

# 实验模态分析及其应用

李德葆 陆秋海 著

科学出版社

2001

## 内 容 简 介

本书系统介绍模态试验及模态分析的基本概念、现代技术及其应用,全书共十一章,大体可分为三部分:第一至第四章叙述模态分析和试验的一般性基础,包括频响分析、谱分析及数据分析;第五章至第八章叙述模态试验与参数识别,这是模态分析方法和技术的核心;第九章至第十一章叙述模态分析方法和技术的工程应用。

本书特点为:既论述理论、方法,又有工程实际;既注重物理概念清晰,又不失数学的严谨。

### 图书在版编目(CIP)数据

实验模态分析及其应用/李德葆等著. —北京:科学出版社,2001

ISBN 7-03-008507-8

I. 振… II. 李… III. 振动分析方法:模态综合法 IV. 032

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 08570 号

**科学出版社 出版**

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

**中国科学院印刷厂印刷**

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2001年2月第一版 开本:787×1092 1/16

2001年2月第一次印刷 印张:21 1/4

印数:1—1 500 字数:485 000

**定价: 43.00 元**

## 前 言

通过实验及数据处理来识别实际结构的动力学模型,是近 30 多年来结构动力特性研究方面的一个重要发展.实验模态分析方法与计算模态分析方法一起,成为解决现代复杂结构动态特性设计的相辅相成的重要手段.应用模态分析方法人们有可能把复杂的实际结构简化成所谓模态模型,来进行系统的响应计算,从而大大地简化系统的数学运算.

系统识别和参数识别的概念,最早在系统控制工程中采用.用于振动结构时的基本构想是:通过实验测得实际响应来寻求相应的模型或调适预想的模型参数,使其成为实际结构的最佳描述.

由实验数据去识别方程,称为系统识别.在方程形式已经确知的情况下,运用实验数据来估计其参数,则称为参数识别.模态分析法则为在承认实际结构可以运用所谓“模态模型”来描述其动态响应的条件下,通过实验数据的处理和分析,寻求其“模态参数”.因此,模态分析法应属于参数识别的范畴.

模态分析的实质,是一种坐标转换.其目的在于把原在物理坐标系统中描述的响应向量,放到所谓“模态坐标系”中来描述.这一坐标系统的每一个基向量恰是振动系统的一个特征向量.运用这一坐标系的好处是:利用各特征向量之间的正交特性,可使描述响应向量的各个坐标互相独立而无耦合.换句话说,在这一坐标系中,振动方程是一组互无耦合的方程,每一个坐标均可单独求解.

因此,模态分析的关键在于得到振动系统的特征向量(或称特征振型,模态振型).实验模态分析便是用实验的方法来寻求模态振型以及描述响应向量的各个坐标(称为模态坐标).

因此,一个直接的想法便是如何分离出振动的“纯模态”(使结构按某一阶固有振型振动,而不含其他振型)来.最简单的情况是当结构的各阶固有频率相差较大,而阻尼又较小的情况.这时,可以认为,以某一固有频率激振时,该阶固有模态在响应中占主导地位,在一定误差范围内即可当作纯模态响应来看待.这一情况使识别工作可以化为一个一个的单自由度系统来进行,思路清楚,方法直观,易于理解.对于所谓“密集模态”情况,即某些固有频率十分接近时,要想得到“纯模态”,则须要采用多点激振,利用“力的分配”使结构只产生某个指定的模态响应.

严格地说,在实际试验中要激出“纯模态”响应是不可能的.任何一种分布的激振力必将激出多个模态响应;实际测得的响应则是多个模态响应叠加的结果.注意,我们只应说多个“模态响应”的“叠加”.不同模态的响应可以叠加,尽管各模态之间是正交的.不应把上述叠加现象称为“模态耦合”,这是一种概念上的错误.按照定义,各固有模态之间总是不耦合的.从能量平衡的观点来看,每一固有模态表现为一种特定的能量平衡状态,各平衡状态之间没有能量交换,也就是互不耦合.

既然在许多情况下很难激出“纯模态”,识别工作必须面对这一事实,找寻一种可以同时识别若干模态的方法,这就是所谓多自由度模型识别法.

无论是单自由度法或是多自由度法,我们都认为模型本身是确定的,也就是说方程是清楚的,我们的工作就在于调适方程的参数,以适合实测响应曲线.当然,实测曲线本身带有误差,也不是理想的.必要时我们应能有根据地把实测曲线作必要的修改.通常的情况是,调适参数的方法本身应有能力消除实测误差的影响,或使其影响减到可以接受的程度,使其和模型预计的曲线相适应,并

由此确定模型的各项参数.上述过程即称为曲线拟合法.

于是就有所谓单自由度曲线拟合法——SDOF法(single degree of freedom curve fitting)与多自由度曲线拟合法——MDOF法(multidegree of freedom curve fitting)之分.

在比例阻尼的条件下,识别中采用实模态模型;非比例阻尼时,则应采用复模态模型.注意将比例阻尼或非比例阻尼的概念与线性和非线性的概念区分开来.所谓比例阻尼,通常是指阻尼阵可表示为以下形式:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$$

式中 $\alpha, \beta$ 为常数,非比例阻尼不能用上式表示.非比例阻尼导致复模态,然而系统仍可以是线性的.模态分析法是线性系统的一种参数识别方法.

非线性系统方面的工作近年来已为较多人所重视,但总体看来,这方面的成果不多.要从复杂系统中抽象出非线性模型来仍有待探索.

一个识别过程,是对实测数据的处理及分析过程.为了恰当地采集和有效地利用真实数据,不但应当熟悉模态分析理论,而且应当熟悉测量技术以及数据处理方面的有关知识.一个识别方法的好坏,要看它处理实测数据的能力.用假定数据证明了的巧妙的数学程序,在用来处理具有噪声污染的实测数据时,却不一定是成功的程序.事实上,实测数据不仅受到噪声的污染,而且包含实际结构在建模时可能未曾考虑的许多复杂因素的影响.因此,只有那些被实测数据证明了的才是好方法.

模态分析是一种手段,应着眼应用.最主要的应用是建立结构动态响应的预测模型,为结构的动强度设计及疲劳寿命的估计服务.除此以外,还有多方面的用途.应用模态分析不仅要求应用者对模态分析技术本身熟悉,而且要熟悉振动领域的有关其他知识和技术.例如,若我们只希望移动结构系统的某一阶共振频率,并打算采用附加质量法,那么,只要选定合适的附加质量点并测出该点的直接导纳曲线,运用作图法就可以确定附加质量的大小及其移频结果.而要较大幅度地改变结构的动态特性,则要进行模态修改的灵敏度分析,并在结构修改后进行动特性的重分析.

一个应提醒注意的问题是:模态分析的结果必然伴随着模态坐标的缩减.从原理上说,坐标变换不改变系统的自由度.也就是说,在物理坐标系统中有几个自由度,在模态坐标系统中就应当有几个模态坐标(或者说必有同样多的模态).而在实验中,我们总是只取其中的若干阶起主要作用的模态,而忽略其余的模态(或者仅将舍去的各模态的影响统一考虑成两个“残余影响项”).这就是所谓模态坐标的缩减.因此,如果有人埋怨说,他用模态分析法想对结构的动态性能做非常细微的分析,而没有达到预想的效果,那么,这种埋怨很可能是不合理的.

由于在模态分析的同时进行了模态坐标的缩减,因此,同一结构系统,在两个坐标系中具有不同的自由度.一般情况下模态坐标数少于物理坐标数.也是由于这一原因,由模态参数用坐标变换反求物理参数一般是不可能的.

如果说在物理坐标系统中所表达的结构振动方程是从动力平衡观点(或牛顿第二定律)建立的,那么,在模态坐标系统中建立的响应计算的模态模型或运动方程则是从能量平衡观点建立的.在模态坐标系统中,无论是模态坐标或模态参数,均具有统观的意义,与系统的各模态所体现的整体平衡状态有关.局部的作用是与整体的模态平衡相对比而存在的.因此局部物理参数的变化虽能在模态参数中得到反映,但并非总是很敏感的,有些局部的变化甚至是不敏感的.例如在某阶振型的节点处附加质量,对该阶模态参数就不会引起变化.人们常常通过测量模态参数的变化来检测结构局部损伤,但是,不能指望用这种方法来检测非常小的局部损伤.实践说明,振型对于局部损伤的敏感性大于其他参数的敏感性,应变模态振型比位移模态振型更敏感.

但是,模态分析及其所涉及的有关实验技术、信号分析及数据处理等领域的理论和实践问题,仍在故障诊断特别是安全运行监察方面起着基础性的作用.本书中介绍的随机振动与谱分析以及小波分析的基本概念,不但对模态分析是必要的,对于在模态分析的基础上发展故障诊断也将有所裨益.近年来,神经网络法的应用日趋广泛.本书对此也做了必要的介绍.主要着眼点也是放在将模态分析与之相结合,应用于发展故障诊断和运行检测方面.

本书共分十一章,前四章依次介绍机械振动的若干理论概念、机械阻抗法与频响分析、多自由度系统的模态分析原理、随机振动与谱分析以及小波变换的有关概念和测量方法.第五至第七章介绍模态试验、模态参数识别的频域法和时域法.第八章专题介绍应变模态分析和曲率模态分析.第九章为结构动特性设计与运行响应仿真,含模态综合、结构修改及响应预测.第十章为模态分析的若干专题应用举例,有选择地介绍了几种类型的应用实例,主要选自作者的应用研究成果,第十一章专题介绍基于模态分析的结构修改和故障检测神经网络法.

本书系统地介绍了模态分析的基本原理、试验分析技术及其应用,注意反映其新近发展.在应变模态分析和曲率模态分析以及基于模态分析的神经网络应用方面,反映了作者的近期研究成果.

