

21 世纪高等院校教材

常微分方程及其应用

——方法、理论、建模、计算机

周义仓 靳 楨 秦军林 编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是常微分方程理论、方法与应用有机结合的一本教材,它保持我国现行教材中理论性强、方法多样、技巧和实例丰富等特点,结合国外教材中强调建模、应用和计算机等特点,形成理论、方法、建模、应用、计算机互相渗透与补充的新体系.不仅训练学生严密的数学思维方式,而且引导学生建立数学模型去解决实际问题.既讲述求解各类微分方程解析解、数值解的方法,又介绍用计算机分析求解的过程.本教材的主要内容包括求解各类微分方程的方法、常微分方程的基本理论、定性稳定性基础、近似方法及其实现、建立微分方程模型解决实际问题.

本书可以作为数学与应用数学专业、信息科学与计算数学专业的常微分方程课程教材,也可以作为理工科学生数学建模、数学实验等参考书.

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程及其应用——方法、理论、建模、计算机/周义仓,靳祯,秦军林编.—北京:科学出版社,2003

21世纪高等院校教材

ISBN 7-03-011544-9

I. 常… II. ①周… ②靳… ③秦… III. 常微分方程-高等学校-教材 IV. O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 039631 号

责任编辑:吕 虹 王 静/ 责任校对:朱光光

责任印制:张克忠/封面设计:黄华斌 陈 敬

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003 年 7 月 第 一 版 开本: B5(720×1000)

2006 年 6 月 第四次印刷 印张: 21 1/4

印数: 8 501—10 500 字数: 402 000

定价: 32.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

前 言

常微分方程是数学类专业的一门应用性较强的基础课,一般在二年级开设,64 学时左右.常微分方程课程对训练学生的数学思维、应用意识和分析与解决实际问题的能力有着极为重要的作用.

目前国内常微分方程的教材基本上与 20 世纪 60~70 年代的体系和内容相比没有太大的变化,主要是通过解的存在惟一性、线性方程解的基本理论、渐近性态分析等内容训练学生数学的抽象思维能力,通过叙述求解各种类型方程的解析解让学生学会求解一些微分方程的基本方法.相比而言,国外近年来出版的常微分方程教材与 20 世纪 60~70 年代的相比有很大的变化,主要体现在两个方面:(1)通过大量的实际问题突出数学的应用,引导学生建立常微分方程模型解决各种实际问题;(2)大量的使用计算机,用 Maple、Matlab、Mathematica 等数学软件进行图示、求解析解、进行数值计算、进行推理以提高课堂教学的效果.

在多年从事常微分方程课程教学的过程中,我们对我国的教育体制、教学方式、教材的优缺点、学生的特点有了较深入的了解,也收集到了一批国外的优秀教材,在教学中积累了丰富的素材,其中大部分已经整理成讲稿,包括一些十分精彩的应用实例和计算机程序.这些讲稿通过复印或磁盘文件拷贝给学生后收到了很好的效果.在这些经验和素材的基础上我们编写了这本教材.

常微分方程及其应用是常微分方程理论、方法与应用有机结合的一本教材.它保持我国现行教材中理论性强、方法多样、技巧和实例丰富等特点,再结合国外教材中强调建模、应用和计算机等特点,理论、方法、建模、应用、计算机互相渗透与补充.不仅使学生受到严格的数学思维方式的训练,而且使学生体会到数学在解决实际问题中的巨大作用,了解通过数学模型去解决实际问题的全过程.既使学生学会求解各类微分方程解析解、数值解的方法,又让他们掌握用计算机分析求解的思想与过程.本教材的目标是让学生学会(1)求解各类微分方程的方法;(2)常微分方程的基本理论;(3)常微分方程定性稳定性方法初步,从微分方程提取尽可能多的信息;(4)近似方法、数值方法及其计算机实现;(5)建立微分方程模型解决实际问题;(6)在应用问题中使用各种数学软件包.本教材的主要特点为:(1)加强数学基础理论的训练.如解的存在惟一性定理,线性方程的理论,线性方程组的基本解矩阵,定性稳定性基本知识.(2)广泛介绍各种求解常微分方程的方法和思想.如一阶方程的解法:分离变量,线性方程,全微分方程,齐次方程,积分因子, Bernoulli 方程,

Riccati 方程, Clairaut 方程, 参数求解法, 变量替换法; 二阶及高阶方程的降阶法, 待定系数法; 方程组的特征根法, 重根情形的处理, 指数矩阵的定义, 基本解矩阵的计算, 向量场的方法; 近似解法: 迭代法, 级数解, 待定系数法, Euler 折线法; 定性理论: 奇点分析, 线性化, Liapunov 函数. (3) 将微分方程课程的理论、方法和它们在解决实际问题中的应用紧密结合, 根据目前教学改革的特点加强数学应用意识的培养, 注意建模过程的训练. 介绍了一些生动典型的例子, 如中国人口增长, 放射性废物的处理, 考古物品年代的鉴定, Bob Beamon 世界跳远记录的分析, 火箭的发射, 流行病的传播等. (4) 计算机及软件包的使用. 在课程中尽量使用计算机和数学软件包, 如向量场的图示, 积分曲线的绘制, 数值解的计算; 在迭代序列的计算和近似解中的大量使用, 不仅使学生能理解方法, 而且要掌握实现的手段; 介绍符号系统求解解析解的方法.

使用本教材需要的基础是数学分析和线性代数, 需要的学时在 64~72 之间. 学时少的学校可以删除 § 1.3、§ 2.5、§ 2.6、§ 5.4、§ 5.6 等内容. 本书各章节的编写风格如下: 微分方程的理论、方法, 例题、应用举例, 计算机实验, 练习题、进一步探讨的小课题. 在习题标号中带上标 c 的为计算机实验题, 带上标 p 的为小课题. 本书中利用 Maple 求解方程、作图和计算机实验内容完全独立, 可根据学时和上机条件灵活选用. 删去这些内容对课程的主要部分没有影响. 本书第 1、2 章由周义仓编写, 第 3、4 章由靳祯编写, 第 5 章由秦军林编写, 最后由周义仓统稿修改.

为了便于阅读和使用, 我们将本书中的 Maple 程序收集、整理为磁盘文件, 我们也设计、开发了一些应用常微分方程解决实际问题的小课题和软件. 本书中所有习题的答案或主要解答过程都编辑成了磁盘文件. 这些文件都可以免费发送给读者, 请通过 Email 与作者联系 (周义仓: zhouyc@mail.xjtu.edu.cn; 靳祯: jinzhn@263.net). 我们还需要指出, 在不同的计算机系统或不同的 Maple 版本中, 输出结果可能会与书中给出的有所不同, 请读者注意这些差异.

我们力图使本书反映数学理论的严密性、方法的多样性、应用的广泛性, 也体现出国内外教学改革的发展趋势. 但由于作者水平的限制, 在思想、内容和文字方面难免有不妥之处, 恳请读者批评指正.

