21世纪高等院校教材

大学物理实验

主　编　徐建强
副主编　夏思淝　徐荣历

山东大学出版基金资助教材
山东大学物理与微电子学院教学改革立项教材

科学出版社
北　京

内　容　简　介

本书根据山东大学物理实验教学中心长期实验教学经验总结编写而成，系统介绍了有关测量误差和数据处理的基础知识，常用测量器具及物理实验基本方法和技术，按基础实验、提高性实验和综合设计性实验三个层次收录了39个实验．书中配有大量实验仪器及实验现象照片，多数实验附有实际应用介绍．

本书可作为高等院校工科各专业和理科非物理专业的物理实验课程指导书，也可作为教学、科研等人员的参考书．

图书在版编目(CIP)数据

大学物理实验/徐建强主编．—北京：科学出版社，2006
21世纪高等院校教材
ISBN 7-03-017516-6
Ⅰ．大…　Ⅱ．徐…　Ⅲ．物理学-实验-高等学校-教材　Ⅳ．O4-33
中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第070507号

责任编辑：昌　盛　贾　杨　张启男　杨　然/责任校对：邹慧卿
责任印制：张克忠/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
中国科学院印刷厂印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2006年8月第　一　版　　开本：B5(720×1000)
2006年8月第一次印刷　　印张：22 1/2
印数：1—7 000　　字数：429 000

定价：28.00元
(如有印装质量问题，我社负责调换〈科印〉)

前　言

科学实验是有目的地去尝试实践，是对自然的积极探索．可以说科学实验是人类文明发展的积极推动力之一，因此科学实验的重要性是不言而喻的．物理学是实验科学，实验是物理学的基础，自然物理实验雄居要位．

大学物理实验在人才科学素质培养中起着十分重要的作用．物理实验课是理、工、农、医等各类专业的必修课程，是培养和提高学生科学素质和能力的重要课程之一．实验课程传授学生大量实验知识，使学生科学素质提高，进而转化为能力的提高．这正是学好物理实验课首先要明确的学习目的和意义．

但是，目前许多学生没有认识到学习物理实验的意义和重要性，对物理实验课缺乏兴趣，学习效果比较差．我们从自身分析，感到实验内容缺乏吸引力和传统的实验教材缺乏新颖性、实用性是两个重要原因．近几年来，国家对基础实验教学投入了大量经费，物理实验的实验项目和仪器大量更新，而实验教材体系却还没有根本改变．为此，我们希望能够编写一套打破传统实验教材结构、具有较强趣味性和实用性的物理实验教材．

新教材的改革思路是在保持现行教材原理叙述严谨、步骤全面的基础上，在教材的趣味性和实用性上有所突破．同时，根据实验课学生实验循环不能同步的特点，对实验理论在各实验中的分布、应用进行论述的尝试．具体的做法：一是对实验的发展历程进行趣味性较强的简述，提高学生看教材的兴趣．学生有了兴趣，才有可能看进去，才能对实验产生兴趣．二是增加实验中所用方法、仪器在实际工程中应用的介绍，努力使教材不仅让学生学到物理实验的一般知识，而且可向学生将所学知识在今后工作中的应用提供一定的提示．

本书在绪论中除对物理实验课的地位、作用和任务作一论述外，还重点介绍了如何上好物理实验课，详细地介绍了如何做好课前预习、课堂实验和书写实验报告三个环节；在第一章中，阐述了测量及数据处理的基础知识；第二章是常用测量器具及物理实验基本方法和技术，主要包括物理实验常用测量器具、物理实验基本方法和物理实验基本技术，其中调整技术和操作技术是提高实验操作能力的重要方面，结合实际经验进行总结阐述，之后，将教材中实验涉及实验方法及技术对应进行总结归纳于一张表中，使读者对此有较系统和快速的了解．第三章是基础实验，主要是原理、方法或仪器相对简单的必做实验，此外，考虑到目前许多学生中学期间实验做得比较少的实际情况，保留了部分与中学有一定衔接的简单的和验证性

实验供学生选做;第四章是提高性实验,基本都是课中的必做实验;第五章是综合和设计性实验,主要包括以下几部分:一是给出较详细的原理和主要实验方法,由学生补充实验步骤和设计数据表格及处理方法的实验,二是综合性比较强的实验,三是仿真实验(主要是近代物理实验),四是只提出实验要求,实验方法和步骤完全由学生自己设计的完全设计性实验.