本书得以完成,得益于国内外许多同行的多方帮助,参考了许多作者发表的研究成果.在书中论及有关专题处参考的一些重要的文献,已在当页下加注;一般性的参考文献则列于书后.由于参考文献很多,未能一一尽列,请见谅.对于他们的贡献,作者表示深深的感谢.

作者感谢四通集团公司佟丽霞工程师对本书成稿的校对、打印工作所进行的帮助和贡献.感谢科学出版社对本书的编辑出版所给予的多方帮助.本书的出版,得到中国科学院科学出版基金的资助,作者表示衷心的感谢.

李德葆

1999年12月20日

于清华园

# 目 录

第一章 结构振动的基本理论概念 .....	( 1 )
§ 1-1 关于运动量的定义及表达方法 .....	( 1 )
§ 1-2 振动系统的力学模型和特性参数 .....	( 4 )
§ 1-3 多自由度系统的特性参数阵 .....	( 8 )
§ 1-4 特征向量之间的正交性 .....	(10)
§ 1-5 坐标变换与方程的解耦 .....	(11)
§ 1-6 简谐力激励下的强迫振动 .....	(14)
§ 1-7 单位脉冲响应函数与杜哈美尔(Duhamel)积分 .....	(18)
第二章 机械阻抗法与频响分析 .....	(25)
§ 2-1 振动系统机械阻抗的概念 .....	(26)
§ 2-2 单自由度系统的频响特性,导纳曲线 .....	(33)
§ 2-3 单自由度约束系统的五种曲线及其特殊点 .....	(38)
§ 2-4 五种类型的导纳曲线的比较 .....	(43)
§ 2-5 具有结构阻尼的情况 .....	(46)
§ 2-6 机械导纳的传统测量方法 .....	(50)
§ 2-7 导纳曲线分析法原理 .....	(52)
第三章 多自由度系统模态分析的理论背景 .....	(58)
§ 3-1 多自由系统强迫振动的模态叠加法 .....	(58)
§ 3-2 振动系统的物理模型和模态模型间的转换 .....	(62)
§ 3-3 频响函数 .....	(63)
§ 3-4 频响函数的图像 .....	(67)
§ 3-5 实验模态分析中坐标缩减问题 .....	(70)
§ 3-6 刚体模态 .....	(73)
§ 3-7 具有结构阻尼的情况 .....	(75)
§ 3-8 复模态理论 .....	(78)
§ 3-9 时域响应函数矩阵和时域响应计算模型 .....	(86)
§ 3-10 脉冲响应函数、频响函数与拉普拉斯变换之间的关系 .....	(87)
第四章 离散傅里叶变换、动态信号谱分析及小波变换 .....	(92)
§ 4-1 傅里叶级数的离散算法.采样定理 .....	(92)
§ 4-2 离散傅里叶变换(DFT) .....	(93)
§ 4-3 抗混滤波 .....	(94)
§ 4-4 快速傅里叶变换(FFT) .....	(95)
§ 4-5 功率谱密度分析与频响函数估计 .....	(98)
§ 4-6 加窗和泄漏问题 .....	(102)
§ 4-7 选带傅里叶分析 .....	(106)

§ 4-8	相干函数与相干函数的估计 .....	(108)
§ 4-9	信号的时频分析技术 .....	(110)
§ 4-10	STFT 与小波变换的比较 .....	(112)
§ 4-11	连续小波变换重构及其性质 .....	(113)
§ 4-12	几种常见的基本小波 .....	(117)
<b>第五章</b>	<b>频响函数的测试</b> .....	(119)
§ 5-1	试验准备及试验设计 .....	(120)
§ 5-2	试验结构的激励方法 .....	(125)
§ 5-3	不同类型激励的应用和评述 .....	(129)
§ 5-4	单点宽频带激振条件下结构系统频响函数的估计 .....	(135)
§ 5-5	多输入多输出(MIMO)频响函数的估计 .....	(140)
§ 5-6	多输入多输出频响函数矩阵的 $\hat{H}$ 估计法 .....	(143)
<b>第六章</b>	<b>频域模态参数识别</b> .....	(146)
§ 6-1	实测频响函数曲线的初步审核 .....	(146)
§ 6-2	单模态识别法 .....	(147)
§ 6-3	修正的单模态识别法 .....	(154)
§ 6-4	模态振型标准化 .....	(156)
§ 6-5	多模态识别法的原则及最小二乘法介绍 .....	(159)
§ 6-6	Klosterman 迭代识别法 .....	(162)
§ 6-7	Levy 法 .....	(164)
§ 6-8	正交多项式拟合法 .....	(168)
§ 6-9	优化识别法 .....	(171)
§ 6-10	单输入多输出(SIMO)识别法 .....	(174)
§ 6-11	频域多参考点(MIMO)识别法 .....	(176)
<b>第七章</b>	<b>模态参数识别的时域法</b> .....	(180)
§ 7-1	时域信号的处理技术 .....	(181)
§ 7-2	时域最小二乘迭代法 .....	(185)
§ 7-3	时域复指数拟合法 .....	(187)
§ 7-4	Ibrahim 时域法 .....	(193)
§ 7-5	节约时域法(STD) .....	(201)
§ 7-6	多输入多输出(MIMO)复指数法 .....	(204)
§ 7-7	特征系统实现算法(ERA) .....	(208)
<b>第八章</b>	<b>应变模态分析和曲率模态分析</b> .....	(216)
§ 8-1	模态分析与变形能平衡的概念 .....	(216)
§ 8-2	应变响应的模态模型的各种推导方法 .....	(217)
§ 8-3	应变模态振型之间的正交性 .....	(221)
§ 8-4	实验应变模态分析 .....	(222)
§ 8-5	应力场分析 .....	(224)
§ 8-6	瞬态应变响应预测的模态模型 .....	(225)
§ 8-7	例:有小孔的悬臂板的实验应变模态分析 .....	(226)

§ 8-8	曲率模态的理论依据 .....	(228)
§ 8-9	曲率频响函数矩阵和曲率模态试验 .....	(231)
§ 8-10	曲率模态分析的工程应用 .....	(233)
<b>第九章</b>	<b>结构动特性设计</b> .....	<b>(238)</b>
§ 9-1	部件分析 .....	(238)
§ 9-2	组合系统的频响特性的分析 .....	(239)
§ 9-3	子结构模态综合法 .....	(245)
§ 9-4	实验模态分析与有限元法相结合的综合法 .....	(250)
§ 9-5	结构局部修改重分析 .....	(257)
§ 9-6	动特性修改的灵敏度分析 .....	(264)
§ 9-7	响应的预估 .....	(269)
§ 9-8	激振力的识别 .....	(273)
<b>第十章</b>	<b>模态分析的若干应用举例</b> .....	<b>(276)</b>
§ 10-1	简单移频法 .....	(276)
§ 10-2	动力吸振器设计 .....	(280)
§ 10-3	大型矿用承载车架的模态试验与结构修改分析 .....	(283)
§ 10-4	大型滚筒式洗涤脱水机械的动特性设计 .....	(286)
§ 10-5	30 米高杆灯风致振动的测量分析 .....	(292)
§ 10-6	开口薄壁杆件的圣维南扭转刚度和翘曲刚度的识别 .....	(297)
<b>第十一章</b>	<b>基于模态分析的结构损伤识别的神经网络法</b> .....	<b>(302)</b>
§ 11-1	人的神经系统与神经元模型 .....	(303)
§ 11-2	人工神经网络与神经元模型 .....	(303)
§ 11-3	BP 神经网络及 BP 算法 .....	(305)
§ 11-4	RNN 网络及数据压缩的 recirculation 学习算法 .....	(309)
§ 11-5	结构损伤识别的神经网络分析法 .....	(311)
§ 11-6	结构损伤识别步骤 .....	(313)
§ 11-7	结构局部损伤辨识实例 .....	(314)
§ 11-8	结构损伤识别指标灵敏度比较及实例 .....	(318)
§ 11-9	运用频率指标诊断电机轴承故障 .....	(322)
<b>参考文献</b>	.....	<b>(327)</b>

# 第一章 结构振动的基本理论概念

振动研究必然涉及到物体的振动运动和与之相关的作用力的关系.一切物体都具有质量和弹性,因此,一切物体都有可能产生振动.绝大多数的工程机械在其工作过程中都将或多或少地承受某种程度的振动,这就要求在设计工作中,必须考虑到机械的振动特性.

振动系统可粗略地分为线性系统和非线性系统.对于线性系统,它服从叠加原理.目前模态分析法主要应用于线性系统.

振动状态是用运动量来衡量的.结构在各种激励条件下的运动状态与激励条件之间的关系可以通过若干参数按一定的数学模型来计算.这些特性参数,或是根据实际结构计算得到,或是通过实验得到.

本章的目的在于简略地介绍结构振动的基本理论概念,作为本书的前导.

## § 1-1 关于运动量的定义及表达方法

### 一、运动量

运动一般是时间的函数.下列三种运动量是振动中的基本运动量:

**位移.**位移总是相对于参考点而言的,一般选取惯性参照系中的静止点作为位移参考点.在振动系统中,往往选取质点的平衡位置作为参考点.偏离参考点的距离便是位移的大小.一般位移若采用下式表示:

$$x = x(t) \quad (1-1)$$

则周期振动可表为

$$x = x(t + T) \quad (1-2)$$

式中  $T$  为振动周期,具有时间单位,例如秒(s).周期的倒数称为频率  $f$

$$f = \frac{1}{T} \quad (1-3)$$

如果  $T$  的单位用秒,那么  $f$  的单位为赫兹(Hz).

**速度.**速度是位移的导数

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad (1-4)$$

**加速度.**加速度是速度的导数

$$a = \frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x} \quad (1-5)$$

### 二、简谐运动量

周期运动的最简单的形式是简谐运动.位移、速度和加速度的简谐运动表达式分别为

$$\begin{aligned}
 x &= |X| \sin(\omega t + \alpha) \\
 \dot{x} &= \omega |X| \sin\left[\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right] = |V| \sin\left[\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right] \\
 \ddot{x} &= \omega^2 |X| \sin\left[\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = |A| \sin(\omega t + \alpha + \pi)
 \end{aligned}
 \tag{1-6}$$

可见,简谐运动的速度超前位移 $\frac{\pi}{2}$ ,加速度又超前速度 $\frac{\pi}{2}$ .加速度和位移相差 $\pi$ ,这两个运动量总是方向相反.