作 者

2003 年 1 月

目 录

第 1 章 引论	1
§ 1.1 微分方程的概念和实例	1
1.1.1 导出微分方程的一些实际例子	1
1.1.2 微分方程的概念	3
1.1.3 计算机的应用	5
1.1.4 微分方程的发展	7
习题 1.1	9
§ 1.2 解的存在惟一性	10
1.2.1 例子和思路	11
1.2.2 存在惟一性定理及其证明	13
1.2.3 存在惟一性定理的说明及例子	17
习题 1.2	22
§ 1.3 一阶微分方程的向量场	23
1.3.1 向量场	23
1.3.2 积分曲线的图解法	27
习题 1.3	28
复习题·应用课题·计算机实验	28
第 2 章 一阶微分方程	31
§ 2.1 线性方程	31
2.1.1 线性齐次方程	31
2.1.2 线性非齐次方程	32
2.1.3 Bernoulli 方程	35
2.1.4 线性微分方程的应用举例	36
2.1.5 计算机的应用	39
习题 2.1	40
§ 2.2 变量可分离的方程	42
2.2.1 变量可分离方程的求解	42
2.2.2 齐次方程	44
2.2.3 变量可分离方程的应用	46
2.2.4 计算机的应用	48

习题 2.2	50
§ 2.3 全微分方程	52
2.3.1 全微分方程的定义与充要条件	52
2.3.2 全微分方程的积分	54
2.3.3 积分因子	57
习题 2.3	62
§ 2.4 变量替换法	64
2.4.1 形如 $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ 的方程	64
2.4.2 形如 $yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$ 的方程	65
2.4.3 其他变换举例	66
2.4.4 Riccati 方程	68
习题 2.4	71
§ 2.5 一阶隐式微分方程	72
2.5.1 可解出 y 或 x 的方程与微分法	72
2.5.2 不显含 x 或 y 的方程与参数法	76
2.5.3 奇解与包络	80
习题 2.5	83
§ 2.6 近似解法	83
2.6.1 逐次迭代法	84
2.6.2 Taylor 级数法	85
2.6.3 Euler 折线法	88
习题 2.6	91
§ 2.7 一阶微分方程的应用	92
2.7.1 曲线族的等角轨线	92
2.7.2 放射性废物的处理问题	94
2.7.3 我国人口的发展预测	96
习题 2.7	97
复习题·应用课题·计算机实验	98
第 3 章 二阶及高阶微分方程	103
§ 3.1 可降阶的高阶方程	103
3.1.1 不显含未知函数 x 的方程	103
3.1.2 不显含自变量 t 的方程	104
3.1.3 全微分方程和积分因子	105
3.1.4 可降阶的高阶方程的应用举例	106

习题 3.1	113
§ 3.2 线性微分方程的基本理论	114
3.2.1 线性微分方程的有关概念	114
3.2.2 齐次线性方程解的性质和结构	116
3.2.3 非齐次线性方程解的结构	123
习题 3.2	127
§ 3.3 线性齐次常系数方程	128
3.3.1 复值函数	128
3.3.2 常系数齐次线性方程	130
3.3.3 某些变系数线性齐次微分方程的解法	135
3.3.4 高阶常系数齐次方程的计算机求解	139
习题 3.3	140
§ 3.4 线性非齐次常系数方程的待定系数法	141
3.4.1 非齐次项为多项式的情形	142
3.4.2 非齐次项为多项式与指数函数之积的情形	145
3.4.3 非齐次项为多项式与指数函数、正余弦函数之积的情形	146
习题 3.4	149
§ 3.5 高阶微分方程的应用	150
3.5.1 机械振动	150
3.5.2 RLC 电路	154
习题 3.5	157
复习题·应用课题·计算机实验	158
第 4 章 微分方程组	161
§ 4.1 微分方程组的概念	161
4.1.1 微分方程组的实例及有关概念	161
4.1.2 函数向量和函数矩阵	166
4.1.3 微分方程组解的存在惟一性定理	171
习题 4.1	174
§ 4.2 微分方程组的消元法和首次积分法	175
4.2.1 微分方程组的消元法	175
4.2.2 微分算子与线性微分方程组	178
4.2.3 微分方程组的首次积分法	180
习题 4.2	184
§ 4.3 线性微分方程组的基本理论	185
4.3.1 线性齐次方程组解的结构	185

4.3.2 非齐次线性微分方程组解的结构	196
习题 4.3	199
§ 4.4 常系数齐次线性微分方程组	201
4.4.1 系数矩阵 A 有单特征根时的解	201
4.4.2 系数矩阵 A 具有重特征根时的解	207
4.4.3 计算机的应用	216
4.4.4 矩阵指数函数的定义和性质	221
习题 4.4	227
§ 4.5 常系数非齐次线性微分方程组	229
4.5.1 常数变易法	229
4.5.2 线性变换法	232
4.5.3 待定系数法	234
4.5.4 计算机应用	239
习题 4.5	241
§ 4.6 微分方程组应用举例	243
4.6.1 两自由度的振动问题	243
4.6.2 胆固醇流动的仓室模型	246
4.6.3 人造卫星的轨道方程	247
4.6.4 扩音器振动模型	253
习题 4.6	256
复习题·应用课题·计算机实验	256
第 5 章 非线性微分方程组	262
§ 5.1 非线性方程研究的例子与概念	262
5.1.1 例子	262
5.1.2 自治微分方程与非自治微分方程、动力系统	264
5.1.3 基本定义	267
习题 5.1	271
§ 5.2 自治微分方程组解的性质	272
5.2.1 自治系统轨线的特点	273
5.2.2 自治系统解的基本性质	275
习题 5.2	278
§ 5.3 平面线性系统的奇点及相图	279
5.3.1 几个线性系统的计算机相图	280
5.3.2 平面线性系统的初等奇点	284
习题 5.3	291

§ 5.4 几乎线性系统解的稳定性	293
5.4.1 平面几乎线性系统的稳定性	293
5.4.2 高维几乎线性微分方程组的稳定性	301
习题 5.4	305
§ 5.5 Liapunov 第二方法	306
5.5.1 定号函数	306
5.5.2 稳定性基本定理	307
5.5.3 稳定性定理的几何意义	312
5.5.4 二次型形式的 V 函数	313
习题 5.5	314
§ 5.6 二维自治微分方程组的周期解和极限环	316
5.6.1 周期解与极限环	316
5.6.2 极限环的存在性	319
5.6.3 极限环的不存在性	321
5.6.4 极限环的稳定性	323
习题 5.6	323
复习题·应用课题·计算机实验	324
参考文献	327

第 1 章 引 论

常微分方程是现代数学的一个重要分支,是人们解决各种实际问题的有效工具,它在几何、力学、物理、电子技术、自动控制、航天、生命科学、经济等领域都有着广泛的应用.本章介绍常微分方程的一般概念、导出微分方程的一些典型例子、常微分方程解的存在惟一性、向量场等内容,为求解微分方程和进行理论分析做准备.

§ 1.1 微分方程的概念和实例

弄清一个问题中变量之间的函数关系或其变化趋势对问题的解决往往有着至关重要的作用,但在一些较复杂的变化过程中,变量之间的函数关系无法直接得到.这时就需要在一些理论或经验的基础上找到问题中的一些变量及其导数之间的关系,也就是先找出一个含有未知函数及其导数所满足的方程,它称为微分方程.然后通过求解这个方程得到变量间的函数关系,或者在微分方程的基础上进行数值计算和渐近性态研究,从而了解一个系统的发展变化规律.本节先给出一些导出微分方程的例子,再给出微分方程中所涉及的一些定义.

1.1.1 导出微分方程的一些实际例子

为了定量地研究一些实际问题的变化规律,往往是要对所研究的问题进行适当的简化和假设,建立数学模型,当问题中涉及变量的变化率时,该模型就是一个微分方程.下面通过几个典型的例子来说明建立微分方程模型的过程.

例 1.1.1 镭的衰变规律 设镭的衰变速率与该时刻现有的量成正比,且已知 $t = 0$ 时,镭元素的量为 R_0 克,试确定在任意时刻 t 镭元素的量.

解 记 t 时刻镭元素的量为 $R(t)$,要直接得出 $R(t)$ 的函数表达式是比较困难的,因此我们通过建立 $R(t)$ 所满足的微分方程来得到 $R(t)$.由于镭元素的衰变率就是 $R(t)$ 对时间的变化率 $\frac{dR(t)}{dt}$.根据题目中给出的衰变规律,可以得到下面的一阶微分方程及初始条件

$$\frac{dR}{dt} = -kR, \quad R(0) = R_0 \quad (1.1.1)$$

其中 $k > 0$,是比例系数.上式中右端的负号是由于函数 $R(t)$ 是随时间的增加而

单调减少的,故它的导数应该是负的.

