学决定,属于创造性的管理活动;②必须对实际行为有直接的指导作用;③具有多因素、多目标、不确定性与方案的多样性,以及决策影响的时效性和一次性。

决策分析简言之就是应用决策理论。它是对带有风险和不确定性的决策问题,提出一套概念和系统的求解方法,指导人们在社会现有条件、偏好、目标和方案

等情况下作出理想的选择。决策分析是一门与经济学、数学、心理学和组织行为学相关的综合性学科,是运筹学、管理科学和系统工程的重要分支。它的研究对象是决策,研究目标是帮助人们提高决策质量、减少决策的时间和成本。因此,决策分析是一门服从数学规律的创造性管理技术,包括发现问题、确定目标和方案的制定、选择、实施、反馈、调整以及事前评价、事后评估等。这是一个从实践到认识,再从认识到实践的分析过程,也是一个信息输入、加工处理、交换和输出的全过程。在这个过程中,必须给出进行决策的合理性论证和系统方法,必须提供满意的或最好的决策方案及其可能的结果分析。

决策分析的主要方法有:以期望为标准的分析法(成本、费用和效用、风险的期望值, Bayes 法、矩阵法和树形法等),以合理性和最大可能性为标准的比较优势法及淘汰法等。

Bayes 决策模型是一类以下列基本定理为依据的决策分析方法。该定理给出了选择决策方案的理性原则:在已知不确定性状态变量 θ 的先验概率密度函数 $f(\theta)$ [或 $P(\theta)$] 的情况下,按照收益、费用、机会损失或风险的期望值大小对决策方案排序。最大的收益或效用,最小的费用、机会损失或 Bayes 风险期望值,对应于最优的决策方案。

现代决策理论的主要特点在于,以概率和数理统计为基础,以统计判定理论和高等数学为工具,广泛地收集和处理信号,考虑人的心理和外在环境、市场等应变因素,指导人们把各类工程技术因素与经济效益一起来作定量分析,并以电子计算机为辅助手段,研究决策的性质和规律、模型与方法,以寻求整体的最优解或满意解(行动方案)。因此,决策具有目的性、信息性、经济性和实践性四大基本属性。而应变是更高层次的属性。

“管理就是决策”,这是许多人都熟悉的一句话,它说明决策在管理科学和实践中的重要性,然而在国内外众多决策的论文和专著中,很少对决策作出过明确的定义。从决策研究的文献来看,有两个比较明显的原因与这种现象有关:一是在具体的决策问题研究中,决策的意义较为具体和明确,不需要对决策进行概念定义;二是当脱离实际问题讨论决策时,实际上是在研究决策分析,而不是抽象地决策。从这一点可以看出,决策研究是一个与实际问题紧密联系的概念,决策理论的研究发展过程也反映了这一点:许多决策理论和方法是从具体的管理实践和其他领域中产生的。

按照 R. A. Howard 和 H. A. Simon 的观点,决策是对稀有资源的备选分配方案进行排序的过程;Gregor 在《决策分析》中,将决策定义为:对决策者将采取行动的选择过程。从这里可以看出,决策是一个已知目标和方案的排序和选择过程,通俗地说就是已经知道“做什么”,要解决的问题是“怎么去做”或“怎么做得更好”,它与通常人们理解的决策概念是有一定差别的。通常人们理解的决策侧重于“做什

么”。实际上在决策分析的研究中,总是事先给出决策目标和决策准则的。在英语中与决策对应的有两个单词:decision 和 decision making,讨论决策的文献中很少单独用 decision,通常使用 decision making,即讨论如何“作决策”这一过程,而不是抽象地去“决策”。

决策系统的三大基本要素为:

(1) 不可控因素——自然状态集。它是不以人的意志为转移的客观因素,其集合又叫状态空间,记为

$$\Theta = \{\theta, \theta, \dots, \theta_m\} = \{\theta\}, \quad i = 1, \dots, m$$

Θ 的元素 θ_i 叫做状态变量。

(2) 可控因素——决策方案。它是有待于人们进行选择的主观因素,其集合叫做决策(或策略,或行为,或行动,或方案,或活动)空间,记为

$$A = \{a, \dots, a_m\} = \{a_j\}, \quad j = 1, \dots, n$$

其中, A 的元素 a_j 叫做决策变量。

(3) 在外界环境某种状态 θ 发生时,决策方案 a_j 实施后的损益值(即利润型问题所获的收益值,或成本型问题所消耗的费用值)记为 v_{ij} 。它显然是 v_i 和 a_j 的函数

$$v_{ij} = v(\theta, a_j), \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$$

当状态变量离散时,损益值构成矩阵

$$V = (v_{ij}) = \begin{bmatrix} v(\theta_1, a_1) & v(\theta_1, a_2) & \cdots & v(\theta_1, a_n) \\ v(\theta_2, a_1) & v(\theta_2, a_2) & \cdots & v(\theta_2, a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v(\theta_m, a_1) & v(\theta_m, a_2) & \cdots & v(\theta_m, a_n) \end{bmatrix}$$

损益值是决策系统的目标。我们总是寻求(费用、成本、风险)期望值最小,或收益(利润、效益、效率、效用、价值)期望值最大,或目标达到满意值的最优方案 $a^* = a_j^*$ 。关键的问题是: j^* 等于几? 相应的目标极值 $V^* = v_{ij}^*$ 达到多少?

状态空间、策略空间和损益函数组成了决策系统

$$D = D(\Theta, A, V)$$

决策目标的选择规则叫做决策规则(decision rule),它经常蕴涵在目标的陈述中。例如,在单纯追求利润的决策问题中,决策规则为利润越大越好;反之,对成本型问题决策规则是目标为成本越小越好。还有一些决策系统,决策规则是目标值越接近某一个值越好,或必须小于某值,等等。

关于决策系统的目标、准则和属性的概念,国内外学者有大量的论述,但又不尽相同。表 1.1.1 给出了三者的比较。

表 1.1.1 目标、准则和属性的概念

目标	准则	属性
决策者希望达到的状态,工作努力的目的	决策判断的标准,备选方案的有效性度量	决策方案的性能、质量参数、特征和约束,如技术指标、重量、年龄、声誉和漂亮等,用于评价它达到目标的程度和水平