仿真实验可以用比较少的硬件投入,开出众多的实验项目,从而较好地解决设备经费不足、实验场地紧张的问题.本书中的仿真实验,其软件采用高等教育出版社出版、由中国科学技术大学研制的《大学物理仿真实验 2.1 for Windows》,根据使用经验和学生的具体情况,对实验内容等作了调整修改,重新进行编写.

为了使学生在课前预习就能对实验仪器和实验现象有一直观的了解,本书中的所有实验仪器设备基本都配有实物照片,许多实验现象也采用照片或较逼真的图片来进行描述,这是本书的又一特色.另外,配合本书,作者制作了多媒体课件,除有比本书中更丰富的照片、图画外,还有大量动画,特别是实验操作过程的录像演示,总信息量达数吉比特.更多信息可与作者联系,或浏览山东大学物理与微电子学院网站.

由于实验项目和仪器的更新刚告一段落,教材编写的时间短,整个教材的趣味性和实际应用介绍还有所不足.恳请广大读者提出好的建议,并对书中漏误之处给予批评指正.我们将努力尽快完善教材内容,达到上述教材改革目标.

全书由徐建强、夏思淝、徐荣历组稿和审稿,由徐建强进行最后的修订和通稿.本书编写过程中参阅了我室以前出版的大学物理实验教材和许多兄弟院校的有关教材,吸取了宝贵经验,本教材的编写工作得到山东大学和物理与微电子学院的大力支持,被列为学院教学改革项目,获得学校出版基金的资助,在此我们一一表示衷心的感谢.

编者

2006 年 4 月于济南

目　　录

绪　　论

一、物理实验课程的地位、作用和任务

物理学从本质上说是一门实验科学.物理规律的研究都是以实验事实为基础的,并不断接受实验的检验.物理实验在物理学的发展过程中起着十分重要的作用,在现在和今后探索与开拓新的科技领域中,物理实验都是有利的工具.物理实验已列为我国高校理工科专业的一门独立的必修基础课程,与理论课教学具有同等重要的地位.两者既有深刻的内在联系,又有各自的任务和作用.

物理实验是对理工科大学生系统地进行实验方法和实验技能训练的开端,也是对学生进行科学实验训练的重要基础.实际上,多数院校只在物理实验课中进行严格的基础实验方法和技能训练,特别是有效数字概念的严格要求和训练.本课程应在中学物理实验的基础上,按照循序渐进的原则,指导学生学习物理实验知识、方法和技术,使学生初步掌握实验的主要程序与基本方法,熟练掌握基本测量仪器的使用方法和常用的数据处理方法,并初步了解误差的有关知识和系统误差的消减方法,为后续课程的学习和今后的工作奠定良好的实验基础.

本课程的具体任务:

(1) 通过对实验现象的观察、分析和对物理量的测量,学习物理实验基础知识.

① 学习常用物理量的基本测量方法、常用实验方法、常用测量仪器的原理及应用等, 这些测量及有关仪器在科学实验或日常工作中会经常遇到.

② 学习正确分析实验误差和正确处理实验数据,学习提高精度和减小误差的常用方法与技巧.例如,学会分析哪些误差是主要的,哪些可以减小或忽略.在满足精度要求的前提下,能够提出初步的最简便、最经济的方案,包括选择恰当的仪器和测量步骤等.

③ 了解理论知识的有关应用,包括最新应用.这不但能加深对物理学原理的理解,反过来还可以增加理论课学习的主动性及兴趣,同时可以拓宽知识面,开阔思路,增加应用经验.

(2) 培养和提高学生的科学实验能力,其中包括:

① 独自阅读实验教材,查阅相关参考资料,做好实验前的准备;

② 借助于教材或仪器说明书尽快学会正确使用常用仪器;

③ 初步学会常见物理量的测量方法,初步掌握常见实验方法、仪器的操作

规程；

④ 运用物理学理论及相关知识对实验现象进行初步分析判断；

⑤ 对实验过程中遇到的一般问题能独立进行简单处理，排除简单故障；

⑥ 正确记录和处理实验数据，绘制曲线，说明实验结果，撰写合格的实验报告；

⑦ 完成简单的设计性实验.