### 三、简谐运动量的复数表示法

如果将简谐位移运动看成复平面上的旋转复矢量  $Xe^{j\omega t}$  在虚轴上的投影,如图 1-1 所示,那么  $x$  可表为

$$x = \text{Im}(Xe^{j\omega t}), \quad X = |X|e^{j\alpha} = |X|(\cos\alpha + j\sin\alpha) \tag{1-7}$$

此处  $\omega$  为旋转角速度,常称为圆频率,它与频率的关系为

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T} \tag{1-8}$$

那么,速度和加速度可表示为

$$\dot{x} = \text{Im}(j\omega Xe^{j\omega t}) = \text{Im}(Ve^{j\omega t}), \quad \ddot{x} = \text{Im}((j\omega)^2 Xe^{j\omega t}) = \text{Im}(Ae^{j\omega t}) \tag{1-9}$$

$X, V$  和  $A$  是简谐运动的位移、速度和加速度所对应的旋转复矢量的起始值( $t=0$  时的矢量),三者之间的关系为

$$X = |X|e^{j\alpha}, \quad j\omega X = V = |V|e^{j\left[\alpha + \frac{\pi}{2}\right]}, \quad j\omega V = A = |A|e^{j(\alpha + \pi)} \tag{1-10}$$

它们之间的相位关系如图 1-2 所示.

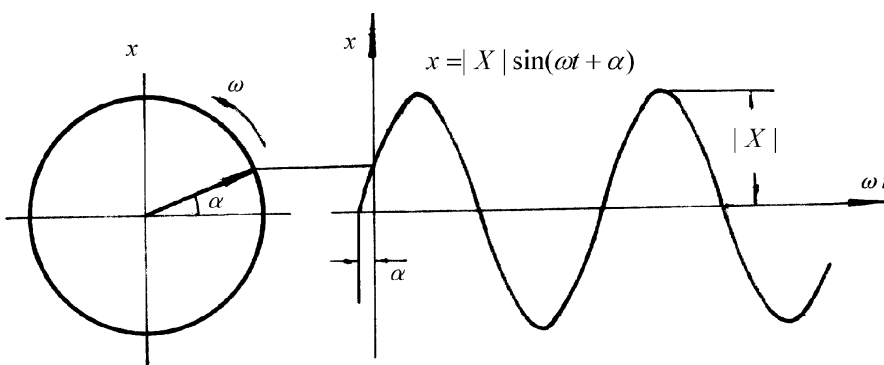


图 1-1 简谐运动被看成旋转复矢量的投影

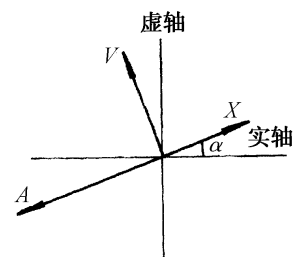


图 1-2  $X, V$  和  $A$  之间的相位关系

### 四、周期运动的傅里叶级数表示法

任何周期运动,  $x = x(t)$ , 如果它是实际存在的一种振动,通常都是有限振动,根据傅里叶级数理论,总可以将它分解成若干简谐分量,而把这一周期运动表为傅里叶级数的

形式

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t) \quad (1-11)$$

式中

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \quad (1-12)$$

称为基频,因此  $k\omega_1$  称为  $k$  倍频,系数  $a_k, b_k$  为振动分量的幅值,由下式给出

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega_1 t) dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega_1 t) dt \end{aligned} \quad (1-13)$$

式(1-11)也可以写成以下形式

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N X_k \sin(k\omega_1 t + \alpha_k) \quad (1-14)$$

式中

$$\begin{aligned} X_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ \alpha_k &= \arctan(b_k / a_k) \end{aligned} \quad (1-15)$$

根据上述简谐分析过程可知,若以频率为横坐标,画出谐波分量的幅值,可以得到一组离散的垂线如图 1-3(a)所示,称为傅里叶幅值谱.同样的道理,我们可以画出傅里叶相

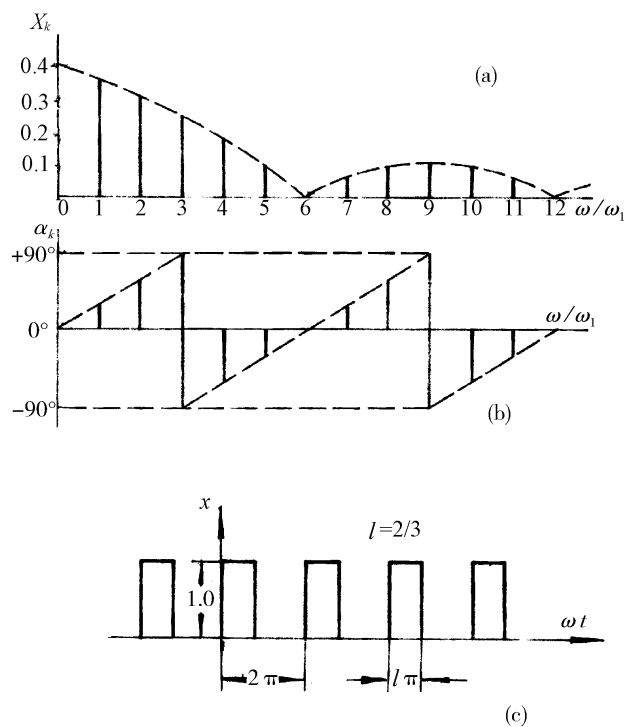


图 1-3 周期运动的傅里叶谱表示法

位谱,如图 1-3(b)所示.该图所对应的周期运动为周期重复的方脉冲,如图 1-3(c)所示.

## § 1-2 振动系统的力学模型和特性参数

任一线弹性结构或机械系统,在承受外界激励或动力载荷时,其运动状态取决于其物理特性,包括其质量分布、弹性性能(柔度或刚度)分布以及能耗机制或称阻尼.以适当的参数形式来表征这些特性,形成数学模型,是动力学分析的起点.

一个实际机械或工程结构,在研究它的振动问题时,总要把它作某种简化,抽象出其主要的力学本质,形成一个理想化的力学模型.模型的特点则以若干参数来表达.例如,一般说来,一个实际机械结构,作为一个连续弹性体来考虑其振动问题时,要用无限多的自由度才能描述其振动状态.然而,在许多情况下,结构的某些部分往往可以当作刚体看待,甚至可以看成若干刚体通过弹簧联结而成.这样一来,一个无限自由度体系便简化成了一个有限自由度体系.事实上,有些看起来十分复杂的结构,甚至可以简化为一个单自由度系统,用它来研究该结构在某种特定条件下的振动问题仍然可以得到满意的精度.

### 一、单自由度系统

从真实结构到简化为单自由度系统,是对某些系统的一种有条件的极端化的抽象.如钟摆的设计、单盘转子的振动、重型机械的主动隔振等简化为单自由度来分析问题,仍然可以得到满意的结果.更重要的意义还在于单自由度模型揭示的系统振动的许多本质现象以及研究方法是结构振动研究的基础.

单自由度系统的力学模型表示成一个无质量的弹簧支持着一个无弹性的质量,如图 1-4 所示.这一模型的参数是质量  $m$  和刚度  $k$ .该系统受到一个外界的初始干扰之后,便产生振动.

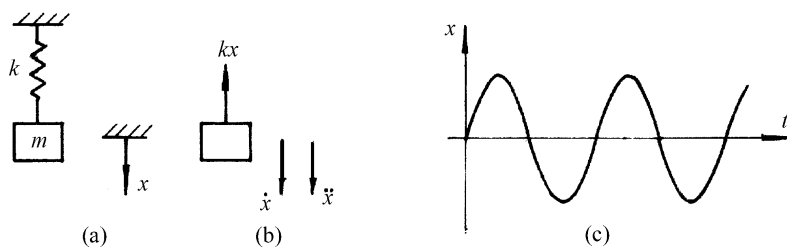


图 1-4 无阻尼单自由度系统

在一个相当短的时间内来研究机械系统的自由振动状态时,可以认为它是一种无阻尼的自由振动.按照图 1-4(b)所规定的参考坐标系统,运用牛顿第二定律可写出质量块的运动方程为

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1-16)$$

解上述方程时,可令  $x = X_m \sin \Omega t$ ,代入得

$$(k - m\Omega^2) X_m \sin \Omega t = 0$$

上式中  $X_m \neq 0$ ,则应要求

$$k - m\Omega^2 = 0 \quad (1-17)$$

或

$$\Omega = \sqrt{k/m} \quad (1-18)$$

$\Omega$  称为单自由度系统的无阻尼自由振动的固有频率, 是该振动系统的又一个重要参数. 但是, 它是由  $k$  和  $m$  所决定的, 它是一种导出参数.