二、决策理论的发展

决策理论最初是在行政学和统计学的基础上发展起来的,主要研究包括决策机理、决策规则、决策模型以及决策方法等内容。

自有人类社会以来,人们一直都没有离开过决策,而且一直都在努力探索着怎样或者应该怎样作出科学决策的途径。决策理论的发展可以追溯到 18 世纪上半叶效用值概念的提出。Nicholas Bernoulli 设计了著名的圣彼得堡悖论,生动地说明了以期望收益值作为决策准则与实际决策行为之间存在矛盾,从而对风险报酬应根据其期望报酬评价(期望收益极大化原则)的传统观念提出了挑战。Daniel Bernoulli 还进一步论述了效用值的概念以及效用函数的可能形式,提出了基于财富水平的风险展望应根据其期望主观值加以衡量的思想,并指出了财富的边际效用递减的原理。19 世纪下半叶,效用作为一个专用术语被人们广为接受,当时其主要含义专指 19 世纪新古典经济学中的商品效用。经济学家们利用 Daniel Bernoulli 的边际效用递减原理研究了消费者需求理论,进一步发展了 19 世纪新古典学派的商品效用思想,逐渐形成了传统意义上的效用理论。但是在进入 20 世纪后,效用理论发展缓慢,其主要原因之一就是传统的效用理论还不具有直观的数量意义。虽然有学者一直致力于研究基于偏好差的效用测量,但收效甚微。

1944 年,John von Neumann 和 Oskar Morgenstern 出版了在决策科学史上具有划时代意义的巨著——*Theory of Games and Economic Behavior*,提出了一组看起来似乎是合乎“理性”的决策行为公理,即 von Neumann-Morgenstern 理性行为公理体系,证明了在决策行为满足这一公理体系的前提下,决策者可以对决策问题的各种决策方案的后果设定效用值,并根据期望效用值的大小来确定自己喜爱的决策方案,从而说明了期望效用值可以作为决策的理性标准,解决了长期悬而未决的关于如何遵循理性决策规则求得 Bernoulli 首先提出的效用值的问题。von Neumann-Morgenstern 理性行为公理体系的建立,标志着现代决策理论的开端,也为规范型决策理论奠定了基石。半个多世纪以来,决策理论得到了飞速的发展,围绕着该公理体系——从公理体系本身的不断改善到其上的效用表示的研究与应用,在理论和实用上都取得了丰硕的研究成果。直到现在,von Neumann-Morgenstern(线性)期望效用理论仍然在现代决策理论中占有重要的地位。

20 世纪 50 年代, Wald 和 Leonard J. Savage 在 Von Neumann-Morgenstern 决策理论的基础之上, 研究了统计决策问题, 并建立了相应的决策理论体系。60 年代, R. A. Howard、H. Raiffa 以及 W. Edwards 进一步发展了统计决策理论, 系统地研究了 Bayes 决策理论付诸实施的具体步骤, 考虑了通过试验收集新的信息以改进决策分析方法的可能性。

与规范型决策理论(理性决策理论)研究的角度不同, W. Edwards 和 M. Allais 考虑了理性决策理论在实际决策行为中的真实性问题, 即人们的实际决策行为是否与 Von Neumann-Morgenstern 理论或者 Leonard J. Savage 理论相符, 由此引发了人们对描述型决策理论(行为决策理论)的研究。心理学家 W. Edwards 曾经致力于决策分析中信息处理过程的研究, 他发现规范型决策理论模型中隐含了许多难以避免的系统性偏差, 由于人们认知错觉的普遍存在, 在没有智能性或者实物性的辅助工具的引导之下所作出的直观判断往往会出现失误。经济学家 M. Allais 认为概率的判定过程应该与效用值无关, 而且效用值的计算也应该不受事件出现概率大小的影响, 他建议概率和效用值应该组合成一个有别于数学期望值的优先度指标。

在 Von Neumann-Morgenstern 理性行为公理体系中, 受到来自描述型决策理论派学者攻击最多的是独立性公理。首先, Allais 设计了著名的 Allais 悖论, 指出独立性公理并不是经常都能得到满足的; 之后, Morrison、MacCrimmon、MacCrimmon 和 Larsson、Hagen、Kahneman 和 Tversky 更是系统地提供了违背独立性公理的例证。

Flood、May、MacCrimmon 和 Larsson 在研究多目标决策问题的时候, 指出了“克星循环”现象的普遍存在性, 对传递性公理也提出了质疑。

此外, Georgescu、Thrall 和 Chipman 利用人们的决策行为所具有的确定性效应, 设计出了可能存在“无限好”或者“无限坏”的备选方案的决策问题, 从而也对连续性公理提出了有力的挑战。

在 Von Neumann-Morgenstern 理性行为公理体系中, 唯有连通性公理(该公理假设备选方案集合中的元素可以成对比较)还没有人对此提出太多异议。然而, 我们发现在实际决策问题中, 由于决策环境的复杂性以及决策者理性的有限性, 人们并不是总能分辨每对决策方案的优劣, 即连通性公理也不是总能得到保证的。

Aumann 完全放弃连通性公理而研究部分序展望空间上的效用表示理论, 证明了基于独立性公理以及弱连续性公理(线性)效用函数的存在性定理。但是, 由于部分序展望空间的概念过于普遍, 不能保证(线性)效用函数的相对唯一性, 事实上难以为实际决策问题提供有效的分析依据。因此, 寻求弱化连通性公理的适当条件, 以满足效用函数的相对唯一性已成为规范型决策理论研究的又一重要内容。

实际生活中的决策过程往往不是单个决策者的行为, 而是由多个人组成的群

体共同参与决策的群体行为。每一项决策都应该尽量满足这个群体中的每一个成员的意愿和要求,因此如何集中群体中各个成员的意见以形成整个群体的意见就显得十分重要。群决策和社会选择理论是决策理论的重要内容之一,K. J. Arrow 为此作出了非常突出的贡献。他的不可能性定理指出:在符合一组“理性”原则的条件之下,不存在能集结群体中(社会中)所有成员的偏好而形成该群体的(社会的)一个统一偏好的社会福利函数。该定理对群决策理论和社会选择理论的贡献犹如能量守恒定理对物理学的贡献一样重大。

历史上,包括 Von Neumann、Morgenstern 以及 Allais 在内的许多管理学家都曾力求建立一个既能满足描述的精确性,又能满足规范的合理性要求的决策理论,然而 A. Tversky 和 D. Kahneman 的研究结果表明,没有一种理论能同时满足这两个方面的要求。他们认为,规范模型所需遵循的必要条件和充分条件,从描述的观点来看却往往是不真实的;而以描述性研究为主要内容的描述型决策理论不仅是规范型决策理论的先行阶段,而且是不可替代的、独立的研究领域。规范型决策理论与描述型决策理论相辅相成、彼此促进,构成了现代决策理论研究的基本格局。

正是由于规范型决策理论(理性决策理论)与实际决策行为之间存在着诸多差异,才促使规范型决策理论与描述型决策理论研究继续深入发展,并在短短几十年之间取得了丰硕的研究成果。这包括 Chew 和 MacCrimmon 的权重效用值理论, Machina 的局部效用函数理论,Becker 和 Sarin 的事态体关联效用理论, Fishburn 的双线性(SSB)效用理论,以及贾建民和 James S. Dyer 的风险价值理论等。然而,迄今为止,对于许多有重大实际意义的决策问题,仍然缺少非常有效的分析方法。