(3) 培养与提高学生的科学实验素养.要求学生具有理论联系实际和实事求是的科学作风，严肃认真的工作态度，严谨、有序、细致的操作习惯，主动研究的探索精神和遵守纪律、爱护公共财物的优良品德.

以上三项任务是不能由物理学理论课程代替完成的.

毋庸质疑，对于工程技术人员来说，只有既具备较为深广的理论知识，又有足够的现代科学实验能力，才能适应科学技术的飞速发展，担负起建设社会主义祖国的重任.

二、如何学好物理实验课

要想实现培养目标，完成上述任务，学生应该根据物理实验课的特点和要求，认真对待实验教学的各个环节，潜心钻研，以能达到更好的效果.

物理实验课一般分三个阶段(环节)进行.

1. 实验前的预习

实验课前，学生必须认真阅读实验教材，最好能查阅一些相关资料，以便更好地理解实验的基本原理，掌握实验关键，进而能自如地控制实验过程，及时、迅速、准确地测得实验数据.通过预习，还要了解仪器的工作原理和用法.将一些疑问列出来，等到实验时依据实物解决或向教师提问解决.在预习中要认真回答预习思考题，切记注意事项及安全操作规程.对设计性实验，还要在课前参考有关资料，设计实验方案.由于实验课时间有限，因此，课前预习的好坏是能否完成实验，能否取得较好效果的前提.要写好预习报告，否则不准做实验.预习报告的内容为：

(1) 目的要求.说明所做实验的目的和学习要求.

(2) 实验原理.简单推导出本实验中获得实验结果所依据的主要公式，并说明公式中各物理量的意义、单位和公式适用的条件及测量方法.必要时应画出所需的原理图(如电路图、光路图或装置系统示意图等).

(3) 所用仪器.列出本实验所用的主要仪器(应对其结构、原理及性能有初步的了解).

(4) 实验步骤.写出本实验的实验内容、操作步骤(可以参照实验教材抄写实验步骤).

(5) 数据表格.在了解相应的实验步骤的基础上,画好记录各项实验数据的表格,并自己推导处理数据所需的公式.在条件允许的情况下,课外开放实验室,使学生能对照仪器仔细阅读有关资料,进一步熟悉仪器使用方法和理解实验原理,以便能更加主动地、独立地做好实验.

2. 课堂实验

课堂实验是实验课的最重要的环节.

(1) 学生应根据课表,按时进入实验室,交实验预习报告,按分组就位,熟悉实验条件.认真听取教师对本实验的有关原理、要求、重点、步骤、难点和注意事项的讲解.然后检查仪器、材料是否完好、齐备,筹划仪器的布局和操作的分工(当有合作者时).

(2) 根据实验要求正确地将有关仪器组成所需的测试系统.经检查确保无误(需经教师认可),便可按步骤进行实验操作.

(3) 仪器(或实验装置)的调节.在力学、热学实验中,一些仪器的使用应根据需要调至水平或垂直状态,如杨氏模量仪需调垂直等.要注意调整测量仪器的零点,若某些仪器不能调零,则要记录仪器的零点值,以便以后修正.电磁学实验中,在连接电路前,应考虑仪器设备的合理摆放及正负极性,电路连接好后,还要注意把仪器调节到"安全待测状态"(一般是将调节旋钮逆时针方向旋到底),然后请教师检查,确定电路连接正确无误后方可接通电源进行实验.光学实验的仪器调节尤为重要,它决定了实验能否顺利进行和测量结果是否精确可靠,一定要细心调节仪器至要求的工作状态(如分光计的调节等).

(4) 观测.实验中必须仔细观察、积极思维、认真操作、防止急躁.要在实验所具备的客观条件(如温度、压力、仪器精度等)下,进行认真地、实事求是地观察和测量.要初步学会分析实验,遇到问题时应冷静地分析和处理.仪器发生故障时,也要在教师指导下学习排除故障的方法.在实验中有意识地培养自己的独立工作能力.

(5) 记录.实验记录是计算结果和分析问题的依据,在实际工作中则是宝贵的资料.要把实验数据细心地记录在预习报告的数据表格内,要根据仪器的精度和实验条件正确运用有效数字.记录时要用钢笔或圆珠笔,不要轻易涂改,对认为错误的数据,应轻轻画上一道,在旁边写上正确值,使正误数据都能清晰可辨,以供在分析测量结果和误差时参考.读取数据时必须十分认真、仔细.一要保证数据的真实性,二要保证应有的精确度.当对测量结果不满意时,应分析原因、改善条件、重新测量,不允许无根据地修改实验数据.实验的环境温度、湿度、气压等实验条件,仪器型号规格与编号等也应记录.对一些实验现象,特别是那些异常现象更不应放过.