无阻尼系统一旦开始振动, 就不会停止, 如图 1-4 所示. 事实上, 由于摩擦等原因, 自由振动的振幅将逐渐衰减, 最后归于停止. 为了反映这种衰减特性, 我们将引进阻尼的概念. 这样, 系统的力学模型便如图 1-5 所示. 图中引入阻尼系数  $c$ , 定义为阻尼力和运动速度之比, 即  $F_d = c\dot{x}$ . 于是, 质量块的运动微分方程变为

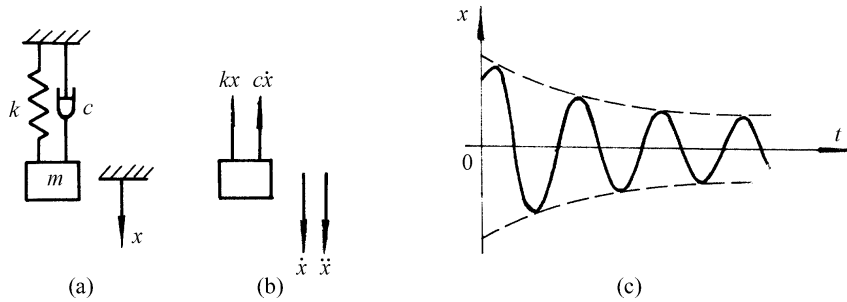


图 1-5 有阻尼的单自由度系统

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (1-19)$$

或改写作

$$\ddot{x} + 2\left[\frac{c}{2m}\right]\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \quad \ddot{x} + 2\sigma\dot{x} + \Omega^2 x = 0 \quad (1-20)$$

式中

$$\sigma = \frac{c}{2m} \quad (1-21)$$

称为衰减系数, 是阻尼效果的另一种表达形式. 为解上述微分方程, 可令  $x = Xe^{st}$ , 代入方程后得

$$(s^2 + 2\sigma s + \Omega^2)Xe^{st} = 0, \quad s^2 + 2\sigma s + \Omega^2 = 0 \quad (1-22)$$

上式称为该振动系统的特征方程, 该式的根为

$$s_{1,2} = -\Omega \pm \sqrt{\sigma^2 - \Omega^2} = -\sigma \pm \Omega \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (1-23)$$

式中

$$\zeta = \sigma/\Omega = \frac{c/2m}{\sqrt{k/m}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{c}{c_c} \quad (1-24)$$

称  $c_c = 2\sqrt{mk}$  为临界阻尼系数, 它的意义将在下面讨论.  $\zeta$  是  $c$  和  $c_c$  之比, 称之为相对阻尼系数.

在  $m$  和  $k$  确定的条件下,  $s$  值取决于  $\zeta$ , 即取决于  $c$ .

当  $c < c_c$  时,  $\zeta < 1$

$$s_{1,2} = -\sigma \pm j\Omega \sqrt{1 - \zeta^2}$$

因此微分方程的解为

$$x = e^{-\sigma t} \left( X_1 e^{j\sqrt{1-\zeta^2}\Omega t} + X_2 e^{-j\sqrt{1-\zeta^2}\Omega t} \right)$$

利用欧拉公式可将上式化为

$$x = X e^{-\sigma t} \sin \left[ \sqrt{1 - \zeta^2} \Omega t + \alpha \right] = X e^{-\sigma t} \sin(\nu t + \alpha) \quad (1-25)$$

该式表示一个随时间变化的衰减振动,如图 1-5(c)所示.式中,  $\nu = \Omega \sqrt{1 - \zeta^2}$ , 是有阻尼自由衰减振动频率.

当  $c = c_c$  时,  $\zeta = 1$ ,  $\sigma = \Omega$ ,  $s_1 = s_2 = -\Omega$ .微分方程的解为

$$x = e^{-\Omega t} (X_1 + X_2 t)$$

该式已不表示振动.

当  $c > c_c$  时,  $\sqrt{\zeta^2 - 1} > 0$

$$x = X_1 e^{[-\sigma + \Omega \sqrt{\zeta^2 - 1}] t} + X_2 e^{[-\sigma - \Omega \sqrt{\zeta^2 - 1}] t}$$

显然.上式也不是振动.

可见,  $c = c_c$  是系统能否实现自由振动的分界点,因而称  $c_c$  为临界阻尼系数.

到此为止,对于单自由度系统,我们已经引入了三个基本参数,即质量  $m$ ,刚度  $k$ ,阻尼  $c$ .固有频率  $\Omega$  由系统的  $m$  及  $k$  确定.关于阻尼,还引进了相对阻尼系数  $\zeta$  的概念.另外我们还命名  $2\sqrt{mk}$  为临界阻尼系数  $c_c$ .  $c_c$  虽然具有阻尼的量纲,但并非系统实际存在的一种阻尼,它只是一种重要的参考量.衰减系数  $\sigma$ ,是阻尼效果的又一种表达形式.由于存在  $\Omega^2 = \nu^2 + \sigma^2$  的关系,  $\nu = \Omega \sqrt{1 - \zeta^2}$  为有阻尼自由振动的角频率,有时称  $\sigma$  为弧度阻尼.

## 二、二自由度系统

最简单的二自由度系统的力学模型如图 1-6(a)所示.

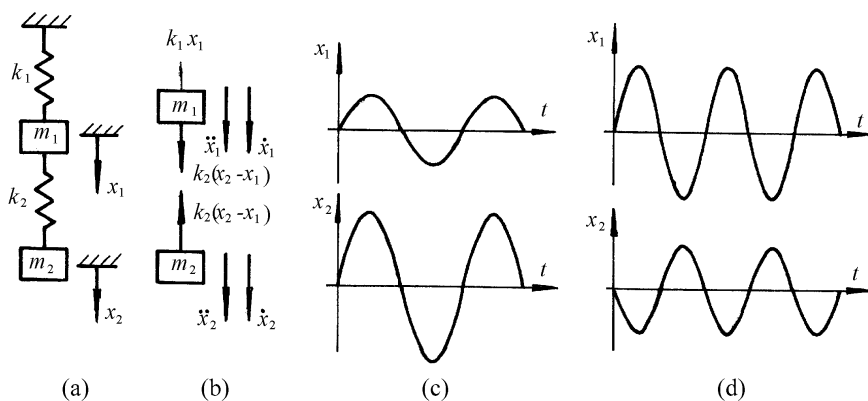


图 1-6 二自由度系统

(a)二自由度系统力学模型;(b)分离体;(c)  $\Omega_1$  时的振动;(d)  $\Omega_2$  时的振动

这里我们先不考虑阻尼.该系统的自由振动微分方程为

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \end{cases} \quad (1-26)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

令

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{j\omega t} \quad (1-27)$$

代入上式得

$$\left[ -\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (1-28)$$

上式有解的条件是

$$\left| -\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (1-29)$$

该式即为二自由度系统的特征方程,由此可解出两个特征值

$$\Omega_1^2 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{k_2}{m_2} + \frac{k_1 + k_2}{m_1} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{k_2}{m_2} + \frac{k_1 + k_2}{m_1} \right)^2 - 4 \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}} \right] \quad (1-30)$$

为更便于说明问题的概念而避免繁杂的文字公式,设  $m_1 = m_2 = m, k_1 = k_2 = k$ ,代入式(1-30)可得

$$\Omega_1^2 = 0.4 \frac{k}{m}, \quad \Omega_2^2 = 2.6 \frac{k}{m}$$

将  $\Omega_1^2$  及  $\Omega_2^2$  的值分别代入式(1-28)可得

$$\text{代入 } \Omega_1^2 \text{ 时, } \frac{X_1}{X_2} = 0.62; \quad \text{代入 } \Omega_2^2 \text{ 时, } \frac{X_1}{X_2} = -1.60 \quad (1-31)$$

应用欧拉公式,可得两个解为

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 0.62 \\ 1 \end{bmatrix} A_1 \sin \Omega_1 t, \quad \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1.60 \end{bmatrix} A_2 \sin \Omega_2 t \quad (1-32)$$

式中  $A_1$  和  $A_2$  为任意常数,在真实振动中由初始条件确定.

由以上讨论可见,对于二自由度系统,有两个自由振动的固有频率;对应于每一个固有频率,有各自的振型.此处引入振型的概念,反映多自由度系统振动时,振动量既是时间

的函数又是空间的函数。

### § 1-3 多自由度系统的特性参数阵

为了更具体地说明问题的概念,我们以一个三自由度系统为例,来探讨多自由度系统力学模型的物理参数。

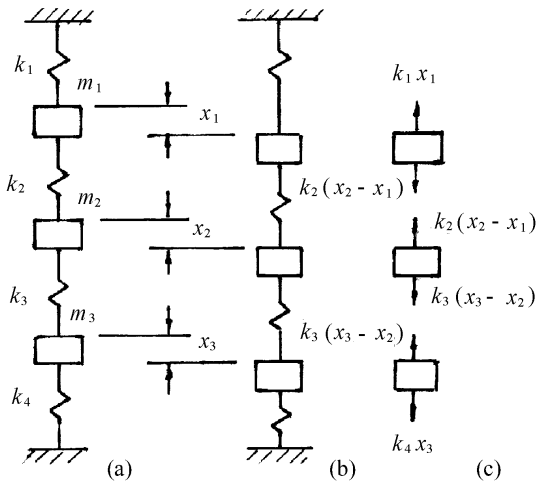


图 1-7 三自由度系统的力学模型

图 1-7 所示的系统有三个质量和四个弹簧,假定只允许上下振动,那么必须用三个坐标才能同时描述三个质量在空间的位置,因而称它为一个三自由度系统.该图的(a)是平衡状态;(b)是三个质量分别产生位移  $x_1, x_2, x_3$  的情况;(c)是三个质量块的分离体图.为建立方程方便起见,所有的位移都假定向下为正。

运用牛顿第二定律可得

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1) + k_3 (x_3 - x_2)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 = -k_3 (x_3 - x_2) - k_4 x_3$$

上式加以整理并写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (1-33)$$

运用矩阵符号,上式还可用下式来表示

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (1-34)$$

式中

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \quad (1-35)$$

分别称为质量阵和刚度阵.它们都是对称阵.通过简单的运算,不难得到

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{-k_2}{m_1} & 0 \\ \frac{-k_2}{m_2} & \frac{k_2 + k_3}{m_2} & \frac{-k_3}{m_2} \\ 0 & \frac{-k_3}{m_3} & \frac{k_3 + k_4}{m_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (1-36)$$

或缩写为

$$\{\ddot{x}\} = -[A]\{x\} \quad (1-36)'$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{k_1 + k_2}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} & 0 \\ -\frac{k_2}{m_2} & \frac{k_2 + k_3}{m_2} & -\frac{k_3}{m_2} \\ 0 & -\frac{k_3}{m_3} & \frac{k_3 + k_4}{m_3} \end{bmatrix} \quad (1-37)$$

称为系统矩阵. 一般情况下 $[A]$ 是非对称阵. 不难证明

$$[A] = [M]^{-1}[K] \quad (1-38)$$

求解式(1-33)或式(1-36)时, 可假定其解的形式为

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \sin \omega t$$

代入式(1-33)及式(1-36)分别得到

$$-\omega^2 [M]\{X\} + [K]\{X\} = \{0\} \quad (1-39)$$

$$[A]\{X\} = \omega^2 \{X\} \quad (1-40)$$

式中 $\{X\} = [X_1 \quad X_2 \quad X_3]^T$ .