三、决策的分类

依据不同的标准,决策的分类是不同的。下面简要地介绍几种常见的决策分类。

1. 根据决策目标的影响程度不同划分

根据决策目标的影响程度不同,可将决策划分为战略决策、策略决策和执行决策。战略决策是具有全局性、方向性和原则性特征的一种决策,涉及与生存和发展有关的全局性、长远性问题;策略决策是具有局部性、阶段性特征的一种决策,是以达到战略决策所规定的目标而进行的决策;执行决策则是根据策略决策的要求对执行行为方案的选择。

2. 根据决策问题的重要性程度不同划分

根据决策问题的重复性程度不同,可将决策划分为程序性决策和非程序性决策。程序性决策一般是为了解决那些经常重复出现、性质非常相近的例行性问题,

可按程序化的步骤和常规性的方法处理,是可重复的;非程序性决策与程序性决策相对,通常处理的是那些偶然发生的、无先例可循的、非常规性的问题,决策者难以照章行事,需要有创造性思维作出应变的决策,且一般是一次性的。

3. 根据决策目标的多寡划分

根据决策目标的多寡,可将决策划分为单目标决策和多目标决策。单目标决策是就单一问题所进行的比较简单的决策;多目标决策是就解决多项问题所进行的比较复杂的决策。

4. 根据决策使用方法的划分

根据决策使用方法的划分,可将决策划分为定性决策和定量决策。如果描述决策对象的指标都可以量化,我们可以使用数量化的方法进行决策,也就是定量决策;否则,就只能使用定性决策。

5. 根据自然状态的可控程度划分

根据自然状态的可控程度不同,可将决策问题分为确定型、不确定型和风险型。确定型决策是指自然状态完全确定,作出的选择结果也是确定的;风险型决策是指未来出现何种自然状态是不能完全确定的,但可以预测其发生的概率;不确定型决策是指不仅无法确定未来出现哪种自然状态,而且对其出现的概率也一无所知。

6. 根据决策过程的连续性划分

根据决策过程的连续性,可将决策划分为单项决策和序贯决策。单项决策是指整个决策过程只作一次决策就得到结果,而序贯决策是指整个决策过程由一系列决策组成。

■ 第二节 决策的基本要素

决策要素是为了更深刻地理解和认识管理者的决策过程而提出的概念。一般地,科学决策的基本要素主要应包括以下六个方面的内容。

一、决策者

决策者是决策的关键,可以是单独的个人,也可以是由多人组成的群体或机构(如委员会)。它是进行科学决策的基本要素,也是诸要素中的核心要素和最积极、最能动的因素,是决策成败的关键。

决策者的智力结构至关重要。一个具有合理智力结构的决策者,不仅能使人各尽其才,而且可以通过有效的结构组合,发挥出巨大的集体力量。

决策者的思维方法是决策的重要条件。人类思维方法可以分为抽象思维、形象思维、灵感思维及创造性思维四种。抽象思维善于抛开事物千姿百态的具体形

象而抓住其本质,适用于程序决策;形象思维用直观或艺术形式在虚无缥缈的条件下确定目标;灵感思维可以在山穷水尽的情况下,使人思路纵横、茅塞顿开;而创造性思维可以开拓认识新的领域,开辟事物新的局面。

决策者的品德修养是重要基础,它能调动下属的积极性和主动性。这要求决策者以身作则,以良好的形象创造良好的组织风气和人际关系;要有民主作风,相信并依靠广大职工群众。集思广益、博采众长是决策成功的重要基础,也是决策顺利实施的保证。

二、决策目标

决策目标是指决策行动所期望达到的成果和价值。换言之,就是问题的“边界条件”。决策的目标是什么?最低限度应该达成什么目的?应该满足什么条件?这就是所谓的“边界条件”。一项有效的决策,必须符合边界条件,边界条件说明得越清楚、越精细,则据以作出的决策越有效。很多条件下,决策具有多目标,且目标间具有负相关性,这种多目标决策问题是决策中的难点。

三、自然状态

自然状态是指不以决策者主观意志为转移的情况和条件,是对环境及环境作用方式的某种描述(信息)。这种描述是否准确,可以凭经验进行观察、判断,或通过实验加以验证。决策总是涉及某种自然状态,从这个角度来说,决策是从自然状态引申出来的。

一般而言,自然状态可简单分为两大部分:①有助于处理各种情况的决策技术和知识;②环境所反映的有关信息。

决策技术和知识可以通过参与实践和接受教育得到,情报信息则是由决策者对环境直接观察、分析、诊断或通过查询信息系统得到。在实际工作中,这两个方面都对决策的科学性和合理性产生极大的影响。

四、备选方案

在确定了决策目标和自然状态后,围绕既定的目标收集信息,拟订多个备选方案,这是决策的关键。如果只有一个备选方案,就无法比较,也难以分辨方案的优劣。为了防止和避免决策失误,必须对备选方案加以全面的评价。评价内容有:方案目标是否合理;决策所依据的价值准则是否正确;备选方案在技术上是否可行;制定备选方案所采用的理论和方法是否科学;备选方案在经济上是否合理;方案在社会方面是否可行;方案是否与资源及能力相适应。评价的方法主要有经验判断法、数学分析法和实验法等。

五、决策后果

决策后果是指决策行动所引起的变化或结果。决策要在对具体决策后果进行估计的基础上进行备选方案的选择。

六、决策准则

决策准则是指选择方案所依据的原则和对待风险的态度。

科学决策应包括如下几个方面：

(1) 要运用系统理论进行决策。运用系统理论是现代决策必须遵循的首要原则。首先,应贯彻“整体大于部分之和”的原理,统筹兼顾,全面安排,各要素的单个项目的发展要以整体目标最满意为准绳;其次,协调平衡系统内外各层次、各要素、各项目之间的关系。

(2) 时机和条件是决策的基本前提。决策成功与否,与决策事件面临的主客观条件密切相关。一个成功的决策不仅要考虑到需要,还应考虑到可能。有魄力的决策者既敢于承担责任和风险,又不盲目冒险,他们通常在确认方案具有可行性时,才最后作出决定。

(3) 信息是决策的物质基础。在科学决策中,只有掌握大量信息,才能系统地对信息进行归纳、比较,从而选择、提炼出对决策者有效的信息。信息工作的质量越高,决策的基础就越坚实。决策者应该有较广泛的信息源,并增大信息收集的容量,防止信息通道的阻塞。特别是对信息的加工和分析,要准确、完整、及时,这样才能对决策有用。

(4) 要尽量使决策达到最优化。由于决策者在认识能力、时间、经费、信息等方面受到的限制,人们在决策时,不能坚持要求最理想的解答,常常只能满足于“足够好”或“令人满意”的决策。