两人合作时,要合理分工、适当轮流、配合得当、协调一致,共同达到实验要求,切忌一人懈怠或一人包办.

实验完毕，应将所测得的数据交给教师检查.经教师认可、签字后，再细心收拾仪器，保持整洁，保证不留任何事故隐患，然后才能离开实验室.

3.写实验报告

实验报告是对实验过程及其结果的全面总结，要用简明的形式将实验结果完整而又真实地表达出来.实验报告要用统一规格的纸张书写(可加附页)，必须各自独立地及时完成.要做到文字通顺、表述明确、字迹端正、图表规范、结果正确和讨论认真.好的实验报告应作为研究资料保存.

实验报告的内容与预习报告的多数项目相同，但具体内容有所不同，通常包括：

(1) 实验名称、实验者姓名、同组者姓名、实验日期.

(2) 实验目的.

(3) 实验原理.

用自己的语言对实验所依据的理论等做简要叙述，不要照抄书本，给出实验所依据的定律、公式、线路、光路或其他依据，以及有关实验条件，与预习报告基本一样，但要更详尽一些.

(4) 实验方法或步骤.

叙述用什么方法、仪器、步骤完成实验所需的环节和包括的内容，必要时可论证其可行性.本项目应与预习报告有所不同，应当写实际操作的情况，而不应再完全重复教材上的内容.

(5) 数据记录及其说明.

实验数据的记录应尽量详尽，并注明单位.对有疑问的数据不要轻易去掉，可作一些必要的标记，在以后的数据处理时再判断取舍.实验过程中的一些异常现象也应尽量详尽地记录下来.数据记录还应包括有关的常数.

(6) 数据处理及实验结果.

含有计算、实验曲线、表格、误差分析、最后结果等内容.计算按照有效数字的运算法则进行，并求出结果的不确定度，正确运用不确定度表示实验结果.

(7) 实验讨论.

实验讨论内容不限，如实验中观察到的现象分析、误差来源分析、实验中存在的问题讨论、回答实验思考题等.也可对实验本身的设计思想、实验仪器的改进等提出建设性意见.

三、学生实验制度

(1) 学生要遵守学校及实验室的有关规定，服从任课教师的安排.

(2) 要遵守实验室纪律.请假必须有盖章的假条，否则按旷课论处.迟到超过15分钟、实验后未经任课教师检查签字而离开者，均按旷课论处.旷课则本次实验

按零分计.

(3) 预习报告和测量原始数据都应写在专用的物理实验记录本上,否则任课教师不予签字并酌情减扣实验成绩.

(4) 实验小组按学号顺序分,且在整个学期中不得更换.每组必须在相应编号的仪器上做实验,未经教师同意不得更换仪器.

(5) 教师讲授结束前,不得动实验仪器.

(6) 实验报告上要写上同组者姓名.实验报告不得抄袭,雷同报告均判为零分.

(7) 实验时对于各种光学器件表面严禁用手或其他物品触摸和擦拭.对于易损或较贵的小仪器和器件应小心使用,注意保护.实验后应交给任课教师.丢失或损坏仪器,按学校有关规定赔偿.

(8) 实验结束后,把使用的仪器整理好,关闭有关的电源.值日生要打扫实验室.

第一章　测量及数据处理

1.1　测量、误差的基本知识

一、测量与误差

1. 测量

测量就是将待测量与选做标准单位的物理量进行比较,得到此物理量的测量值.测量结果数值的大小与所选用的单位有关.因此,表示一个被测对象的测量值时必须包括数值和单位.如测量课桌的长度,估计为 1.2m,或多或少 10cm,但若只写 2 或多或少 10 是不行的.

物理实验　就是以不同方式对各种物理现象和物理量进行观察和测量.对物理量的测量按测量方式通常可分为直接测量和间接测量.

直接测量　可以用测量仪器或仪表直接读出待测量量值的测量称为直接测量,相应的物理量称为直接测量量.例如,用米尺量长度,用天平称质量,用伏特计测电压等.