由式(1-40)可见,  $([A] - \omega^2 [I])$ 就是 $[A]$ 的特征矩阵,  $[A]$ 的特征方程便是

$$\det([A] - \omega^2 [I]) = 0 \quad (1-41)$$

上式可以展开为

$$\det([A] - \omega^2 [I]) = (\Omega_1^2 - \omega^2)(\Omega_2^2 - \omega^2)(\Omega_3^2 - \omega^2) = \prod_{r=1}^3 (\Omega_r^2 - \omega^2) = 0 \quad (1-42)$$

由此解得三个特征值,  $\Omega_1^2, \Omega_2^2, \Omega_3^2$  就是系统作自由振动时三个固有频率的平方值. 将  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  分别代入式(1-40), 便能得到相应的特征向量 $\{\varphi_1\}, \{\varphi_2\}, \{\varphi_3\}$ , 即  $\Omega_r$  与 $\{\varphi_r\}$ 之间满足以下关系

$$[A]\{\varphi_r\} = \Omega_r^2 \{\varphi_r\}, \quad r = 1, 2, 3 \quad (1-43)$$

式中

$$\{\varphi_r\} = [\varphi_{1r} \quad \varphi_{2r} \quad \varphi_{3r}]^T \quad (1-44)$$

根据以上对于三自由度系统的讨论, 不难推广到一般多自由度系统, 并有以下结论:

(1) 对于多自由度系统来说振动系统的特性参数可表为刚度阵 $[K]$ 及质量阵 $[M]$ , 它们一般都是对称阵; 另外, 可定义一个系统矩阵 $[A] = [M]^{-1}[K]$ , 一般是非对称阵.

(2) 系统矩阵 $[A]$ 的第 $r$ 阶特征值 $\Omega_r^2$ 就是系统作第 $r$ 阶自由振动时振动固有频率的平方值.由于特征值的数目等于矩阵的阶数,而系统的矩阵的阶数又等于系统的自由度数,所以特征值的数目应等于自由度数.也就是说,系统作自由振动时所可能有的固有频率数等于系统的自由度数.

(3) 对应于每一个特征值,相应地有一列特征向量;特征向量 $\{\varphi_r\}$ 又称为第 $r$ 阶特征振型,或称为固有振型,也可称为固有模态振型.

### § 1-4 特征向量之间的正交性

系统各阶特征向量之间是关于质量阵和刚度阵正交的,这是一个重要性质.设第 $r$ 个特征值 $\Omega_r^2$ 所对应特征向量为 $\{\varphi_r\}$ ,它们应满足以下方程

$$[K]\{\varphi_r\} = \Omega_r^2 [M]\{\varphi_r\} \quad (1-45)$$

另有特征值 $\Omega_k^2$ 所对应的特征向量为 $\{\varphi_k\}$ ,则它们满足

$$[K]\{\varphi_k\} = \Omega_k^2 [M]\{\varphi_k\} \quad (1-46)$$

将式(1-45)左乘以 $\{\varphi_k\}^T$ ,将式(1-46)作转置,然后右乘以 $\{\varphi_r\}$ ,并注意到 $[M]^T = [M]$ , $[K]^T = [K]$ ,我们得到

$$\{\varphi_k\}^T [K]\{\varphi_r\} = \Omega_r^2 \{\varphi_k\}^T [M]\{\varphi_r\} \quad (a)$$

$$\{\varphi_k\}^T [K]\{\varphi_r\} = \Omega_k^2 \{\varphi_k\}^T [M]\{\varphi_r\} \quad (b)$$

式(a)一式(b),得

$$(\Omega_r^2 - \Omega_k^2)\{\varphi_k\}^T [M]\{\varphi_r\} = 0 \quad (c)$$

若 $\Omega_r \neq \Omega_k$ ,则式(c)要求

$$\{\varphi_k\}^T [M]\{\varphi_r\} = 0 \quad (d)$$

由于有式(d),从式(a)或式(b)中必然得出

$$\{\varphi_k\}^T [K]\{\varphi_r\} = 0 \quad (e)$$

若 $r = k$ ,那么式(c)中 $(\Omega_r^2 - \Omega_r^2) = 0$ ,所以 $\{\varphi_r\}^T [M]\{\varphi_r\}$ 和 $\{\varphi_r\}^T [K]\{\varphi_r\}$ 可取任何有限值,均能使式(c)满足.因此我们可以令

$$\{\varphi_r\}^T [M]\{\varphi_r\} = m_r \quad (f)$$

$$\{\varphi_r\}^T [K]\{\varphi_r\} = k_r \quad (g)$$

此处 $m_r$ 和 $k_r$ 可称为广义质量和广义刚度,以后我们称之为模态质量和模态刚度,它们的数值大小,只有当特征向量 $\{\varphi_r\}$ 作确定的规格化(或称正规化,规范化)处理后,才有确定值.

根据式(f)和式(g),由式(1-45)可以得到

$$\begin{aligned} \{\varphi_r\}^T [K] \{\varphi_r\} &= \Omega_r^2 \{\varphi_r\}^T [M] \{\varphi_r\} \\ k_r &= \Omega_r^2 m_r, \quad \Omega_r^2 = k_r m_r^{-1} \end{aligned} \quad (\text{h})$$

(d), (e), (f), (g), (h) 各式称为固有振型之间的正交特性. 集成矩阵形式, 便是

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [M_r], \quad [\Phi]^T [K] [\Phi] = [K_r], \quad [K_r] [M_r]^{-1} = [\Omega_r^2] \quad (1-47)$$

式中

$$\begin{aligned} [M_r] &= \text{diag}[m_1 \quad m_2 \quad \cdots \quad m_n], \quad [K_r] = \text{diag}[k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n] \\ [\Omega_r^2] &= \text{diag}[\Omega_1^2 \quad \Omega_2^2 \quad \cdots \quad \Omega_n^2], \quad [\Phi] = [\{\varphi_1\} \quad \{\varphi_2\} \quad \cdots \quad \{\varphi_n\}] \end{aligned} \quad (1-48)$$

分别称为广义质量阵、广义刚度阵、特征值矩阵, 均为对角阵;  $[\Phi]$  为固有振型矩阵. 在以后的模态分析原理中, 常将  $[\Phi]$  称为模态振型矩阵, 或简称为模态矩阵. 相应地  $[M_r]$  称为模态质量矩阵,  $[K_r]$  称为模态刚度矩阵.  $\Omega_r$  是固有频率, 模态分析中也称为模态频率.

## § 1-5 坐标变换与方程的解耦

系统的运动方程总是在一定的坐标系中用坐标来描述的. 选择好的坐标系可以使方程变得简单. 一般说来, 总希望各方程之间尽量减少耦合. 最理想的情况是每一个方程中只有一个待求的坐标. 这样每个方程便可单独求解, 完全没有耦合. 设法使一组本来耦合的方程变为一组无耦合方程, 称为方程的解耦.

### 一、坐标系统的选择与耦合的形成

为了说明各种耦合情况与坐标系统选择的关系, 我们将以图 1-8 所示的一个两自由度系统的振动为例. 刚性杆两端用弹簧支持. 该杆的质量中心  $G$  不在它的几何中心上. 由于选用的坐标系不同, 可出现三种类型的耦合情况.

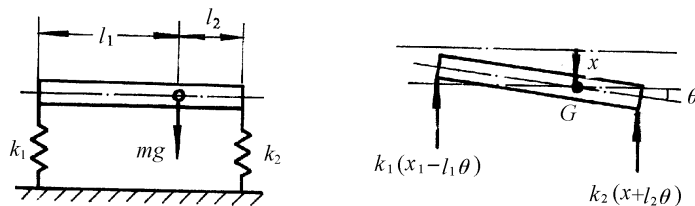


图 1-8 造成静态耦合的坐标系

1. 静态耦合. 若选取  $x$  和  $\theta$  为坐标, 如图 1-8 所示, 并且  $x$  代表质量中心的线性位移, 则可导得系统的微分方程为

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & (k_2 l_2 - k_1 l_1) \\ (k_2 l_2 - k_1 l_1) & (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (1-49)$$

式中  $J$  为转动惯量. 上式中刚度阵为非对角阵, 即耦合是由于弹性恢复力引起的, 我们称之为静态耦合或弹性耦合. 由上式可以发现, 如果  $k_2 l_2 = k_1 l_1$ , 则静态耦合亦将消失, 上式将变为一组无耦合的方程.

2. 动态耦合. 若在杆上找到一点  $C$ , 如图 1-9 所示. 若在该点加一静力后会使杆子产生静态平移, 即  $k_1 l_3 = k_2 l_4$ , 则选择坐标如图所示时, 将得到如下微分方程:

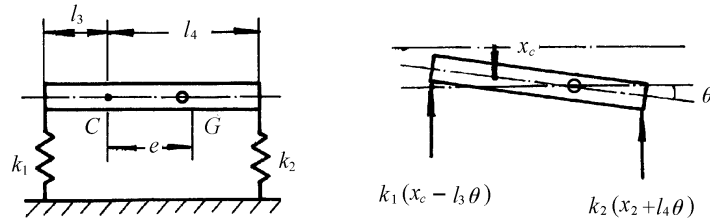


图 1-9 造成动态耦合的坐标选择

$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & J_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & k_1 l_3^2 + k_2 l_4^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_c \\ \theta \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (1-50)$$

上式中质量阵为非对角阵, 耦合是通过惯性力形成的, 我们称之为动态耦合或惯性耦合. 这就是说, 这一坐标系的选择消除了静态耦合, 却导致了动态耦合.