(5) 选定一个最佳的决策方案。决策绝不只限于从几个方案中选定一个方案行动,而是遵循一定的认识规律,从提出问题开始,经过分析问题,最终确定要解决问题的一个系统分析过程。

(6) 形成一个完善的决策制度。一个完善的决策制度应包括下列几个方面:尽量征求更多人的意见;有反对意见的主意才是宝贵的;多数人赞成通过;当反对意见不被说服时最好慎重决定。

此外,决策者的价值观和对风险的态度也构成了决策准则的一部分。在作决策时,决策者本人的价值观和对风险的态度或多或少不可避免地影响了决策。



决策分析的基本方法

第一节 确定型决策和不确定型决策

一、确定型决策

在确定型决策中,决策者面对确定的未来环境和条件,掌握了完备信息,所以决策程序只需按技术的或经济的常规方法进行。运筹学里的线性规划、图网络等都是求解本问题的方法。

【例 2.1.1】 Q 副食公司考虑从 1800 千米外的 B 地采购一批西瓜,共 400 吨。购进价为 0.12 元/千克。运往 Q 的方案有两个: a_1 为铁路普通车运输,平均运价为 0.04 元/吨千米,损耗率为 20%,而且售出平均价为 0.20 元/千克; a_2 为空调车运输,运费、损耗率、售出平均价分别为 0.06 元/吨千米、2%和 0.24 元/千克。公司规定总利润超过 2000 元才可以采购。在销售不成问题的情况下,问公司是否应采购这批西瓜?若采购,应采用哪种运输方式?

解 本决策问题属于确定型的。策略空间 A 含有三个因素: a_1 为用普通车运输购进, a_2 为用空调车运输购进, a_3 为不采购。我们不难计算出它们的收益分别为

$$v_1 = -1280 \text{ 元}, \quad v_2 = 2880 \text{ 元}, \quad v_3 = 0, \quad a^* = a_2$$

即最好的决策方案为:用空调车运输购进这批 400 吨的西瓜。

二、不确定型决策

大多数情况下,决策者所面临的是不确定状况,决策者只能依据一定的简单原

则来进行分析决策,这样的简单原则,我们称之为决策准则。常用的决策准则有乐观准则、悲观准则、折中准则、等可能性准则、后悔值准则等。对于同一个决策问题,运用不同的决策原则,得到的最优方案常常会有所不同。

(一) 乐观准则

乐观准则又称最大最大准则,这是一种趋险型决策准则。决策者对未来持乐观态度,乐观决策者首先确定每个方案在最佳自然状态下的收益值,然后对其进行比较,选择其中最大收益值对应的方案作为最优方案。

【例 2.1.2】 某沿海城市的一位空调经销商,在夏季来临之前准备进货,他必须决定进货的规模是大批量、中批量还是小批量。经销商的目标是多赢利,获取尽可能多的利润,这取决于空调的销售情况,而空调的销售情况又进一步取决于未来夏季的天气状况。已知在不同天气状况下,三种进货方案的损益值见表 2.1.1,试问决策该空调经销商需采取何种进货方案?

表 2.1.1 三种进货方案的损益值

进货方案	天气状况		
	很热	一般	不热
大批量	10	4	-2
中批量	7	6	2
小批量	4	2	1

解 大批量 $\max(10, 4, -2)=10$ (万元),中批量 $\max(7, 6, 2)=7$ (万元),小批量 $\max(4, 2, 1)=4$ (万元); $\max(10, 4, -2)=10$ (万元),根据乐观准则,选择大批量进货为最优决策方案。

(二) 悲观准则

悲观准则又称最大最小准则,这是一种避险型决策准则。悲观准则与乐观准则相反,决策者对未来持悲观态度。悲观决策者首先应确定每个方案在最差自然状态下的收益值,然后对其进行比较,选择在最差自然状态下带来最多收益的方案。

【例 2.1.3】 试用悲观准则对例 2.1.2 的问题进行决策。
解 大批量 $\min(10, 4, -2)=-2$ (万元),中批量 $\min(7, 6, 2)=2$ (万元),小批量 $\min(4, 2, 1)=1$ (万元); $\max(-2, 2, 1)=2$ (万元),根据悲观准则,选择中批量进货为最优方案。

(三) 折中准则

折中准则也称乐观系数法决策准则,在一般性决策中,最好的和最差的自然状

态都有可能出现,决策者对未来事物应有一种折中的考虑。因此,可以根据决策者的估计和判断对最好的自然状态设一个乐观系数 α ,相应地最差的自然状态就有一个悲观系数 $(1-\alpha)$,以各方案的最好与最差收益值为变量,计算各自的期望值,最后选择期望值最大者所对应的方案为最优方案。

【例 2.1.4】 设定乐观系数 $\alpha=0.8$,试用折中准则对例 2.1.2 的问题进行决策。

解 乐观系数为 0.8,悲观系数就是 0.2。各方案收益期望值见表 2.1.2, $\max(7.6,6.0,3.4)=7.6$ (万元),对应的方案是大批量进货。依据折中准则,选择大批量进货为最优方案。

表 2.1.2 各方案的收益期望值

进货方案	天气状况			期望收益/万元
	很热	一般	不热	
大批量	10	4	-2	$10\times 0.8+(-2)\times 0.2=7.6$
中批量	7	6	2	$7\times 0.8+2\times 0.2=6.0$
小批量	4	2	1	$4\times 0.8+1\times 0.2=3.4$

（四）等可能性准则

等可能性准则又称拉普拉斯准则,因为无法确知各种自然状态发生的概率,可以认为它们有同等的可能性,即每一个自然状态发生的概率都是 $1/\text{状态数}$ 。在此基础上计算各个方案的期望收益值,比较选择出最大期望收益值或最小期望损失值对应的方案为最优方案。

【例 2.1.5】 利用等可能性准则对例 2.1.2 的问题进行决策。

解 依据等可能性准则,每种状态出现的概率为 $1/3$ 。各方案的收益期望值见表 2.1.3, $\max(4,5,7/3)=5$ (万元),对应的方案是中批量进货。根据等可能性准则,选择中批量进货为最优方案。

表 2.1.3 各方案的收益期望值

进货方案	天气状况			期望收益/万元
	很热	一般	不热	
大批量	10	4	-2	$10\times 1/3+4\times 1/3+(-2)\times 1/3=4$
中批量	7	6	2	$7\times 1/3+6\times 1/3+2\times 1/3=5$
小批量	4	2	1	$4\times 1/3+2\times 1/3+1\times 1/3=7/3$

(五) 后悔值准则

由决策者所造成的损失价值,称为后悔值。根据后悔值准则,每个自然状态下的最高收益值为理想值,该状态下每个方案的收益值与理想值之差作为理想目标的后悔值。决策者追求的是最小后悔值,首先在各种方案中选择最大后悔值,然后比较各种方案的最大后悔值,从中选择最小者对应的方案作为最优决策方案。