间接测量　则是指被测量的量值要用相关的直接测量量值通过公式运算间接地获得,相应的物理量称为间接测量量.例如,用单摆测某地重力加速度 g,先直接测得摆长 l 和单摆周期 T,然后由公式 $T=2\pi\sqrt{l/g}$算出重力加速度,因此 g 为间接测量量.

等精度测量和不等精度测量　如对某一物理量进行多次重复测量,而且每次测量的条件都相同(同一测量者、同一组仪器、同一种实验方法、温度和湿度等环境也相同),那么我们就没有任何依据可以判断某一次测量一定比另一次更准确,所以每次测量的精度只能认为是具有同等级别的.我们把这样进行的重复测量称为等精度测量.在诸测量条件中,只要有一个发生了变化,这时所进行的测量,就称为不等精度测量.一般在进行多次重复测量时,要尽量保持为等精度测量.

就测量而言,除上面的按数据处理方式的不同分为直接测量、间接测量和组合测量,按测量精度的不同分为等精度测量和非等精度测量外,还常依测量方式、被测物状态的不同而有多种分类方法.如绝对测量与相对测量,单项测量与综合测量,接触测量与非接触测量,主动测量与被动测量,静态测量与动态测量等.

2. 误差

如果测量对象本身不变,那么对于一个被测的物理量,客观上存在一个真实的量值,称为真实值或真值 a.实际上,不管使用多么精密的仪器,测量出来的结果只是真值的近似值.

绝对误差　若某物理量的测量值为 x,真值(客观实在值)为 a,则测量误差定义为

$$\delta = x - a \tag{1.1}$$

上式所定义的测量误差反映了测量值偏离真值的大小和方向,因此称 δ 为绝对误差.

真值　一般来说,真值仅是一个理想的概念,要由完善的测量获得.实际测量中,一般只能根据测量值确定测量的最佳值.通常取多次重复测量的平均值作为最佳值.

相对误差　绝对误差可以表示某一测量结果的优劣,但在比较不同测量结果时则不适用,需要用相对误差表示.例如,测量 10m 长时相差 1mm 与测量 1m 长时相差 1mm,两者绝对误差相同,而相对误差不同.相对误差定义为

$$\text{相对误差} = \frac{\text{绝对误差}}{\text{测量最佳值}} \times 100\% \tag{1.2}$$

有时被测量量有公认值或理论值,还可用"百分误差"来表征

$$\text{百分误差} = \frac{\text{测量最佳值} - \text{公认值}}{\text{公认值}} \times 100\% \tag{1.3}$$

测量不确定度　由于被测量的真值不可测得,测量误差也不可得.只能给出被测量的最佳估计值及对其不确定范围做出近似估计.测量不确定度表征被测量值的分散性.

二、误差的分类

误差存在于一切科学实验和测量过程的始终.受实验方法、仪器精度、环境条件的影响,实验数据处理中都可能存在误差,因此深入分析测量中可能产生误差的原因和种类,就会尽可能在实验过程中消除其影响,并对最后结果中未能消除的误差做出合理估计.为此,必须对误差的性质和来源有一定的了解.

误差按其性质和产生原因可分为系统误差、随机误差和粗大误差三类.

1. 系统误差

在一定条件下,对同一物理量进行多次重复测量时,误差的大小和符号均保持不变;而当条件改变时,误差按某种确定的规律变化(如递增、递减、周期性变化

等),则这类误差称为系统误差.

1) 系统误差的来源

(1) 仪器的结构和标准不完善或使用不当引起的误差.包括标准器误差,如标准电池、标准电阻的误差等;天平不等臂造成的误差;分光计读数装置的偏心差;电表的示值与实际值不符等.它们属于仪器缺陷,在使用时可采用适当测量方法加以消除.诸如仪器设备安装调整不妥,不满足规定的使用状态,如不水平、不垂直、偏心、零点不准等使用不当的情况应尽量避免.

(2) 理论或方法误差.它是由测量所依据的理论公式为近似式或实验条件达不到理论公式所规定的要求等引起的.如单摆测重力加速度时所用公式的近似性;伏安法测电阻时,不考虑电表内阻的影响等.

(3) 环境误差.它是由于实验的外部环境如温度、湿度、光照等与仪器要求的环境条件不一致而引起的误差.