寻找 t 时刻镭含量的函数表达式 $R(t)$ 就转化为求满足(1.1.1)中微分方程和初始条件的解 $R(t)$. 由数学分析中求导的经验知道,函数

$$R(t) = ce^{-kt} \quad (1.1.2)$$

满足(1.1.1)中的微分方程,其中 c 为任意常数.为了使(1.1.2)中的函数再满足 $R(0) = R_0$,只需选取 $c = R_0$ 即可.于是,我们得到了镭元素的存量随时间变化的函数表达式为

$$R(t) = R_0 e^{-kt}. \quad (1.1.3)$$

(1.1.3)式表明,镭元素的量 $R(t)$ 是按指数规律衰减的.

从这个例子可以看到,为了求得描述镭元素存量随着时间变化的关系,我们先建立起这个未知函数所满足的微分方程,然后通过求解得到了所需的函数关系.

例 1.1.2 在一根长为 L 的轻杆下端,悬挂一质量为 m 的质点,略微移动后,该质点在重力作用下来回摆动(见图 1.1).这种装置叫做单摆(或数学摆).假设轻杆不会伸长又无重量,在悬点没有摩擦力,试建立单摆的运动方程.

解 取轻杆的铅直位置为摆的平衡位置.设在时刻 t 时,质点对平衡位置的位移为 $s = AB$,于是,有

$$s = L\theta$$

其中 θ 为杆的瞬时位置与平衡位置所成的角,逆时针方向为正,因 s 与 θ 同方向,所以 s 以 AB 为正方向.

使质点运动的力 F 是质点的重力 mg 在切线方向的分力:

$$F = mg \sin \theta,$$

而质点的加速度为

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = L \frac{d^2 \theta}{dt^2},$$

根据牛顿第二定律,得到

$$mL \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta.$$

上式右端的负号是由于力 F 与位移 s 的正方向 AB 相反的缘故.上式可化简为

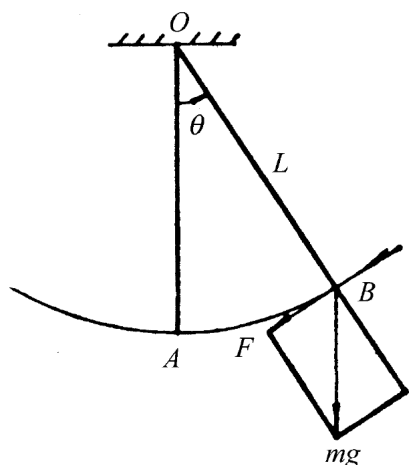


图 1.1

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta, \quad (1.1.4)$$

此即为单摆的运动方程, 它是一个二阶非线性微分方程(因为方程中含有 $\sin \theta$, 它关于未知函数 θ 不是线性的). 为了确定单摆的运动方程, 还需要知道初始时刻单摆的角位移 θ 和角速度 $\frac{d\theta}{dt}$, 故还需要加上初始条件

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \frac{d\theta(0)}{dt} = \theta'_0. \quad (1.1.5)$$

在例 1.1.2 中所建立的微分方程的解析解无法得到, 我们将在第 5 章中对其解的性态进行分析.

用微分方程解决实际问题的基本步骤为: (1) 建立起实际问题的模型, 也就是建立反映这个实际问题的微分方程, 提出相应的定解条件; (2) 求出这个微分方程的解析解或数值解, 或者对方程解的性态进行分析; (3) 用所得的结果来解释实际现象, 或对问题的发展变化趋势进行预测.

要建立适合实际问题的数学模型一般是比较困难的, 这需要对问题的机理有一个清楚的了解, 同时需要一定的数学知识和建立数学模型的经验. 常微分方程是应用背景比较强的一门课程, 在学习过程中最好有意识地培养建模能力, 使得数学知识和解决实际问题的能力都有大的提高.

1.1.2 微分方程的概念

含有未知量的等式称为方程, 它表达了未知量所必须满足的某些条件. 方程是根据对未知量所进行的运算来分类的. 如代数方程、超越方程等. 微分方程与代数方程和超越方程不同, 它的未知量是函数, 对其所施加的运算涉及到求导或微分. 凡含有自变量、未知函数以及未知函数的导数(或微分)的方程称为微分方程.

下面是一些微分方程的例子:

$$\frac{dy}{dx} + ky = 0, \quad (1.1.6)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + xy \left[\frac{dy}{dx} \right]^2 = 0, \quad (1.1.7)$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 5 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3y = \sin x, \quad (1.1.8)$$

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = F \left[t, u, \frac{du}{dt} \right], \quad (1.1.9)$$

$$-\frac{v}{s} + \frac{v}{t} = v, \quad (1.1.10)$$

$$\frac{u^2}{x^2} + \frac{u^2}{y^2} + \frac{u^2}{z^2} = 0. \quad (1.1.11)$$

如果微分方程中的未知函数只依赖于一个自变量,就称为常微分方程;如果未知函数依赖于两个或更多的自变量,就称为偏微分方程.(1.1.6) ~ (1.1.9) 中的4个方程都是常微分方程,(1.1.10) 和(1.1.11) 是偏微分方程.本书主要是讨论常微分方程,今后所讲到的“微分方程”一词,没有特别声明时均理解为常微分方程.

一个微分方程中,未知函数最高阶导数的阶数,称为方程的阶数.如果一个微分方程关于未知函数及其各阶导数都是线性的,则称它为线性微分方程,否则称之为非线性微分方程.例如(1.1.6) 是一阶微分方程,也是线性方程,我们称这类方程为一阶线性方程,同理,(1.1.7) 和(1.1.9) 是二阶非线性方程,(1.1.8) 是四阶线性方程.一般的 n 阶微分方程的形式为

$$F\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right] = 0, \quad (1.1.12)$$

这里 $F\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right]$ 是其变量 $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$ 的已知函数,而且一定含有 $\frac{d^n y}{dx^n}$, y 是未知函数, x 是自变量.

设 $y = \varphi(x)$ 是定义在区间 (a, b) 上的 n 阶可微函数,若分别将 $y = \varphi(x)$, $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x), \dots, \frac{d^n y}{dx^n} = \varphi^{(n)}(x)$ 代入(1.1.12) 后能使其成为恒等式,即

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0, \quad x \in (a, b),$$

则称 $y = \varphi(x)$ 是微分方程(1.1.12) 在区间 (a, b) 上的一个解.例如, $y = e^{-kx}$ 是微分方程(1.1.6) 在 $(-\infty, +\infty)$ 的一个解. $y = \tan x$ 是微分方程 $y' = 1 + y^2$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的一个解.

如果关系式 $F(x, y) = 0$ 决定的隐函数 $y = \varphi(x)$ 是方程(1.1.12) 的解,则我们称 $F(x, y) = 0$ 是(1.1.12) 的一个隐式解.例如,一阶微分方程

$$xdx + ydy = 0$$

有隐式解

$$x^2 + y^2 - c = 0.$$

我们把含有 n 个相互独立的任意常数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 的解

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

称为 n 阶微分方程(1.1.12) 的通解. 此处 $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ 含有 n 个相互独立的常数的含义是指存在 $(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ 的某一个邻域, 使得

$$\begin{vmatrix} \frac{\varphi}{c_1} & \frac{\varphi}{c_2} & \cdots & \frac{\varphi}{c_n} \\ \frac{\varphi'}{c_1} & \frac{\varphi'}{c_2} & \cdots & \frac{\varphi'}{c_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\varphi^{(n-1)}}{c_1} & \frac{\varphi^{(n-1)}}{c_2} & \cdots & \frac{\varphi^{(n-1)}}{c_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

例如 $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ 就是二阶线性方程

$$y'' + y = 0 \quad (1.1.13)$$

的通解. 而 $y = c_1 \cos x + c_2 \cos x$ 不是该方程的通解.

在通解之中当一组任意常数确定时, 所得到确定的解称为特解. $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, $y_3 = \cos x + \sin x$ 都是微分方程(1.1.13) 的特解. 为了确定微分方程的一个特解, 我们可以给出这个微分方程所满足的定解条件, 常见的定解条件是初始条件, 即指定 n 阶微分方程(1.1.12) 在某一点 x_0 所满足的条件:

$$y(x_0) = y_0, \frac{dy(x_0)}{dx} = y'_0, \dots, \frac{dy^{(n-1)}(x_0)}{dx^{n-1}} = y_0^{(n-1)}. \quad (1.1.14)$$

微分方程(1.1.12) 连同初始条件(1.1.14) 一起称为初始值问题. 例如(1.1.1) 就是一阶微分方程的初始值问题.