【例 2.1.6】 试用后悔值准则对例 2.1.2 的问题进行决策。

解 各状态下的最大收益值即理想值,见表 2.1.4。各状态下每种方案的后悔值,见表 2.1.5。从表 2.1.5 中找出三种方案的最大后悔值中的最小结果 $\min(4,3,6)=3$ (万元),对应于中批量进货方案。依据后悔值准则,中批量进货方案为最优方案。

表 2.1.4 各状态下的最大收益值

项目	很热	一般	不热
理想值/万元	10	6	2

表 2.1.5 各状态下的每个方案的后悔值

进货方案	天气状况			最大后悔值/万元
	很热	一般	不热	
大批量	$10-10=0$	$6-4=2$	$2-(-2)=4$	4
中批量	$10-7=3$	$6-6=0$	$2-2=0$	3
小批量	$10-4=6$	$6-2=4$	$2-1=1$	6

第二节 风险型决策分析方法

如果决策者在进行决策时,虽然无法确知未来将会出现何种自然状态,但可以了解未来可能有几种状态出现以及每种状态出现的概率,这种决策称为风险型决策。风险型决策分为人身安全、技术可靠性和管理(含经营、投资和金融)风险三个领域。20 世纪 90 年代初出现了一门新兴学科——金融工程。它将工程思维引入金融领域,即综合采用数学建模、数值计算、网络图解和仿真模拟等各种工程技术方法,创造性地解决了金融产品的设计、开发、投资分配和新金融产品的实施等各种金融问题。这里的金融产品包括所有在金融市场交易的金融工具,如股票、债券、期货、期权和互换等,也包括结算、清算、发行、承销等金融服务。金融问题的解

(solution)就是金融产品。

诺贝尔经济学奖获得者哈里·马柯威茨(Harry Markowitz)于1952年发表了著名论文——《证券组合投资选择》,从而奠定了应用数理方法来确定最佳资产组合投资的基本理论。现在,均值-方差(mean variance, MV)模型已成为人们进行组合投资理论研究和应用的基础,常被应用于风险投资问题中。

近七八年来, VaR(value at risk)方法又成为金融界作风险型决策的金钥匙。它运用可靠的金融和统计理论,把投资者面临的全部风险定量化,将投资组合的风险综合起来,测定各行各业的风险值,以预警和提高其抗风险能力。

风险型决策的主要特点是具有状态发生的不确定性。这种不确定性不能通过相同条件下的大量重复试验来确定其概率分布,因而往往只能依据“过去的信息或经验”由决策者估计。为区别由随机试验确定的客观概率,我们把前者称为主观概率。而过去的信息或经验是指作 Bayes 风险决策前在未收到新信息时已有信息和经验,我们称之为先验信息。由它估计出的概率(分布)叫做先验概率(分布)。

为了提高先验概率分布的准确性和客观性,人们常常设计一些抽样调查,运用质量检验等方法,借以收集新信息来修正先验概率分布。被修正后得到的概率分布叫做后验概率分布。

【例 2.2.1】 设某项目决策问题的状态变量是需求量 $\theta \in \Theta$, 它服从的先验概率分布为 $f(\theta) \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。现拟对需求量作一次抽样调查。对给定的 θ , 观察样本 X 的条件概率也是正态分布 $N(\theta, \tau^2)$, τ^2 为已知。试求获得上述新信息后的后验概率分布密度函数 $\bar{f}(\theta)$ 。

设 $X \in$ 随机变量样本集 X , 由于

$$\bar{f}(\theta) = f(\theta/x)$$

依据 Bayes 定理

$$f(\theta/x) = f(x, \theta) / f(x)$$

而

$$f(x, \theta) = f(x/\theta) f(\theta)$$

由已知条件, 后两者均服从正态分布, 故有

$$\begin{aligned} f(x, \theta) &= \left\{ (\sqrt{2\pi}\tau)^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x-\theta)^2}{\tau^2}\right] \right\} \times \left\{ (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(\theta-\mu)^2}{\sigma^2}\right] \right\} \\ &= (2\pi\tau\sigma)^{-1} \exp\left[\left[-\frac{1}{2} \frac{(x-\theta)^2}{\tau^2} + \frac{(\theta-\mu)^2}{\sigma^2}\right]\right] \end{aligned}$$

为方便运算, 记

$$\lambda = \frac{\tau^2 + \sigma^2}{\tau^2 \sigma^2}$$

则

$$f(x, \theta) = (2\pi\sigma)^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2}\lambda\left[\theta - \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\mu}{\tau^2} + \frac{x}{\sigma^2}\right)\right]^2\right] \exp\left[\frac{(\mu - x)^2}{2(\sigma^2 + \tau^2)}\right]$$

另一方面

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \theta) d\theta = (2\pi\lambda)^{-\frac{1}{2}} (\sigma\tau)^{-1} \exp\left[-\frac{(\mu - x)^2}{2(\sigma^2 + \tau^2)}\right]$$

故本例所求的后验概率分布密度函数为

$$\begin{aligned} \bar{f}(\theta) &= f(\theta/x) = f(x, \theta)/f(x) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2}\left[\theta - \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\mu}{\tau^2} + \frac{x}{\sigma^2}\right)\right]^2\right\} \end{aligned}$$

它服从一个均值为

$$\bar{\theta} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\mu}{\tau^2} + \frac{x}{\sigma^2}\right) = \frac{\sigma^2\mu + \tau^2x}{\tau^2 + \sigma^2}$$

方差为

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{\lambda} = \frac{\tau^2\sigma^2}{\tau^2 + \sigma^2}$$

的正态分布。

设不确定型决策问题的状态 θ_i 出现的概率为 P_i [或 $(P(\theta_i))$] ,连续时记为 $f(\theta)$,已知 P_i 的不确定型决策是风险型决策。进行风险决策最常用的数学方法是 Bayes(又称期望值)分析法。下面从指标体系和数学模型两部分分别予以介绍。

一、Bayes 决策指标体系

Bayes 决策法所用的指标见表 2.2.1。

表 2.2.1 Bayes 决策指标体系

决策函数 指标类型	收益	费用	机会损失
状态 θ_i 发生时采用 方案 a_j 的条件值	CP_{ij}	CC_{ij}	COL_{ij}
状态 θ_i 发生时采用 方案 a_j 的条件值	$EP_{ij} = CP_{ij}P_i$ $EMV_j = \sum_{i=1}^m EP_{ij}$ $EMV^* = \max_{j=[1,n]} EMV_j$	$EC_{ij} = CC_{ij}P_i$ $EMV_j = \sum_{i=1}^m EC_{ij}$ $EMV^* = \min_{j=[1,n]} EMV_j$	$EOL_i = COL_iP_i$