3. 静动态耦合. 若将代表移动的坐标选在杆的左端如图 1-10 所示, 则可得运动方程为

$$\begin{bmatrix} m & ml_1 \\ ml_1 & J_l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l \\ k_2 l & k_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_c \\ \theta \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (1-51)$$

上式中质量阵和刚度阵均为非对角阵, 称为静动态耦合.

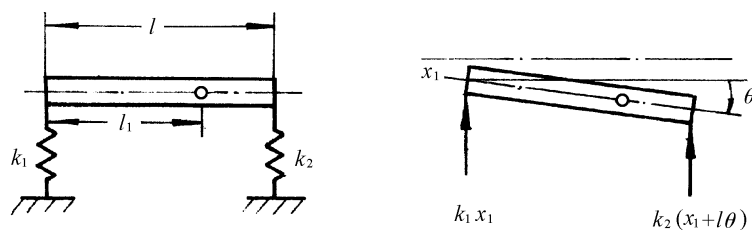


图 1-10 造成静动态耦合的坐标选择

由于质量阵或刚度阵有非对角元素, 因此在每一个微分方程中均出现两个未知坐标  $x$  和  $\theta$ , 使得单个方程不能独立求解.

## 二、坐标变换与方程解耦

一般情况下, 多自由度系统的微分方程为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (1-52)$$

式中 $[M]$ 和 $[K]$ 之一或二者均为非对角阵.上式是一组耦合方程.我们前面也曾说明,方程的耦合状态与坐标的选择有关,那么我们自然会问,能否通过坐标变换达到使方程解耦的目的.

具体地说,我们要建立一个新的坐标系,把原来在老坐标系中的运动量用新坐标系中的坐标来表示.新、老坐标变换作为一种线性变换,可用下式来表达

$$\{x\} = [T]\{q\} \quad (1-53)$$

式中 $\{q\}$ 为变换后的新坐标列阵, $[T]$ 为转换矩阵,它的每一列代表新坐标系中的一个向量基.上式展开可写成

$$\{x\} = q_1\{\eta_1\} + q_2\{\eta_2\} + \cdots + q_n\{\eta_n\} \quad (1-54)$$

由此可见, $q_i$ 代表 $\{x\}$ 在向量基 $\{\eta_i\}$ 上的分量的大小,称为主坐标, $\{q\}$ 为坐标列阵.上式所表达的关系也可以看作将 $\{x\}$ 向 $\{\eta_1\}, \{\eta_2\}, \cdots, \{\eta_n\}$ 上分解.要使这种分解有惟一的解,要求 $[T]$ 中各列向量之间是线性独立的,即不存在不全为0的 $N$ 个参数 $d_i$ ,使下式满足

$$\sum_{i=1}^N d_i \{\eta_i\} = 0 \quad (1-55)$$

于是我们的目的就在于寻得一个坐标变换矩阵以便进行坐标变换,使方程(1-52)解耦.

在前面我们曾经证明,系统在作无阻尼自由振动时,具有确定的一系列固有频率及相应的固有振型.那么该系统的任一实际振动 $\{x\}$ ,可否用上述固有振型之线性叠加来表示呢?如果可以,即有

$$\{x\} = q_1\{\varphi_1\} + q_2\{\varphi_2\} + \cdots + q_n\{\varphi_n\} = [\Phi]\{q\} \quad (1-56)$$

那么 $[\Phi]$ 可能是我们要寻求的坐标变换矩阵.一个 $N$ 自由度系统若有 $N$ 个不等特性值,运用正交原理式(1-47),可以证明,它们的相应的特征向量之间必然是线性独立的.这就使 $[\Phi]$ 具备了作为坐标变换矩阵的基本条件.下一步的问题则应考察它是否能使方程(1-52)解耦.

将式(1-56)代入式(1-52)得

$$[M][\Phi]\{\ddot{q}\} + [K][\Phi]\{q\} = \{0\} \quad (1-57)$$

上式左乘以 $[\Phi]^T$ 得

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \{\ddot{q}\} + [\Phi]^T [K] [\Phi] \{q\} = \{0\}$$

运用正交特性式(1-47)可得

$$[M_r]\{\ddot{q}\} + [K_r]\{q\} = \{0\} \quad (1-58)$$

上式已变成一组无耦合的方程,其中任一坐标 $q_r$ 可以由下式单独求解

$$m_r \ddot{q}_r + k_r q_r = 0, r = 1, 2, \cdots, N \quad (1-59)$$

在上述解耦过程中,我们采用固有振型矩阵作为坐标转换矩阵,该矩阵又称作固有振

动模态振型矩阵,或简称模态振型矩阵,甚至简称为模态矩阵.相应地  $q_r$  称为模态坐标,  $\{q\}$  称为模态坐标向量.变换后的坐标系统称为模态坐标系统.

### 三、Reyleigh 阻尼的解耦

在有阻尼的条件下,方程(1-52)变为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = 0 \quad (1-60)$$

一般地说,利用上述模态振型矩阵作坐标变换时,并不能使  $[\Phi]^T [C] [\Phi]$  变为对角阵.也就是说,阻尼阵在上述模态坐标系统中一般不能解耦.

Reyleigh 假定,有一类阻尼可以用下式表示

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (1-61)$$

式中  $\alpha$  和  $\beta$  为常数.这种阻尼形式称为比例阻尼.具有这种阻尼时,方程(1-60)变为

$$[M]\{\ddot{x}\} + (\alpha[M] + \beta[K])\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = 0$$

运用式(1-56)作坐标变换后可得

$$\begin{aligned} [M_r]\{\ddot{q}\} + (\alpha[M_r] + \beta[K_r])\{\dot{q}\} + [K_r]\{q\} &= 0 \\ [M_r]\{\ddot{q}\} + [C_r]\{\dot{q}\} + [K_r]\{q\} &= 0 \\ \{\ddot{q}\} + (\alpha[I] + \beta[\Omega_r^2])\{\dot{q}\} + [\Omega_r^2]\{q\} &= 0 \end{aligned} \quad (1-62)$$

式中  $[C_r]$  称为模态阻尼矩阵.因此,对于 Rayleigh 阻尼来说,它是可以在模态坐标系统中被对角化的,从而可以解除阻尼耦合.  $[C_r]$  中的任一元素  $c_r$  称为模态阻尼系数.我们有

$$c_r = \alpha m_r + \beta k_r, \quad \sigma_r = \frac{c_r}{2m_r} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta \Omega_r^2), \quad \zeta_r = \frac{1}{2}(\alpha + \beta \Omega_r^2) / \Omega_r \quad (1-63)$$

$\sigma_r$  称为模态衰减系数,  $\zeta_r$  称为模态阻尼比.

## § 1-6 简谐力激励下的强迫振动

受外界激励而产生的振动,称为强迫振动.外界的激励可能是直接力激励,也可能是其他类型的激励.例如地面运动引起的振动,是一种位移激励.由激励引起的结构上各点的运动(位移、速度和加速度)统称之为响应,因此有位移响应、速度响应和加速度响应.

### 一、单自由度系统的强迫振动

我们研究在外界激振力作用下(见图 1-11)的强迫振动.设激振力为

$$f = F_0 \sin \omega t$$

则系统的运动微分方程变为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \quad (1-64)$$

上式的稳态解为

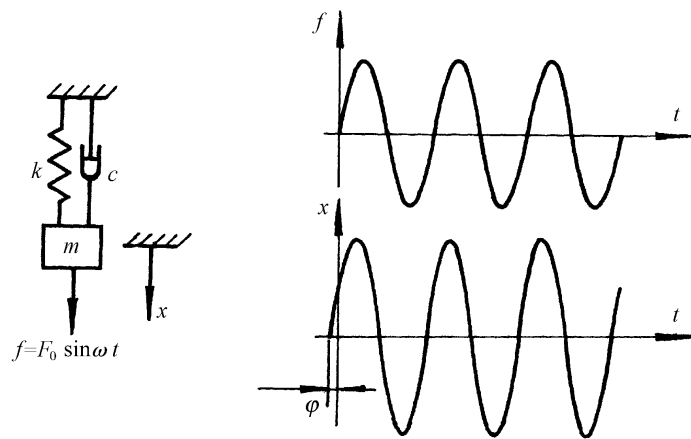


图 1-11 单自由度系统的强迫振动

$$x = X_m \sin(\omega t + \Phi) \quad (1-65)$$

式中

$$X_m = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + (2\sigma\omega)^2}}, \quad \Phi = -\arctan \frac{2\sigma\omega}{\Omega^2 - \omega^2} \quad (1-66)$$

在已知位移响应的表达式后,即可得到它的速度和加速度的表达式为

$$\dot{x} = \omega X_m \cos(\omega t + \Phi) = \omega X_m \sin\left[\omega t + \Phi + \frac{\pi}{2}\right] \quad (1-67)$$

$$\ddot{x} = \omega^2 X_m \sin(\omega t + \Phi + \pi) \quad (1-68)$$

从上述位移、速度、加速度的表达式可以看出,在保证  $F_0$  不变而  $\omega$  变化时,上述三种响应均将随  $\omega$  的变化而变化.现在研究这三种响应的幅值分别在何种条件下达到各自的最大值.