1.1.3 计算机的应用

近几十年来, 计算机技术发展很快, 在各个领域都有广泛的应用, 在数学的各个分支中也发挥了很大的作用. 在学习常微分方程课程的同时, 不但要掌握基本的理论和方法, 而且对一些思路明确、方法简单、计算量大的问题, 也应该会用计算机处理, 以提高学习、工作效率, 更重要的是培养尽量利用当代最新科技成果的意识, 以便今后能自觉地将最新的成果应用到解决实际问题的过程之中.

在常微分方程课程中, 我们将利用 Maple 软件包来处理一些问题, Mathematica 等其他软件包也可以进行类似的工作. Maple 是一个具有数值计算、代数运算和

图形处理功能的数学软件包,我们不进行系统的介绍,只是在需要的地方介绍一些指令和使用方法.这里我们给出两个用 Maple 验证微分方程解的例子.

例 1.1.3 用 Maple 验证 $y = 2\sqrt{4+x} - 1$ 是微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{2x-y+7} \quad (1.1.15)$$

的一个解.

解 要用计算机验证一个函数是方程的解,首先需要定义这个函数,然后再求它的导数,计算方程右端的值,进行化简,比较左右两端是否相等.此问题思路清楚,但计算过程有点烦琐,我们可以用计算机去进行.在 Maple 的工作窗口输入下列指令

```
y := x -> 2 * (4 + x)^(1/2) - 1;
y_prime := diff(y(x), x);
y_right := (y(x) - 1) / (2 * x - y(x) + 7);
difference_left_right := simplify(y_prime - y_right);
```

其中第一行指令定义函数 $y = 2\sqrt{4+x} - 1$,第二行指令求 y 的导数,第三行指令是将函数 y 的右端代入方程(1.1.15)的右端,最后一行指令是计算方程两端之差.回车后 Maple 的输出为

```
y := x -> 2 * sqrt(4 + x) - 1
y_prime := 1 / sqrt(4 + x)
y_right := (2 * sqrt(4 + x) - 2) / (2 * x - 2 * sqrt(4 + x) + 8)
difference_left_right := 0
```

由输出结果的最后一行看出,将 $y = 2\sqrt{4+x} - 1$ 代入后方程(1.1.15)的左右端相等,故它是方程(1.1.15)的一个解.

例 1.1.4 用 Maple 验证由方程

$$tx - \ln x - t^2 = 0 \quad (1.1.16)$$

所确定的隐函数 $x = x(t)$ 是微分方程

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2tx - x^2}{tx - 1} \quad (1.1.17)$$

的一个解.

解 根据验证方程隐式解的方法,利用下列的 Maple 指令

```
equ := t * x - ln(x) - t^2 = 0;
```

```

equ1 := subs(x = x(t), equ);
equ2 := map(diff, equ1, t);
x_dot := diff(x(t), t);
x_dot1 := solve(equ2, x_dot);

```

指令中的第一行定义方程(1.1.16), 第二行将(1.1.16)中的 x 用 $x(t)$ 代换, 第三行是将 $x(t)$ 看作函数对方程(1.1.16)两边求导, 第四行定义 $x(t)$ 对 t 的导数为 x_dot , 最后一行解出 $x(t)$ 对 t 的导数. 回车后 Maple 的输出为

```

equ := tx - ln(x) - t^2 = 0
equ1 := tx(t) - ln(x(t)) - t^2 = 0

equ2 := x(t) + t [ - x(t) ] - x(t) - 2t = 0

x_dot := x(t)

x_dot1 := x(t) (- x(t) + 2t) / (tx(t) - 1)

```

由最后一行的输出结果看出, 由方程(1.1.16)所确定的隐函数是微分方程(1.1.17)的一个解.

1.1.4 微分方程的发展

常微分方程是数学的一个重要分支, 也是偏微分方程、变分法、控制论等数学分支的基础. 微分方程的理论和方法从 17 世纪末开始发展起来, 很快成了研究自然现象的强有力的工具. 在 17~18 世纪, 在力学、天文、物理和技术科学中, 就已借助微分方程取得了巨大的成就. 质点动力学和刚体动力学的问题很容易化为微分方程的求解问题. 1864 年 Leverrier 根据这个方程预见到了海王星的存在, 并确定出了海王星在天空中的位置. 现在, 常微分方程在许多方面获得了日新月异的应用. 这些应用也为微分方程的进一步发展提出了新的问题, 促使人们对微分方程进行更深入的研究, 以便适应科学技术飞速发展的需要.

微分方程的首要问题是如何求一个给定方程的通解或特解. 到目前为止, 人们已经对许多微分方程得出了求解的一般方法. 例如一阶微分方程中的变量可分离的方程、线性方程、恰当方程、以及常系数二阶线性方程和线性常系数方程组等. 这些都是要在后面的章节中仔细讲述的内容. 求一个方程的解, 最自然的想法是用初等函数来表达方程的解, 这是不容易做到的, 例如对非常简单的方程 $y' = \frac{\sin x}{x}$, 我们就无法用初等函数来表示它的解, 但我们可以用初等函数的积分形式来表达该微分方程的解, 即将该方程的通解表达为

$$y = \int \frac{\sin x}{x} dx + c.$$

今后我们所说的微分方程的解,一般是指可以用初等函数或初等函数的积分形式表达的解.微分方程的解也称为积分,求解过程称为对这个微分方程进行积分,习惯上也称为初等积分法.

应该看到,能用初等积分法求解的微分方程为数很少,绝大部分的微分方程都无法求出通解,例如 Bessel 方程

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (1.1.18)$$

的解一般就无法用初等积分法得出. Riccati 方程

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

一般也无法用初等积分法求出通解.

由于求通解存在很多困难,人们就开始研究带某种定解条件的特解.首先是 Cauchy 对微分方程初始值问题解的存在惟一性进行了研究.目前解的存在惟一性、延拓性、大范围的存在性以及解对初始值和参数的连续性和可微性等理论问题都已发展成熟.在下一节我们将详细介绍一阶微分方程初始值问题解的存在惟一性.

由于绝大多数微分方程不能通过“求积”得到,而理论上又证明了初值问题解的存在惟一性,从而推动人们从其他方面来研究微分方程.例如,采用将未知函数表示成一致收敛的级数形式,从而扩大了微分方程的可解领域.在这种意义下,方程(1.1.18)对任何 n 都是可解的.以后,人们引进新的特殊函数(非初等函数),例如椭圆函数、阿贝尔函数、贝塞尔函数、勒让德函数等来表达微分方程的解.使微分方程和函数论,特别是和复变函数论紧密地联系起来,产生了微分方程的解析理论.

与此同时,人们开始采用各种近似方法来求微分方程的特解,例如用函数近似的逐次逼近法、Taylor 级数法、待定系数法,都可以在一个区间上求得近似解.又如求微分方程数值解的 Euler 折线法、Runge-Kutta 法等,可以求得若干个点上微分方程解的近似值.近年来随着电子计算机的飞速发展,开发出了许多功能强大、使用方便的软件包,在微分方程的求解和应用之中发挥了巨大的作用,真正使微分方程在科学技术和经济发展中得到了充分的应用,解决了许多重大问题.

在微分方程理论中,另一重要的问题是对解的各种属性的研究.一般是在不求出精确解或者近似解的情况下,把方程的解视为某空间的曲线(轨线),根据方程右端函数本身所具有的性质,来研究积分曲线(轨线)的各种属性,例如奇点、周期解、有界性、稳定性以及整族解的定性分布图形等等.于是就发展为微分方程的定性和稳定性理论.这些内容我们将在第 5 章作简单介绍.