续表

决策函数 指标类型		收益	费用	机会损失
完全情报 (非必然) 期望值	先 验 的	$EPC = \sum_{i=1}^m \left[\max_{j=\overline{[1,n]}} EP_{ij} \right]$ $EVPI=EPC-EMV^*$	$ECC = \sum_{i=1}^m \left[\min_{j=\overline{[1,n]}} EC_{ij} \right]$ $EVPI=EMV^*-ECC$	$EVPI = \min_{j=\overline{[1,n]}} \left[\sum_{i=1}^m EOL_{ij} \right]$ $=EMV^*-ECC$
	后 验 (修 正) 的	$EMV^* = \max$ $(EMV-CS, EMV_n)$	$EMV^* = \min$ $(EMV+CS, EMV_n)$	$EVSI= EVPI_y-EVPI_n $
		$EVSI= EMV_y-EMV_n $		
		$ENGs=EVSI-CS$		

注:表中各符号的意义:CP(conditional payoff)为条件收益;EP(expected payoff)为期望收益;EMV(expected monetary value)为期望金额;EPC(expected profit under certainty)为必然期望赢利;EVPI(expected value of perfect information)为完全情报期望金额(价值);EVSI(expected value of sample information)为样本情报期望金额(价值);ENGs(expected net gain from sample)为抽样(或购买)情报净收益;CS(cost of sample)为抽样费用;CC(conditional cost)为条件费用;EC(expected cost)为期望费用;ECC(expected cost under certainty)为必然期望费用;COL(conditional opportunity loss)为条件机会损失;EOL(expected opportunity loss)为期望机会损失。

另外,表 2.2.1 中上标“*”者表示最优值;下标“i”表示第 i 种(即 θ_i)状态发生时的值;下标“j”表示采用第 j 种,即(a_j)方案时的值;下标“y”和“n”分别表示“买情报(或进行抽样调查)”和“不买情报(或不进行抽样调查)”时的值。

表 2.2.1 中第二行各类条件值 CP、CC 和 COL 的计算,可根据实际问题的经济或物理意义确定。例如,对于单件售价和进货价分别为 C 和 D 的商品 B,当销售量为 θ_i 时,订购量为 a_j 的行动方案的条件收益为

$$CP_{ij} = C\theta_i - D a_j$$

而期望值总等于相应的条件值与状态发生的概率 P_i 之积,即

$$EP_{ij} = CP_{ij} P_i$$

则第 j 个方案 a_j 的期望金额等于各种状态发生的期望值之和,即

$$EMV_j = \sum_{i=1}^m EP_{ij}$$

最优方案 $a^* = a_{j^*}$ 当然是取期望收益金额值中的最大者(如果是费用型决策问题,则取期望费用金额值中最小者)

$$EMV^* = \max_{j \in [1, n]} EMV_j = EMV_{j^*} \quad (\min_{j \in [1, n]} EMV_j)$$

条件机会损失 COL_{ij} 是指某状态 θ_i 发生时,与最优决策 a^* 相比较,某决策方案 a_j 造成的经济损失。它同不确定性型决策的损失值 $R(\theta_i, a_j)$ 一样。期望机会

损失(EOL)仍然是条件机会损失(COL)与相应的状态出现率 P_j 之积。

必然期望赢利(费用)EPC(ECC)为各状态下最佳期望收益(费用)之和。它是对未来状态完全掌握,或者说得到了对未来状态有百分之百的准确度的情报(又叫完全情报)时的最大(小)赢利(费用),是收益(或费用)的一个理论(或称理想的,而实际上难于达到)的最佳值(因为实际上是很难获得对未来不确定状态的完全情报的)。于是,完全情报的价值 EVPI 很自然地由差 $EPC - EMV^*$ ($EMV^* - ECC$) 决定。它体现了由于情报不准(不完全)而取期望值最优法决策造成赢利(费用)的减少(增大),此即有完全情报时可避免的损失,故定义为完全情报价值(期望金额) EVPI。它亦等于最小的期望机会损失总额值。期望机会损失达到这个总额值的方案,就是最优方案。

为了提高情报的准确度,我们可以购买信息中心有一定准确度的情报,或进行抽样调查取得进一步的状态概率情报,用以修正原来已知的状态(称之为先验)概率,再进行决策。先验概率仍记为 P_i 。修正后的概率,又叫修正概率或后验概率,记为 $\bar{P}_i$ 。用 $\bar{P}_i$ 代替 P_i 去计算前面已叙述的各指标值,就得到表 2.2.1 最后三行——后验(修正)的各指标结果。不同的是,下标 y 表示用 $\bar{P}'$ 计算出来的各指标值;下标 n 表示不买情报或不抽样调查,即先验(用先验概率 P_i 计算)的各指标值。这时最佳方案 a^* 对应的期望金额 EMV^* 应该取

对收益型决策问题: $EMV^* = \max(EMV_y - CS, EMV_n)$

对费用型决策问题: $EMV^* = \min(EMV_y + CS, EMV_n)$

其中,CS 为买情报,或为抽样调查的费用。如果最佳方案是买情报,则进一步求情报期望金额

$$\begin{aligned} EVSI &= |EMV_y - EMV_n| \\ &= |EVPI_y - EVPI_n| \end{aligned}$$

情报净收益 $ENGSI = EVSI - CS$ 。

当然,无论是用市场信息情报,还是用抽样调查方法来修正状态发生的概率,都难于达到完全情况的准确度。所以, EMV^* 总是介于 $\max_{j \in [1, n]} (EMV_j)$ 和 EPC 之间。

风险型决策的指标体系是本节的重点和难点,是学习下一步内容的关键所在。为突出重点,我们特安排本段内容——将主要风险型决策指标体系抽象出来先作一个综合性的介绍,使读者在事先对它们有一个高层次的总体认识。这样既能加深理解,又为进一步学习模型奠定基础,以利于纲举目张地掌握模型。当然,要透彻地掌握这些概念,举一反三,为开拓自己的新思路创造条件,还得学好后面的模型。

二、Bayes 决策数学模型及其应用

(一) Bayes 决策法

为轻松地学习模型和灵活地运用算法,我们先引入一个例子,再通过它们自然而然地综合成算法理论。

【例 2.2.2】(多行为问题,又称报童问题或破产销售问题。)第一百货商场过去 200 天关于 B 商品的日销售量记录见表 2.2.2。B 商品的进价为 200 元/件,售价为 500 元/件。如果当天销售不完,余下的将全部报废。求 B 商品的最佳日订货量 a^* 及相应的期望收益金额 EMV^* 和 $EVPI$ 。