### 1. 位移幅值的极值条件

由于

$$X_m = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + (2\sigma\omega)^2}}$$

为求  $X_m$  的极值,可求  $1/X_m$  的极值,极值条件便为

$$\frac{d}{d\omega} [(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\sigma^2 \omega^2] = 0$$

由此可得

$$\omega^2 = \Omega^2 - 2\sigma^2$$

$$\omega_c = \Omega \sqrt{1 - 2\left[\frac{\sigma}{\Omega}\right]^2} = \Omega \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (1-69)$$

## 2. 速度幅值的极值条件

由

$$\omega X_m = \frac{F_0/m}{\frac{1}{\omega} \sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\sigma^2 \omega^2}}$$

用同样的方法可求得速度幅值的极值条件为

$$\omega_c = \Omega \quad (1-70)$$

## 3. 加速度幅值的极值条件

由

$$\omega^2 X_m = \frac{F_0/m}{\frac{1}{\omega^2} \sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + (2\sigma\omega)^2}}$$

求取  $\frac{d}{d\omega} \left\{ \frac{1}{\omega^4} [(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\sigma^2 \omega^2] \right\} = 0$  时的  $\omega$ , 得

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2} = 1 - 2\zeta^2, \quad \omega_c = \frac{\Omega}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}} \quad (1-71)$$

在  $2\zeta \ll 1$  时,  $1/(1 - 2\zeta^2) \approx 1 + 2\zeta^2$ , 因此上式可近似为

$$\omega_c = \Omega \sqrt{1 + 2\zeta^2} \quad (1-71)'$$

上述三种情况下的幅值极值时的频率称为对应情况下的共振频率. 表 1-1 列出了单自由度系统的各种特殊频率. 表 1-2 列出了三种响应的幅频特性曲线上的几个特殊频率处的幅值; 这三种幅频特性曲线示于图 1-12.

表 1-1 各种特殊频率

	无阻尼	有阻尼
自由振动频率	$\Omega = \sqrt{k/m}$	$\Omega \sqrt{1 - \zeta^2} = \nu$
位移共振频率	$\Omega$	$\Omega \sqrt{1 - 2\zeta^2}$
速度共振频率	$\Omega$	$\Omega$
加速度共振频率	$\Omega$	$\Omega / \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

表 1-2 特殊频率时的幅值

	$\omega = 0$	$\omega = \Omega$	共振时	$\omega = \infty$
$X_m$	$F_0/k = X_0$	$\frac{X_0}{2\zeta}$	$\frac{X_0}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$	0
$\omega X_m$	0	$\frac{1}{2\zeta} \left[ \frac{F_0}{k} \right] \Omega = \frac{V_0}{2\zeta}$	$\frac{V_0}{2\zeta}$	0
$\omega^2 X_m$	0	$\frac{\Omega^2}{2\zeta} \left[ \frac{F_0}{k} \right] = \frac{A_0}{2\zeta}$	$\frac{A_0}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$	$\frac{F_0}{m} = A_0$

这里所说的响应幅值达到极值的条件, 就是我们通常所说的共振条件. 从上面的讨论可知, 位移共振、速度共振以及加速度共振, 各有自己的共振频率. 可见, 在有阻尼的条件下强迫振动有两种响应的共振频率都不同于固有频率(无阻尼自由振动频率)  $\Omega$ , 只有速

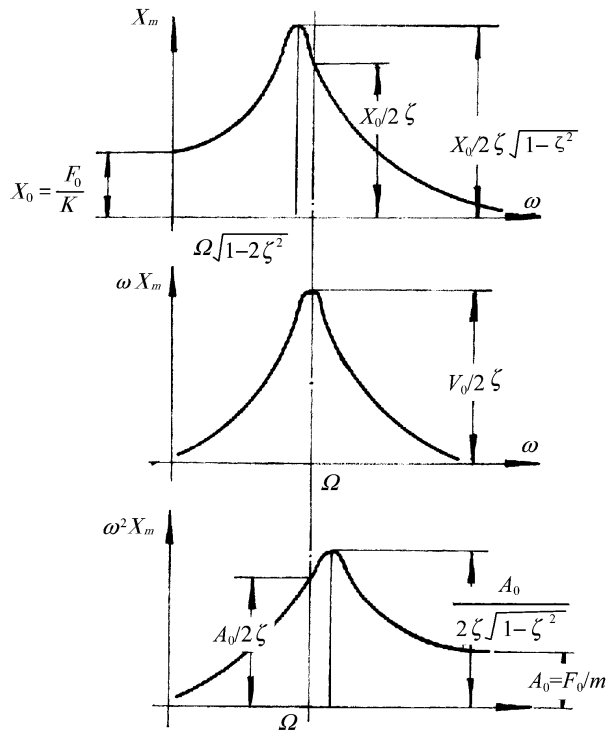


图 1-12 位移、速度、加速度响应的幅频特性曲线

度共振频率与  $\Omega$  相同。

## 二、多自由度系统的强迫振动

一个具有  $N$  个自由度的系统的强迫振动方程为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (1-72)$$

对于一般的已知激励力,运用数值计算方法总是可以解出响应来的.然而,对于大型结构,具有非常多的自由度,响应的计算是耗费巨大的.一般的计算过程是这样的:

### 1. 求该系统的特征值与特征向量

由该式的特征方程

$$\det(-\omega^2 [M] - [K]) = 0 \quad (1-73)$$

求得  $N$  个特征值及相应特征向量

$$\begin{aligned} & \Omega_1^2, \Omega_2^2, \dots, \Omega_N^2 \\ & \{\varphi_1\}, \{\varphi_2\}, \dots, \{\varphi_N\} \end{aligned} \quad (1-74)$$

### 2. 假定 $[C]$ 为 Rayleigh 阻尼,则作坐标变换

$$\{x\} = [\Phi]\{q\}$$

可得

$$m_r \ddot{q}_r + c_r \dot{q}_r + k_r q_r = f_r, \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (1-75)$$

式中

$$\begin{aligned} m_r &= \{\varphi_r\}^T [M] \{\varphi_r\}, & k_r &= \{\varphi_r\}^T \{k\} \\ c_r &= \{\varphi_r\}^T [C] \{\varphi_r\}, & f_r &= \{\varphi_r\}^T \{f\} \end{aligned} \quad (1-76)$$

于是  $q_r$  可以单独求解。

3. 在求得所有的  $q_r$  后,即求得  $\{q\}$  后,可按式(1-76)来计算结构系统各点的响应

$$\{x\} = \sum_{r=1}^N q_r \{\varphi_r\} \quad (1-77)$$

上述解题过程称为模态叠加法,  $q_r$  可以理解为第  $r$  阶固有振动模态  $\{\varphi_r\}$  对实际振动  $\{x\}$  所作的贡献。各阶模态所作贡献的大小除取决于结构本身的特点外,还取决于结构受激励力的频率范围,以及激振力分布的情况。一般说来只有其固有频率处于激励频率附近的那些模态的贡献大,远离激励频率的那些模态的贡献越来越小。因此,在实际计算中,只要考虑这样一些贡献大的模态就够了,这将使计算量大大减少。直接通过实验求得特征值和特征向量以及对应的其他模态参数,这就是实验模态分析的任务。模态分析法可以不必去求出所有的特征值和特征向量,而只是求出人们所需要的那几阶,包括模态质量、模态刚度和模态阻尼,用以建立响应计算模型。运用这些模态参数建立的响应计算模型,我们称之为模态模型。

## § 1-7 单位脉冲响应函数与杜哈美尔(Duhamel)积分

上一节我们讨论了在简谐激励下的强迫振动。对于线性系统而言,简谐激励下的强迫振动是周期激励强迫振动的基础。本节将讨论在瞬态或其他非周期性激励条件下的振动响应。我们将先介绍单位脉冲函数,并研究由这种脉冲冲量所引起的响应,称为单位脉冲响应函数。我们将会发现,单位脉冲响应函数实质上是振动系统特性的一种表现形式,它包含系统的全部动特性参数。最后,介绍运用杜哈美尔积分求取系统对于一般载荷条件的响应。

### 一、单位脉冲(unit impulse)和单位脉冲响应函数

定义:单位脉冲  $\delta(t)$  是这样一种函数,它具有以下性能

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \text{大于任何给定值,当 } t = 0 \text{ 时;但有} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases} \quad (1-78)$$

单位脉冲是一种极限脉冲,其物理意义可用图 1-13 来解释。该图说明,若将  $\delta(t)$  看成是力函数,则  $\delta(t)$  是图(a)所示冲量为 1 的矩形脉冲在脉宽  $\epsilon \rightarrow 0$  时的冲击力的极限情况(图(b))。  $\delta(t)$  具有力的量纲。

工程应用中还定义了一种延时单位脉冲  $\delta(t-t')$ ,其定义为

$$\delta(t-t') = \begin{cases} 0, & \text{当 } t \neq t' \text{ 时} \\ \text{大于任何指定值,当 } t = t' \text{ 时;但有} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t') dt = 1 \end{cases} \quad (1-79)$$

延时单位脉冲函数如图 1-14 所示.单位脉冲函数又称 Dirac delta 函数或简称 Dirac 函数. Dirac 函数有以下特性:

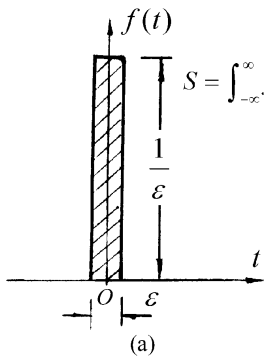


图 1-13 单位脉冲的物理解释

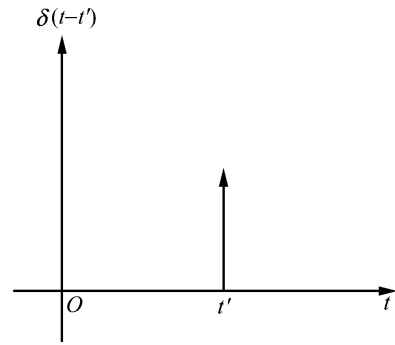


图 1-14 延时单位脉冲函数

(1)  $\int_{-\infty}^{\infty} p\delta(t)dt = p \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = p$ ,  $p$  为常数时;

(2) 它的傅里叶变换:  $F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega 0} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$ ; 这一特性表明,单位脉冲激振力提供白谱;

(3)  $\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\delta(t-t')dt = y(t')$ ,  $0 < t' < \infty$ .