最后,还需要指出的一点是当代高科技的发展为数学的广泛应用和深入研究提供了更好的手段,数学机械化的思想也渗透和应用到了常微分方程这一分支.用

计算机求方程的精确解、近似解,对解的性态进行图示和定性、稳定性研究都十分方便和有效,在本书中我们也将结合具体内容利用 Maple 软件来显示计算机技术在数学研究和应用中的作用.

习 题 1.1

1. 试建立分别具有下列性质的曲线所满足的微分方程:

- (1) 曲线上任一点的切线与该点的向径夹角为零;
- (2) 曲线上任一点的切线介于两坐标轴之间的部分等于定长 l ;
- (3) 曲线上任一点的切线介于两坐标轴之间的部分被切点平分;
- (4) 曲线上任一点的切线与两坐标轴所围成的面积都等于常数 a^2 ;
- (5) 曲线上任一点的切线的纵截距等于切点横坐标的平方.

2. 有一质量为 m 的质点挂在一个弹簧上,设空气阻力可以忽略,弹簧的弹性力服从虎克定律,试建立此质点运动的微分方程.

3. 一质量为 m 的物体在空气中铅直下落,它除受重力作用外还受空气阻力的影响,假设空气阻力与运动速度成正比.试建立此质点运动的微分方程.

4. 由牛顿冷却定律知物体在流动的空气中冷却的速度与物体的温度与空气温度之差成正比.设开始时物体的温度为 T_0 , 将其放在温度为 A 的空气中冷却,求在任意时刻 t 时物体的温度所满足的微分方程.

5. 一个质量为 m 的物体,在倾角为 30° 的斜面上由静止开始下滑,若不计摩擦力,试建立其运动的微分方程.

6. 一凹镜由平面曲线 $y = y(x)$ 绕 Ox 轴旋转而成,假设由轴上一点 P 发出的一切光线经此凹镜反射后都与旋转轴平行,求曲线 $y = y(x)$ 所满足的微分方程.

7. 求由下列曲线族消去其中任意常数 (A, B, C) 所满足的微分方程:

- (1) $y = Ax^2$;
- (2) $y = Ce^{2x}$;
- (3) $y = A + Be^x$;
- (4) $C(y + C)^2 = x^3$;
- (5) $\frac{x^2}{1+C} + \frac{y^2}{4+C} = 1$;
- (6) $\rho = A(1 - \cos\theta)$, (ρ, θ) 为极坐标;
- (7)* $\begin{cases} x = C(t - \sin t), \\ y = C(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \text{ 为参数.}$

8. 指出下面微分方程的阶数,并判断它们是否是线性方程:

- (1) $x^2 y'' + xy' + 2y = \sin x$;
- (2) $(1 + y^2)y'' + xy' + y = e^x$;
- (3) $y'' + \sin(x + y) = \sin x$;
- (4) $y^{(m)} + y'' + y = 0$;
- (5) $y' = f(x, y)$;
- (6) $F(x, y, y', y'', y) = 0$;
- (7) $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$;
- (8) $y' + xy^2 = 0$.

9. 验证下列各函数是相应微分方程的解:

- (1) $y'' - y = 0, y = \operatorname{sh} x$;
- (2) $y' = y^2 - (x^2 + 1)y + 2x, y = x^2 + 1$;
- (3) $(1 - x^2)y' + xy = 2x, y = 2 + c\sqrt{1 - x^2}, c$ 是任意常数;

$$(4) \quad y'' + y = \sec x, \quad y = \cos x \ln \cos x + x \sin x, 0 < x < \pi/2;$$

$$(5) \quad y' - 2xy = 1, \quad y = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + e^{x^2};$$

$$(6) \quad y' = \frac{f'(x)}{g(x)} y^2 - \frac{g'(x)}{f(x)}, \quad y = -\frac{g(x)}{f(x)};$$

$$(7) \quad y^{(4)} + y = 0, \quad y = \exp\left[\frac{\sqrt{2}}{2}x\right] \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x.$$

10. 给定一阶微分方程 $\frac{dy}{dx} = 2x$:

- (1) 求出它的通解;
- (2) 求通过点(1,4)的特解;
- (3) 求出与直线 $y = 2x + 3$ 相切的解;
- (4) 求出满足条件 $\int_0^1 y(x) dx = 2$ 的解;
- (5) 画出(2)、(3)、(4)中解的图形.

11. 对下面的每一个方程分别求 r 的值,使得 $y = e^{rx}$ 是它的解:

- (1) $y' + 2y = 0;$
- (2) $y'' - y = 0;$
- (3) $y'' + y' - 6y = 0;$
- (4) $y - 3y'' + 2y' = 0.$

12. 对下面的每一个方程分别求 r 的值,使得 $y = x^r$ 是它的解:

- (1) $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0;$
- (2) $x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0.$

13*. 设 $y = (x)$ 是微分方程 $\frac{dy}{dx} = y(a - by)$ 的解,其中 a 和 b 是正常数.

- (1) 求出该方程的两个常数解;
- (2) 从微分方程确定 y 的区间,使得解 $y = (x)$ 单调增或单调减;
- (3) 从微分方程求出解 $y = (x)$ 的拐点的 y 坐标;
- (4) 在同一个坐标系下画出该方程的常数解和一些非常数解 $y = (x)$ 的图形.

§ 1.2 解的存在惟一性

微分方程来源于实际问题,求解微分方程的目的就是为了得到某一变化过程中变量的变化规律.当一个实际问题所满足的微分方程建立后,我们所关心的是该微分方程有没有解和有多少解?例如微分方程 $y' = 2x$ 有无限多个解 $y = x^2 + c$,对这个方程再加上初始条件 $y(x_0) = y_0$ 后就有惟一的解 $y = x^2 + y_0 - x_0^2$.在这一节中我们讨论初始值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1.2.1)$$

解的存在惟一性.

1.2.1 例子和思路

微分方程初始值问题的解是在某一个区间上存在的,例如初值问题

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1$$

的解是 $y = \frac{1}{1-x}$, 它在 $(-\infty, 1)$ 上存在. 而同一方程满足初始值 $y(1) = -2$ 的解

为 $y = \frac{2}{1-2x}$, 它的存在区间为 $(\frac{1}{2}, +\infty)$. 初始值问题

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y(0) = a \quad (a > 0)$$

的解为 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, 存在区间为 $(-a, a)$. 而初始值问题

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} \frac{2y}{x^3}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad y(0) = 0$$

的解有无穷多个, 均在 $(-\infty, +\infty)$ 存在, 它们是

$$y(x) = \begin{cases} c_1 \exp\left[-\frac{1}{x^2}\right], & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ c_2 \exp\left[-\frac{1}{x^2}\right], & x < 0. \end{cases}$$

对一般方程的初始值问题, 我们不可能通过求出其解析解的方法来说明它有惟一的解或多个解, 因为有可能由于我们的方法限制或者技巧不高等原因, 没有求出解的表达式. 因此, 我们需要一个从微分方程右端的函数 $f(x, y)$ 来判断初始值问题的解存在惟一的方法, 我们的思路不是直接求出解, 而是采用构造性的方法从理论上论证解存在且惟一. 为了便于理解定理证明的思路, 先看下面的例子.

例 1.2.1 证明代数方程

$$x = 1 + \frac{1}{10} \sin x \quad (1.2.2)$$

有惟一的解.