表 2.2.2 B 商品的销售量记录

i	1	2	3	4	5
日销售量 θ_i /件	5	6	7	8	9
天数	20	40	80	30	30

解法一 这是一个收益型风险决策问题,故应列公式求解。

首先,由表 2.2.2 求出各销售量状态发生的概率,见表 2.2.3。

表 2.2.3 B 商品的状态分布表

i	1	2	3	4	5
θ_i /件	5	6	7	8	9
P_i	0.1	0.2	0.4	0.15	0.15

表 2.2.3 中最后一行数字由表 2.2.2 最后一行数字除以 200 得到。状态空间 Θ 和决策空间 A 的元素分别表示日销售量 θ_i 和日订货量 a_j ,它们都由 5 个元素($i=1,2,3,4,5$)组成:

$$\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5\} = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

条件收益不难由下式得出

$$CP_{ij} = \begin{cases} (5-2)a_j = 3a_j, & a_j \leq \theta_i; \quad i, j = 1, 2, \dots, 5 \\ (5-2)\theta_i - 2(a_i - \theta_i) = 5\theta_i - 2a_i, & a_j > \theta_i \end{cases}$$

单位是百元。期望收益为

$$EP_{ij} = CP_{ij} P_i$$

把 θ_i 和 a_j 的具体数据代入上两式的计算结果见表 2.2.4。

表 2.2.4 Bayes 决策法收益表 单位:百元

i	θ_i	P_i	$a_1=5$ 件		$a_2=6$ 件		$a_3=7$ 件		$a_4=8$ 件		$a_5=9$ 件		$EP_i^* = \max_{j=[1,5]} EP_{ij}$
			CP_{i1}	EP_{i1}	CP_{i2}	EP_{i2}	CP_{i3}	EP_{i3}	CP_{i4}	EP_{i4}	CP_{i5}	EP_{i5}	
1	5	0.1	15	1.5 *	13	1.3	11	1.1	9	0.9	7	0.7	1.5
2	6	0.2	15	3	18	3.6 *	16	3.2	14	2.8	12	2.4	3.6
3	7	0.4	15	6	18	7.2	21	8.4 *	19	7.6	17	6.8	8.4
4	8	0.15	15	2.25	18	2.7	21	3.15	24	3.6 *	22	3.3	3.6
5	9	0.15	15	2.25	18	2.7	21	3.15	24	3.6	27	4.05	4.05
合计		1		EMV_1 15		EMV_2 17.5		EMV_3 19 *		EMV_4 18.5		EMV_5 17.25	EPC 21.15

从中可以看出,最大期望收益为

$$EMV^* = EMV_3 = 19(\text{百元})$$

故最优订货量应为

$$a^* = a_3 = 7(\text{件})$$

完全情报价值为

$$EVPI = EPC - EMV^* = 21.15 - 19 = 2.15(\text{百元})$$

它是市场上关于 B 商品需求情报的最高价格。必然期望收益(或称赢利)EPC 表示 B 商品每天理想的最大利润可达 2115 元,而实际上平均期望利润的最可能极大值为 1900 元(EMV^*)。此时应每日订货 7 件。

解法二 条件机会损失是指决策不当造成的利润减少,所以

$$COL_{ij} = \max_{j=[1,n]} CP_{ij} - CP_{ij}$$

例如, $i=3$ 时,由表 2.2.4 得

$$\begin{aligned} COL_{31} &= \max_{j=[1,5]} CP_{3j} - CP_{31} \\ &= \max(15,18,21,19,17) - 15 \\ &= 21 - 15 = 6 \\ COL_{33} &= 21 - 21 = 0 \\ COL_{34} &= 21 - CP_{34} = 21 - 19 = 2 \end{aligned}$$

又如,当 $i=4$ 时

$$\begin{aligned} COL_{41} &= \max(15,18,21,24,22) - 15 = 24 - 15 = 9 \\ COL_{42} &= 24 - 18 = 6 \\ COL_{44} &= 24 - 24 = 0 \end{aligned}$$

以此类推,将所有的条件机会损失乘以相应的状态发生概率,就得到期望机会损失。把这些结果全部列入表 2.2.5 中。

表 2.2.5 Bayes 决策法机会损失表

单位:百元

i	θ_i	P_i	$a_1=5$ 件		$a_2=6$ 件		$a_3=7$ 件		$a_4=8$ 件		$a_5=9$ 件	
			COL _{i1}	EOL _{i1}	COL _{i2}	EOL _{i2}	COL _{i3}	EOL _{i3}	COL _{i4}	EOL _{i4}	COL _{i5}	EOL _{i5}
1	5	0.1	0	0	2	0.2	4	0.4	6	0.6	8	0.8
2	6	0.2	3	0.6	0	0	2	0.4	4	0.8	6	1.2
3	7	0.4	6	2.4	3	1.2	0	0	2	0.8	4	1.6
4	8	0.15	9	1.35	6	0.9	3	0.45	0	0	2	0.3
5	9	0.15	12	1.8	9	1.35	6	0.9	3	0.45	0	0
合计		1		3.15		3.65		2.15*		2.65		3.9

根据表 2.2.5 的数据和表 2.2.1 的收益列公式,有

$$a^* = a_3 = 7(\text{件})$$

$$EVPI = 2.15(\text{百元}), \quad EPC = (5 - 2) \times \bar{\theta} = 21.15(\text{百元})$$

$$EMV^* = EPC - 2.15 = 21.15 - 2.15 = 19(\text{百元})$$

结果与解法一相同。

为巩固所学概念,下面我们介绍条件机会损失 COL_{ij} 和必然期望赢利 EPC 的另一种算法。

当 B 商品供不应求时,即 $a_j \leq \theta$,造成了不足机会损失。它指的是由于决策不当(订少了货)而少赚的那部分收入金额,即利润损失。所以,此时

$$COL_{ij} = (5 - 2) \times (\theta - a_j), \quad a_j \leq \theta$$

反之,如果订货有余卖不出去,即 $a_j > \theta$,造成了过量机会损失。它指的是由于决策不当(订多了货)而浪费了卖不出去的那部分货的购进总金额,即成本损失。所以,此时

$$COL_{ij} = 2(a_j - \theta), \quad a_j > \theta$$

概括如下式:

$$COL_{ij} = \begin{cases} 3(\theta - a_j), & a_j \leq \theta, \\ 2(a_j - \theta), & a_j > \theta, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, 5$$

不难检验,用上式计算得出的数据与表 2.2.4 所列完全一致。

EPC 是指理论上的最高赢利。这就意味着要有百分之百准确的情报,即每天的订货量不多不少,恰好等于销售量,各类机会损失达到最小值零,而收益最大。

所以

$$\begin{aligned} \text{EPC} &= (5-2) \times [5 \times 0.1 + 6 \times 0.2 + 7 \times 0.4 + 8 \times 0.15 + 9 \times 0.15] \\ &= 21.15 (\text{百元}) \end{aligned}$$