该式表明 Dirac 函数的抽样特性.

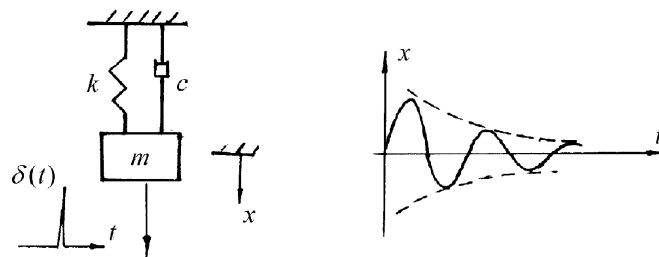


图 1-15 单位脉冲力作用于单自由度系统

单位脉冲力作用于图示单自由度系统时,其振动微分方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \delta(t)$$

对上式积分并取极限得

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} (m\ddot{x} + c\dot{x} + kx) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \delta(t) dt$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ (m\dot{x} + cx) \Big|_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} + k \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} x dt \right\} = 1$$

$$m\dot{x} \Big|_{-0}^{+0} + 0 + 0 = 1$$

上式意味着在  $t=0$  时  $\dot{x}(0)$  有一突变,即

$$\dot{x}(0) = \frac{1}{m}$$

这就是说单位脉冲激励的效应使系统获得初始速度  $\dot{x}(0) = \frac{1}{m}$ . 因为这一脉冲作用的时间很短, 此后系统即作自由振动, 并由下式决定

$$x(t) = X e^{-\sigma t} \sin(\nu t + \alpha)$$

$$t = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \frac{1}{m}$$

根据初始条件可确定  $X$  和  $\alpha$ . 最后将得到

$$x(t) = \frac{1}{m\nu} e^{-\sigma t} \sin \nu t \quad (1-80)$$

式中  $\nu = \Omega \sqrt{1 - \zeta^2}$ ,  $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ,  $\sigma = \frac{c}{2m}$ ,  $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{\sigma}{\Omega}$ . 式(1-80)即为单位脉冲响应函数, 又称为单自由度系统的时域响应函数, 用  $h(t)$  来表示, 即

$$h(t) = \frac{1}{m\nu} e^{-\sigma t} \sin \nu t, \quad t \geq 0 \quad (1-81)$$

$h(t)$  有以下特性:

$$(1) h(t) = \begin{cases} \frac{1}{m\nu} e^{-\sigma t} \sin \nu t, & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1-82)$$

$$(2) h(t - \tau) = \begin{cases} \frac{1}{m\nu} e^{-\sigma(t - \tau)} \sin \nu(t - \tau), & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases} \quad (1-83)$$

不难发现  $h(t)$  的表达式包含系统的所有的动特性参数, 它实质上是系统动特性在时域的一种表现形式.  $h(t)$  是单位脉冲冲量的响应, 其量纲为[位移/冲量].

## 二、单位脉冲响应函数的时—频变换

$h(t)$  的傅里叶变换用  $H(\omega)$  来表示, 我们称之为频域响应函数, 它是系统的动特性在频域的表现形式. 运用欧拉公式得

$$h(t) = \frac{e^{-\sigma t}}{m\nu} \cdot \frac{j}{2} (e^{-j\nu t} - e^{j\nu t}) = \frac{j}{2m\nu} \{ e^{-(\sigma+j\nu)t} - e^{-(\sigma-j\nu)t} \} \quad (1-84)$$

$$H(\omega) = F[h(t)] = \frac{j}{2m\nu} \int_0^{\infty} [e^{-(\sigma+j\nu)t} - e^{-(\sigma-j\nu)t}] e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{j}{2m\nu} \int_0^{\infty} [e^{-(\sigma+j\nu+j\omega)t} - e^{-(\sigma-j\nu+j\omega)t}] e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{j}{2m\nu} \left\{ \frac{1}{-\left[\sigma + j(\nu + \omega)\right]} - \frac{1}{-\left[\sigma + j(\nu - \omega)\right]} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-1}{2m\nu} \left\{ \frac{1}{j\sigma - (\nu + \omega)} - \frac{1}{j\sigma + (\nu - \omega)} \right\} \\
&= \frac{-1}{2m\nu} \frac{2\nu}{[j\sigma - (\nu + \omega)][j\sigma + (\nu - \omega)]} \\
&= \frac{-1}{m} \frac{1}{-\sigma^2 - (\nu^2 - \omega^2) - j2\sigma\nu} = \frac{1}{m} \frac{1}{\sigma^2 + \nu^2 - \omega^2 + j2\sigma\nu} \\
&= \frac{1}{m} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2 + j2\sigma\nu} = \frac{1}{k - \omega^2 m + j\omega c}
\end{aligned}$$

因此有

$$H(\omega) = \frac{1}{m} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2 + j2\sigma\nu} = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 + j2\zeta \frac{\omega}{\Omega}} \quad (1-85)$$

上式积分限从 0 到  $\infty$ , 称为单边傅里叶变换.

$h(t)$  的拉普拉斯变换用符号  $H(s)$  表示,  $H(s)$  称为传递函数,

$$H(s) = L[h(t)] = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} dt$$

$h(t)$  用式(1-84)代入, 积分后可以得到

$$H(s) = \frac{j}{2m\nu} \left[ \frac{1}{s - s_1^*} - \frac{1}{s - s_1} \right] = \frac{-j \frac{1}{2m\nu}}{s - (-\sigma + j\nu)} + \frac{j \frac{1}{2m\nu}}{s - (-\sigma - j\nu)} \quad (1-86)$$

式中令  $s_1 = -\sigma + j\nu$ ,  $s_1^* = -\sigma - j\nu$ .  $H(s)$  与  $H(\omega)$  显然有以下关系

$$H(\omega) = \lim_{s \rightarrow j\omega} H(s)$$

### 三、杜哈美尔积分

系统在 Dirac 函数作用下, 其响应可表为脉冲响应函数  $h(t)$ . 若系统受到连续力函数的作用, 其响应可用杜哈美尔积分来求得.

让我们先考虑系统在图 1-16(a) 所示的冲量  $f(\tau_i)\Delta\tau_i$  作用下的响应. 此系统的微分方程可写成积分形式如下:

$$\int_{\tau_i - \frac{\Delta\tau_i}{2}}^{\tau_i + \frac{\Delta\tau_i}{2}} (m\ddot{x} + c\dot{x} + kx) d\tau = f(\tau_i)\Delta\tau_i$$

当  $\Delta\tau_i \rightarrow 0$  时, 上式变为

$$m\dot{x} \Big|_{-0}^{+0} = f(\tau_i)\Delta\tau_i$$

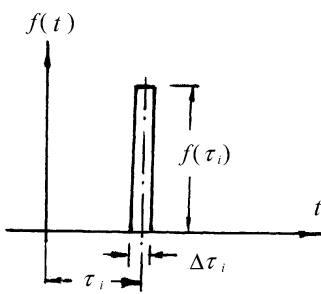
上式意味着在  $\tau = \tau_i$  时的初始条件为

$$x(\tau_i) = 0, \quad \dot{x}(\tau_i) = \frac{f(\tau_i)\Delta\tau_i}{m}$$

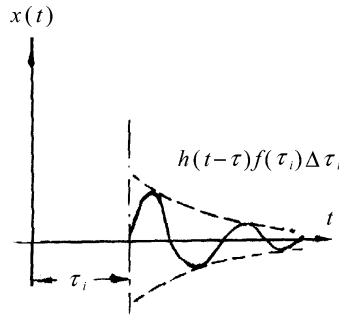
因此,其响应为

$$x(t) = \begin{cases} \frac{f(\tau_i)\Delta\tau_i}{m\nu} e^{-\sigma(t-\tau_i)} \sin \nu(t-\tau_i), & t \geq \tau_i \\ 0, & t < \tau_i \end{cases}$$

$$= h(t-\tau_i) f(\tau_i) \Delta\tau_i$$



(a)



(b)

图 1-16 系统在冲量  $f(\tau_i)\Delta\tau_i$  作用下的响应  
(a) 矩形脉冲激励,其冲量为  $f(\tau_i)\Delta\tau_i$ ; (b) 响应

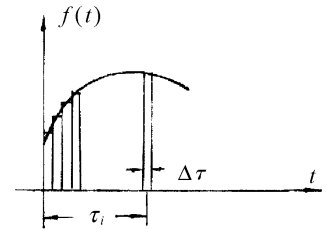


图 1-17 力函数  $f(t)$  用一系列矩形脉冲来近似

若系统受到图 1-17 所示的力函数  $f(t)$  的作用,其响应可用各微冲量的叠加得到:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{t/\Delta\tau} \frac{f(\tau_i)\Delta\tau}{m\nu} e^{-\sigma(t-\tau_i)} \sin \nu(t-\tau_i)$$

当  $\Delta\tau$  足够小,  $\Delta\tau \rightarrow d\tau$ , 则上式的叠加可用积分形式代替

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{m\nu} e^{-\sigma(t-\tau)} \sin \nu(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (1-87)$$

上式即为时域响应表达式,这种积分形式称为卷积,用  $h(t) * f(t)$  来表示,即

$$x(t) = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau = h(t) * f(t)$$

在以上的推导中,我们假定  $f(\tau)$  只在  $\tau \geq 0$  时有值,即

$$f(\tau) = \begin{cases} f(\tau), & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}$$

并有

$$h(t-\tau) = \begin{cases} h(t-\tau), & t \geq \tau \\ 0, & t < \tau \end{cases}$$

考虑到  $f(\tau)$  和  $h(t-\tau)$  的上述单边特性后,卷积可有以下几种表达式:

(1) 原始表达式