证 由于无法求出方程(1.2.2)解的具体表达式, 我们使用构造性的方法来证明它有惟一的解. 取实数 $x_0 = 1$, 令

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 1 + \frac{1}{10} \sin x_0, \\
 x_2 &= 1 + \frac{1}{10} \sin x_1, \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_n &= 1 + \frac{1}{10} \sin x_{n-1}, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{1.2.3}$$

这样就得到了一个迭代序列 $\{x_n\}$. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ 存在, 它就是方程 (1.2.2) 的解, 我们可以用 Cauchy 收敛准则来证明序列的收敛性. 事实上, 对于任意 $\varepsilon > 0$ 和正整数 n, p , 因为

$$\begin{aligned}
 |x_{m+1} - x_m| &= \frac{1}{10} |\sin x_m - \sin x_{m-1}| \leq \dots \leq \frac{1}{10^m} |x_1 - x_0| \leq \frac{1}{10^m}, \\
 |x_{n+p} - x_n| &\leq |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + \dots + |x_{n+p} - x_{n+p-1}| \\
 &\leq \frac{1}{10^n} \left[1 + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{10^{p-1}} \right] \\
 &\leq \frac{1}{10^n} \frac{10}{9}.
 \end{aligned}$$

故取 $N = 2 + \left[\ln \frac{1}{9\varepsilon} / \ln 10 \right]$, 对一切 $n > N$ 有 $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. 由 Cauchy 收敛准则得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ 存在, 对 (1.2.3) 两边取极限就得到 x^* 是 (1.2.2) 的解.

若 x^* 和 y^* 都是 (1.2.2) 的解, 它们都必须满足方程 (1.2.2), 故

$$|x^* - y^*| = \frac{1}{10} |\sin x^* - \sin y^*| \leq \frac{1}{10} |x^* - y^*|.$$

上面的不等式仅当 $x^* = y^*$ 时成立, 这就得到了方程 (1.2.2) 解的存在惟一性.

在证明方程 (1.2.2) 解的存在惟一性时, 我们并没有求出这个解是什么, 而是通过构造迭代序列的方法经过理论分析来实现的. 对微分方程初始值问题 (1.2.1) 解的存在惟一性的讨论, 完全是用同样的思路进行的. 接下来看一个具体的例子.

例 1.2.2 证明初始值问题

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad y(0) = 1 \tag{1.2.4}$$

的解存在且惟一.

证 若 $y = y(x)$ 是初始值问题的解, 则对 (1.2.4) 中的方程两边积分得

$y(x)$ 满足下列积分方程:

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(s) ds. \quad (1.2.5)$$

反之,若一个连续函数 $y = y(x)$ 满足(1.2.5),则它必是初始值问题(1.2.4)的解,即初值问题(1.2.4)与积分方程(1.2.5)解的存在惟一性是等价的.用构造迭代序列的办法来构造(1.2.5)的解,令

$$y_0(x) = 1,$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x y_0(s) ds = 1 + x,$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x y_1(s) ds = 1 + x + \frac{x^2}{2!},$$

.....

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x y_{n-1}(s) ds = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

由数学分析的知识知函数列 $y_n(x)$ 收敛,且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = e^x$.直接代入验证此极限函数 $y = e^x$ 是初始值问题(1.2.4)的解.这就得到了解的存在性,为证明解的惟一性,设初始值问题有两个解 $y = \varphi(x)$ 和 $y = \psi(x)$,令 $g(x) = \varphi(x) - \psi(x)$,则 $g(x)$ 是可微函数,且满足

$$g'(x) = \varphi'(x) - \psi'(x) = g(x), \quad g(0) = 0.$$

由此得 $(g'(x) - g(x))e^{-x} = 0$, 即 $(g(x)e^{-x})' = 0$, 故 $g(x)e^{-x}$ 为常数,又因为 $g(0) = 0$, 故 $g(x)e^{-x} \equiv 0$, 这表明 $g(x) \equiv 0$, 即 $\varphi(x) \equiv \psi(x)$. 所以初始值问题(1.2.4)的解是存在惟一的.

对一般微分方程的初始值问题解的存在惟一性的讨论过程比较复杂,但分析论证过程的思路与这一具体例子完全一致.接下来我们就介绍初始值问题解的存在惟一性定理,并给出详细的证明过程.

1.2.2 存在惟一性定理及其证明

设 $f(x, y)$ 在矩形区域

$$R = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

连续.如果有常数 $L > 0$,使得对所有 $(x, y_1), (x, y_2) \in R$ 都有

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

则称 $f(x, y)$ 在 R 上关于 y 满足 Lipschitz 条件, L 称为 Lipschitz 常数.

定理 1.1 若 $f(x, y)$ 在 R 上连续且关于 y 满足 Lipschitz 条件,则初始值问题

(1.2.1) 在区间 $|x - x_0| \leq h$ 上存在惟一的解, 其中 $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, $M = \max_{(x,y) \in R} |f(x, y)|$.

证 定理 1.1 可以用 Picard 逐步逼近法来证明, 思路与例 1.2.2 相同, 但过程相当长. 主要步骤有: 将初始值问题(1.2.1) 解的存在惟一性问题转化为一个等价的积分方程解的存在惟一性问题; 构造积分方程的迭代函数序列; 证明此函数序列的收敛性; 证明此序列的极限函数就是方程的解; 证明解的惟一性. 我们仅证明解在 $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ 上存在且惟一, 在 $x_0 - h \leq x \leq x_0$ 的情况类似.

(1) 等价的积分方程 若 $y = y(x)$ 是初始值问题(1.2.1) 的解, 对(1.2.1) 的两端积分得 $y(x)$ 满足下列积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds. \quad (1.2.6)$$

反之, 若 $y = y(x)$ 是积分方程(1.2.6) 的连续解, 则 $y(x_0) = y_0$, 由 $f(x, y)$ 的连续性知(1.2.6) 右端是可微函数, 故 $y(x)$ 可微. 对(1.2.6) 两边求导得 $y'(x) = f(x, y(x))$, 即 $y = y(x)$ 是初始值问题(1.2.1) 的解. 这表明初始值问题(1.2.1) 与积分方程(1.2.6) 解的存在惟一性是等价的, 我们就可以通过证明积分方程(1.2.6) 连续解的存在惟一性而得到原初始值问题(1.2.1) 解的存在惟一性. 由于积分方程对函数的要求低, 故用等价的积分方程来讨论就比较方便.

(2) 构造 Picard 迭代函数列 取 $\varphi_0(x) = y_0$, 代入(1.2.6) 右端后得到函数

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi_0(s)) ds.$$

显然 $\varphi_1(x)$ 也是连续函数, 如果 $\varphi_1(x) = \varphi_0(x)$, 则 $\varphi_0(x)$ 就是积分方程(1.2.6) 的解. 否则我们又把 $\varphi_1(x)$ 代入(1.2.6) 的右端得到连续函数

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi_1(s)) ds.$$

如果 $\varphi_2(x) = \varphi_1(x)$, 则 $\varphi_1(x)$ 就是(1.2.6) 的解. 否则我们重复这个过程, 作函数

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi_{n-1}(s)) ds. \quad (1.2.7)$$

这样就得到了一个连续函数列 $\{\varphi_n(x)\}$, 它称为 Picard 迭代序列.

(3) 迭代序列的收敛性 对于 Picard 迭代序列 $\{\varphi_n(x)\}$, 有下面两个引理.

引理 1.1 对一切 n 和 $x \in [x_0, x_0 + h]$, $\varphi_n(x)$ 连续且满足

$$|\varphi_n(x) - y_0| \leq b. \quad (1.2.8)$$

证 显然 $\varphi_0(x)$ 在 $[x_0, x_0 + h]$ 上有定义、连续, 且满足(1.2.8)式. 设 $\varphi_n(x)$ 在 $[x_0, x_0 + h]$ 上有定义、连续且满足(1.2.8)式, 由(1.2.7)中给出的递推定义方法知 $\varphi_{n+1}(x)$ 在 $[x_0, x_0 + h]$ 中有定义, 且

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(x) - y_0| &\leq \int_{x_0}^x |f(s, \varphi_n(s))| ds \\ &\leq M(x - x_0) \leq Mh \leq b. \end{aligned}$$

故(1.2.8)式成立. 引理 1.1 证毕.

引理 1.2 函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[x_0, x_0 + h]$ 上一致收敛.

证 考虑函数项级数

$$\varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)), \quad x_0 \leq x \leq x_0 + h. \quad (1.2.9)$$

它前 n 项的部分和为

$$S_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^n (\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)) = \varphi_n(x).$$

于是, $\{\varphi_n(x)\}$ 的一致收敛性与级数(1.2.9)的一致收敛性等价. 我们对级数(1.2.9)的通项进行估计.