【例 2.2.3】（两行为决策问题）红星机械厂有两种不同的方法装配一批由 800 个零件组成一个机件。第一种为人工装配方法，将出现零件的不合格率 θ_i 及其概率 P_i 见表 2.2.6。第二种方法为机械化装配方法，采用此方法要增加 40 元的设备费用，而不合格率 θ_i 仅为 2%。每发现装好的机件中有一个不合格零件，就需要花 1.50 元的改装费。试用 Bayes 法帮助红星机械厂作决策，求最佳装配方法 a^* 及一批零件相应的期望装配费用 EMV^* 和完全情报期望值 $EVPI$ 。

表 2.2.6 人工装配的不合格率及其概率

i	1	2	3	4	5
θ_i	0.02	0.05	0.1	0.15	0.2
P_i	0.4	0.3	0.15	0.1	0.05

这显然是一个有关费用的风险型决策问题。状态空间和决策空间的元素分别表示不合格率和装配方法，状态空间记为

$$\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5\}$$

决策空间记为

$$A = \{a, \alpha\}$$

其中， a 表示人工装配方法； α 为机械化装配方法。下面我们分别用费用（支付）表和机会损失表两种方法求解之。

解法一 两种方法的条件费用分别为

$$CC_{a1} = 800\theta_i \times 1.5 = 1200\theta_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$CC_{\alpha 2} = 800 \times 2\% \times 1.5 + 40 = 64, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

当 $i=1$ 时，有

$$CC_{11} = 1200\theta_1 = 1200 \times 0.02 = 24 (\text{元})$$

表示用人工装配方法，不合格率为 0.02 时的费用，其余类推。对于机械化装配方法，不合格率仅为 2%，故对 $i=1, 2, 3, 4, 5$ ，都有 $CC_{\alpha 2}=64$ 元。相应的期望费用

$$EC_{11} = CC_{11} P_1 = 24 \times 0.4 = 9.6 (\text{元})$$

我们把计算出来的费用列入表 2.2.7 中。

表 2.2.7 Bayes 决策费用(支付)表

单位:元

i	θ_i	P_i	a_1		a_2		$EC_i^* = \min_{j=1,2} EC_{ij}$
			CC_{i1}	EC_{i1}	CC_{i2}	EC_{i2}	
1	0.02	0.4	24	9.6*	64	25.6	9.6
2	0.05	0.3	60	18*	64	19.2	18
3	0.1	0.15	120	18	64	9.6*	9.6
4	0.15	0.1	180	18	64	6.4*	6.4
5	0.2	0.05	240	12	64	3.2*	3.2
合计		1		$EMV_1 = 75.6$		$EMV_2 = 64^*$	$ECC = 46.8$

表 2.2.7 中横的一行数据表示同一状态下各方法的费用值,竖的一列数据表示同一方法各状态的费用值,最后一列为某状态下两种方法中期望费用最小者,故记为 EC_i^* 。它们的和是理想中的最低支付费用,即必然期望费用 ECC 的值,列于表 2.2.7 的右下角。由表 2.2.7 可以看出

$$\begin{aligned} EMV^* &= \min(EMV_1, EMV_2) = \min(75.6, 64) \\ &= 64(\text{元}) \end{aligned}$$

故最优方法取机械化装配

$$a^* = a$$

一批零件的最小期望装配费用为 64 元。完全情报价值为

$$EVPI = EMV^* - ECC = 64 - 46.8 = 17.2(\text{元})$$

它表示市场上有关零件不合格的概率情报售价的上限,或进行抽样检查该项状态不合格的概率时费用的最大值。而必然期望费用 ECC,表示一批零件理想的最小费用仅需 46.8 元,而实际上是难以达到这个目标的。

解法二 条件机会损失是指决策不当造成的费用的增加,所以

$$COL_{ij} = CC_{ij} - \min_{j \in [1, n]} CC_{ij}$$

例如,当 θ_1 状态发生时,由表 2.2.7 得知 a_1 和 a_2 的条件费用分别为 24 元和 64 元,故

$$COL_{11} = 24 - 24 = 0, \quad COL_{12} = 64 - 24 = 40$$

又如,当 θ_2 状态发生时,表 2.2.7 给出了 a_1 、 a_2 的条件费用分别为 180 元和 64 元,故

$$COL_{21} = 180 - 64 = 116, \quad COL_{22} = 0$$

期望机会损失 EOL_{ij} 只要用 COL_{ij} 乘以该状态发生的概率 P_{ij} 即可。于是,我们得到相应的 Bayes 机会损失表,见表 2.2.8。

表 2.2.8 Bayes 决策法机会损失表 单位:元

i	θ_i	P_i	a_1		a_2	
			COL_{i1}	EOL_{i1}	COL_{i2}	EOL_{i2}
1	0.02	0.4	0	0	40	16
2	0.05	0.3	0	0	4	1.2
3	0.1	0.15	56	8.4	0	0
4	0.15	0.1	116	11.6	0	0
5	0.2	0.05	176	8.8	0	0
合计		1		28.8		17.2

从表 2.2.8 中可以看出,完全情报价值

$$EVPI = \min(28.8, 17.2) = 17.2(\text{元})$$

$$a^* = a$$

下面介绍另一种求 EMN^* 的方法。由表 2.2.1 中费用一列的完全情报价值计算公式

$$EVPI = EMV^* - ECC$$

得到

$$EMV^* = EVPI + ECC$$

因此,我们只要算出 ECC,问题就解决了。我们知道,ECC 是理想中的最小费用,即无论未来发生什么状态,我们总是选定最小费用的方法行事。另外,由表 2.2.8 可知,当状态 θ_1 和 θ_2 发生时,方法 a_1 优于 a_2 ,故期望费用用 a_1 的公式计算; $EC_{11}=9.6, EC_{21}=18$ 。而当状态 $\theta_3, \theta_4, \theta_5$ 发生时,方法 a_2 优于 a_1 ,故期望费用用 a_2 的公式算得; $EC_{32}=9.6, EC_{42}=6.4, EC_{52}=3.2$ 。所以

$$a^* = a$$

$$ECC = 9.6 + 18 + 9.6 + 6.4 + 3.2 = 46.8(\text{元})$$

$$EMV^* = 17.2 + 46.8 = 64(\text{元})$$

两种解法结果一样。

【例 2.2.4】 M-150 电子计算机上的 D 主件的正常寿命期短,需要经常更换。假设 D 主件数是一个服从均值 $\lambda=1.4$ 件的泊松分布随机变量。问购买 M-150 机的同时买几件备用 D 件较好? 相应的期望费用 EMV^* 及 $EVPI$ 各为多少?

解法一 从表 2.2.9 中可以得到系统的状态概率—— D 主件的需要量概率。该表的第三行各数字为第二行同列与前列数字所示的累计概率之差。