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| &\leq \int_{x_0}^x |f(s, y_0)| ds \leq M(x - x_0), \\ |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| &\leq \int_{x_0}^x |f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_0(s))| ds \\ &\leq L \int_{x_0}^x |\varphi_1(s) - \varphi_0(s)| ds \\ &\leq L \int_{x_0}^x M |s - x_0| ds \leq \frac{ML}{2!} (x - x_0)^2. \end{aligned}$$

其中第二个不等式是由 Lipschitz 条件得到的, 设对于正整数 n , 有不等式

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq \frac{ML^{n-1}}{n!} (x - x_0)^n,$$

则当 $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ 时有

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| &\leq \int_{x_0}^x |f(s, \varphi_n(s)) - f(s, \varphi_{n-1}(s))| ds \\ &\leq L \int_{x_0}^x |\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s)| ds \end{aligned}$$

$$\leq \frac{ML^n}{n!} \int_{x_0}^x (s - x_0)^n ds = \frac{ML^n}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

于是,由数学归纳法得,对所有的自然数 k 有

$$|\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)| \leq \frac{ML^{k-1}h^k}{k!}, \quad x_0 \leq x \leq x_0 + h. \quad (1.2.10)$$

由于正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1} \frac{h^k}{k!}$ 收敛,由 Weierstrass 判别法知,级数(1.2.9)在 $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ 上一致收敛.引理 1.2 证毕.

(4) Picard 序列的极限函数就是积分方程(1.2.6)的连续解.由引理 2 知 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[x_0, x_0 + h]$ 上一致收敛,令

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x), \quad x_0 \leq x \leq x_0 + h.$$

则 $\varphi_n(x)$ 的连续性和一致收敛性得 $\varphi(x)$ 也是 $[x_0, x_0 + h]$ 上的连续函数.

引理 1.3 $\varphi(x)$ 是积分方程(1.2.6)定义于 $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ 上的连续解.

证 由 Lipschitz 条件

$$|f(x, \varphi_n(x)) - f(x, \varphi(x))| \leq L |\varphi_n(x) - \varphi(x)|$$

以及 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ 上的一致收敛,得出函数序列 $\{f_n(x)\}$ ($f_n(x) = f(x, \varphi_n(x))$) 在 $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ 上一致收敛于函数 $f(x, \varphi(x))$.因而,对(1.2.7)取极限得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) &= y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(s, \varphi_n(s)) ds \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} f(s, \varphi_n(s)) ds, \end{aligned}$$

即

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds.$$

这表明, $\varphi(x)$ 是积分方程(1.2.6)的连续解.引理 1.3 证毕.

(5) 解的惟一性.由前面的构造性证明过程,我们已经得到了积分方程(1.2.6)的一个连续解 $\varphi(x)$,若(1.2.6)在 $[x_0, x_0 + h]$ 上还有一个连续解 $\psi(x)$,则必须说明 $\psi(x) \equiv \varphi(x)$.

引理 1.4 设 $\psi(x)$ 是积分方程(1.2.6)定义于 $[x_0, x_0 + h]$ 上的一个连续解,则必须有 $\psi(x) \equiv \varphi(x)$, $x \in [x_0, x_0 + h]$.

证 令 $g(x) = |\psi(x) - \varphi(x)|$,则 $g(x)$ 是定义在 $[x_0, x_0 + h]$ 的非负连续函数.由 $\psi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 所满足的积分方程和 $f(x, y)$ 的 Lipschitz 条件得

$$\begin{aligned} g(x) &\leq \int_{x_0}^x |f(s, \psi(s)) - f(s, \varphi(s))| ds \\ &\leq L \int_{x_0}^x |\psi(s) - \varphi(s)| ds = L \int_{x_0}^x g(s) ds. \end{aligned}$$

令 $u(x) = L \int_{x_0}^x g(s) ds$, 则 $u(x)$ 是定义于 $[x_0, x_0 + h]$ 上的连续可微函数, 且 $u(x_0) = 0, 0 \leq g(x) \leq u(x), u'(x) = Lg(x)$. 于是

$$u'(x) \leq Lu(x), (u'(x) - Lu(x))e^{-Lx} \leq 0.$$

对最后一个不等式从 x_0 到 x 积分得

$$u(x)e^{-Lx} \leq u(x_0)e^{-Lx_0} = 0.$$

故 $g(x) \leq u(x) \leq 0$. 即 $g(x) \equiv 0, x \in [x_0, x_0 + h]$. 引理 1.4 证毕.

至此, 我们完成了定理 1.1 的证明.

1.2.3 存在惟一性定理的说明及例子

对定理 1.1, 我们给出几点说明

(1) 定理中的 Lipschitz 条件验证比较困难, 我们经常用 $f(x, y)$ 在 R 上有连续的偏导数这一较强但容易验证的条件来代替. 事实上, 如果 $f(x, y), f_y(x, y)$ 在 R 上连续, 则 $f_y(x, y)$ 在 R 上有界, 令 $|f_y(x, y)| \leq L$ 在 R 上成立, 则由微分中值定理可以得出

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &\leq |f_y(x, y_2 + \theta(y_1 - y_2))| |y_1 - y_2| \\ &\leq L |y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

(2) 定理中 $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ 的几何意义. 在矩形 R 中有 $|f(x, y)| \leq M$, 故初始值问题(1.2.1)的解曲线上的斜率必定介于 $-M$ 和 M 之间. 过点 (x_0, y_0) 分别作斜率为 $-M$ 和 M 的直线, 当 $M \leq \frac{b}{a}$ 时如图 1.2(a) 所示, 解 $y = \varphi(x)$ 在 $x_0 - a \leq x \leq x_0 + a$ 中有定义; 而当 $M > \frac{b}{a}$ 时如图 1.2(b) 所示, 不能保证解 $y = \varphi(x)$ 在 $x_0 - a \leq x \leq x_0 + a$ 中有定义, 它有可能在此区间内跑到矩形 R 外去, 使得 $f(x, y)$ 无定义, 只有 $x_0 - \frac{b}{M} \leq x \leq x_0 + \frac{b}{M}$ 时, 才能保证解 $y = \varphi(x)$ 在 R 内, 故要求解的存在范围为 $|x - x_0| \leq h$. 图 1.2 中所取的点 (x_0, y_0) 是坐标原点 $(0, 0)$.

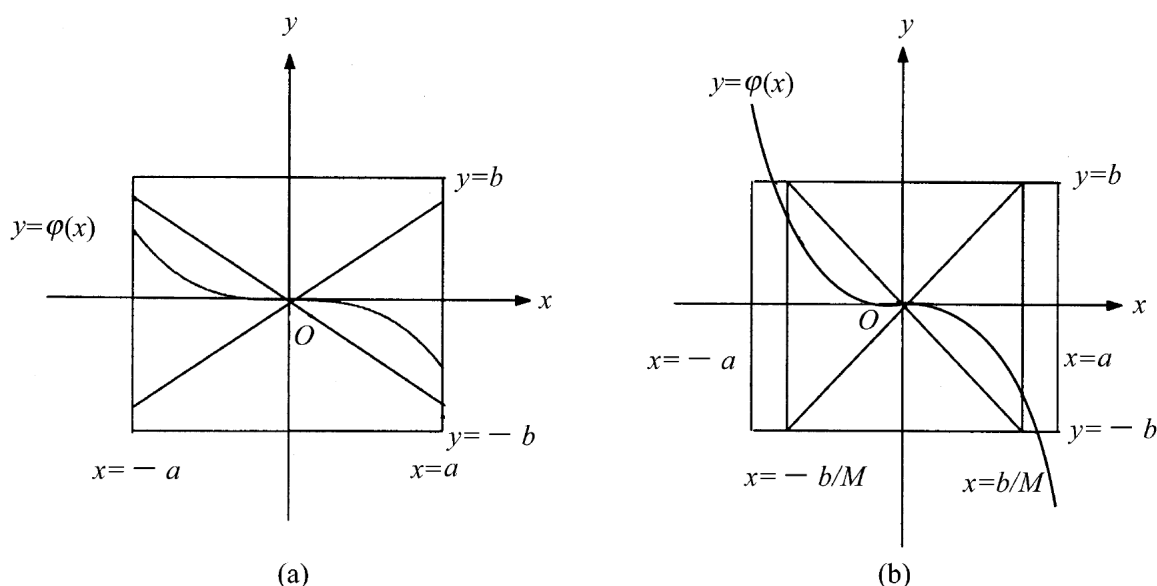


图 1 2

(3) 定理 1.1 中的结论只是在局部范围内给出了解的存在惟一性,但在许多情况下可以反复使用定理 1.1,将解的存在范围延拓到较大的区间.例如下面的定理就给出了解在 $(-\infty, +\infty)$ 存在的条件^[10].

定理 1.2 设 $f(x, y)$ 在 xOy 平面上每一点连续,对 y 满足局部的 Lipschitz 条件,且有正常数 N ,使得

$$|f(x, y)| \leq N|y|,$$

则初始值问题(1.2.1)的解在 $(-\infty, +\infty)$ 存在.

(4) 定理 1.1 中 $f(x, y)$ 的连续性即可保证初始值问题解的存在性, $f(x, y)$ 关于 y 满足 Lipschitz 条件是用来保证解的惟一性.

最后我们举几个例子来说明定理 1.1 的应用过程.

例 1.2.3 证明初始值问题

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + e^{-y^2}, \quad y(0) = 0 \quad (1.2.11)$$

的解 $y = y(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 存在,且当 $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 时 $|y(x)| \leq 1$.

证 取 $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, 在矩形区域

$$R = \{(x, y) \mid |x| \leq \frac{1}{2}, |y| \leq 1\}$$

局部 Lipschitz 条件为:对点 $P_0(x_0, y_0)$,有矩形区域 $R_0 = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a_0, |y - y_0| \leq b_0\}$,和依赖于 P_0 的常数 L_{P_0} ,使得 " $(x, y_1), (x, y_2) \in R_0$ 有 $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L_{P_0} |y_1 - y_2|$." 则称 $f(x, y)$ 满足局部 Lipschitz 条件

上, $f(x, y) = x^2 + e^{-y^2}$ 连续, 且它关于 y 有连续的偏导数. 计算

$$M = \max_{(x, y) \in R} \{x^2 + e^{-y^2}\} = 1 + \left[\frac{1}{2}\right]^2 = \frac{5}{4},$$

$$h = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5/4}\right\} = \frac{1}{2}.$$

故由解的存在惟一性定理知, 初始值问题 (1.2.11) 的解 $y = y(x)$ 在 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ 内存在惟一, 当然也在 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 内存在惟一. 对 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, 由 (1.2.11) 等价的积分方程得 $y(x) \geq 0$, 且

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x (s^2 + \exp(-y^2(s))) ds \\ &\leq \int_0^x \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] ds = \frac{5}{4}x \leq \frac{5}{8} \leq 1. \end{aligned}$$

证毕.

例 1.2.4 讨论初始值问题

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \quad y(0) = 0 \quad (1.2.12)$$

解存在惟一的区间.

解 对任意给定的正数 a, b , 函数 $f(x, y) = 1 + y^2$ 均在矩形区域

$$R = \{(x, y) \mid |x| \leq a, |y| \leq b\}$$

内连续, 且对 y 有连续的偏导数. 计算

$$M = \max_{(x, y) \in R} f(x, y) = 1 + b^2,$$

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{1 + b^2}\right\}.$$

由于 a 和 b 都可以任意取, 我们先取 b , 使得 $\frac{b}{1 + b^2}$ 最大, 显然 $b = 1$ 时, $\frac{b}{1 + b^2} = \frac{1}{2}$ 为 $\frac{b}{1 + b^2}$ 的最大值. 故可取 $a = 1, b = 1$, 此时由定理 1.1 得到的初始值问题 (1.2.12) 解的存在惟一的区间是 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

用解的存在惟一性定理一次时最多能得到 (1.2.12) 的解在 $|x| \leq \frac{1}{2}$ 内存在, 但为了使问题的结果更好, 可以再一次使用解的存在惟一性定理. 令 $y_1 = y\left(\frac{1}{2}\right)$,

以点 $P_1\left[\frac{1}{2}, y_1\right]$ 为矩形区域的中心, 讨论新的初始值问题

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \quad y\left[\frac{1}{2}\right] = y_1. \quad (1.2.13)$$

这样就可以使初始值问题(1.2.13)解的存在区间向右扩展. 在矩形区域

$$R_1 = \{(x, y) \mid |x - \frac{1}{2}| \leq a, |y - y_1| \leq b\},$$

中有

$$M = \max_{(x, y) \in R_1} f(x, y) = 1 + (y_1 + b)^2,$$

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{1 + (y_1 + b)^2}\right\}.$$

当 $b = \sqrt{1 + y_1^2}$ 时, $\frac{b}{1 + (y_1 + b)^2}$ 取得最大值 $h_1 = \frac{\sqrt{1 + y_1^2}}{1 + (y_1 + \sqrt{1 + y_1^2})^2}$. 故我们

取 $b = \sqrt{1 + y_1^2}$, $a = h_1$, 可以得到(1.2.13)的解在 $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + h_1$ 上存在. 这样, 将(1.2.12)和(1.2.13)的解结合起来, 我们得到了初始值问题(1.2.12)的解存在区间为 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + h_1$, 已经将解的存在区间向右扩展了一步. 这一过程当然还可以重复下去. 事实上, 初始值问题(1.2.12)的解是 $y = \tan x$, 它的存在区间是 $|x| < \frac{\pi}{2}$.

例 1.2.5 计算初始值问题

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^3, \quad y(1) = 1 \quad (1.2.14)$$

的 Picard 迭代序列中的前 3 个.

解 初值问题(1.2.14)等价的积分方程为

$$y(x) = 1 + \int_1^x (1 + y^3(s)) ds.$$

根据 Picard 序列的构造方法, 分别得

$$y_0(x) = 1,$$

$$y_1(x) = 1 + \int_1^x (1 + 1^3) ds = 1 + 2(x - 1),$$

$$y_2(x) = 1 + \int_1^x (1 + (1 + 2(s - 1))^3) ds$$

$$= 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + 2(x-1)^4.$$

当需要计算的 Picard 迭代序列中的函数比较多时, 可以用 Maple 软件包来计算. 对初始问题(1.2.14), 利用 Maple 指令:

```
y0:=1;
y1:=1+int(1+y0^3,x=1..x);
y2:=1+int(1+y1^3,x=1..x);
y3:=1+int(1+y2^3,x=1..x);
```

即可求出 Picard 迭代序列中的前 4 个函数, 回车后 Maple 的输出为

```
y0:=1
y1:=1+2x
y2:=1+2x^4+4x^3+3x^2+2x
y3:=1+8/13x^13+4x^12+12x^11+116/5x^10+34x^9+81/2x^8
+279/7x^7+33x^6+117/5x^5+14x^4+7x^3+3x^2+2x
```

例 1.2.6 利用 Picard 迭代法求初始值问题

$$\frac{dy}{dx} = 2x(1+y), \quad y(0) = 0 \quad (1.2.15)$$

的解.

解 初始值问题(1.2.15)等价的积分方程为

$$y(x) = \int_0^x 2s(1+y(s))ds.$$

其迭代序列分别为

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 0, \\ y_1(x) &= \int_0^x 2s ds = x^2, \\ y_2(x) &= \int_0^x 2s(1+s^2)ds = x^2 + \frac{x^4}{2!}, \\ y_3(x) &= \int_0^x 2s \left[1 + s^2 + \frac{s^4}{2!} \right] ds = x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}, \\ &\dots\dots\dots \\ y_n(x) &= x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!}. \end{aligned}$$

取极限得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = e^{x^2} - 1.$$

即初始值问题(1.2.15)的解为 $y = e^{x^2} - 1$.