(4) 实验人员的生理或心理特点所造成的误差.如用停表记时,总是超前或滞后;用仪表读数时总是偏向一方斜视等.

2) 系统误差的分类

(1) 定值系统误差.这种误差在测量过程中其大小和符号恒定不变.例如,千分尺没有零点修正,天平砝码的标称值不准确等.

(2) 变值系统误差.这种误差在测量过程中呈现规律性变化.这种变化,有的可能随时间而变,有的可能随位置变化.例如,分光计刻度盘中心与望远镜转轴中心不重合,存在偏心差所造成的读数误差就是一种周期性变化的系统误差.

系统误差产生的原因往往可知或能掌握,一经查明就应设法消除其影响.对未能消除的系统误差,若它的符号和大小是确定的,则可对测量值加以修正;若它的符号和大小都是不确定的,则可设法减小其影响并估计出误差范围.

3) 系统误差的处理

在科学实验中,有时系统误差是影响实验结果准确性的主要因素.因此,如何发现系统误差,估计它对结果的影响,进而设法修正、减少,甚至消除它的影响,是实验中整个误差分析的一个非常重要的内容.在以后的内容里还将对系统误差的处理做较详细的介绍.

2. 随机误差

在测量过程中,即使消除了系统误差,在等精度条件下测量同一物理量时,仍不能得到完全相同的结果,其测量值分散在一定的范围内,所得误差时正、时负,绝对值时大、时小,既不能预测,也无法控制,呈现无规则的起伏.这类误差称为随机误差.

随机误差的产生,一方面是由测量过程中一些随机的未能控制的可变因素或

不确定的因素引起的.如人的感官灵敏度以及仪器精密度的限制,使平衡点确定不准或估计读数有起伏等;由于周围环境干扰而导致读数的微小变化,以及随测量而来的其他不可预测的随机因素的影响等.另一方面是由被测对象本身的不稳定性引起的.如加工零件或被测样品本身存在的微小差异,这时被测量量就没有明确的定义值,这也是引起随机误差的一个原因.

随机误差就个体而言是不确定的,但其总体服从一定的统计规律,因此可以用统计方法估算其对测量结果的影响.

3. 粗大误差

明显地歪曲了测量结果的误差称为粗大误差.它是由于实验者使用仪器的方法不正确,粗心大意读错、记错、算错测量数据或实验条件突变等原因造成的.含有粗大误差的测量值称为坏值或异常值,正确的结果中不应包含有过失错误.在实验测量中要极力避免过失错误,在数据处理中要尽量剔除坏值.

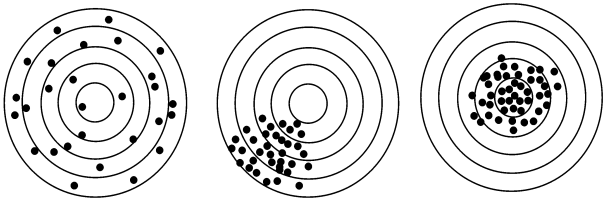
我们通常用精度反映测量结果中误差大小的程度.误差小时精度高,误差大时精度低.但这里精度却是个笼统的概念,它并不明确表明描写的是哪一类误差.为了使精度具体化,精度又可分为

精密度　表示测量结果中随机误差大小的程度.即指在规定条件下对被测量量进行多次测量时,所得结果之间符合的程度,简称为精度.

正确度　表示测量结果中系统误差大小的程度.它反映了在规定条件下,测量结果中所有系统误差的综合.

准确度　表示测量结果与被测量的“真值”之间的一致程度.它反映了测量结果中系统误差与随机误差的综合.准确度又称精确度.

以打靶为例子来说明,如图 1.1 所示.



(a)　(b)　(c)

图 1.1　测量精度的意义

(a)正确度高,精密度低;(b)精密度高,准确度低;(c)精密度、正确度和准确度皆高

三、随机误差的分布规律与特性

随机误差的出现,就某一单一测量值来说是没有规律的,其大小和方向都是不

能预知的,但对同一物理量进行多次重复测量时,则发现随机误差的出现服从某种统计规律.

大多数随机误差服从正态分布(高斯分布)规律.下面简要讨论正态分布的特点及特性参量.

如果以误差 Δx 为横坐标,以误差出现的概率密度(即相应的测量值出现的概率密度)$f(\Delta x)$为纵坐标,则多次测量结果的随机误差概率密度可用图 1.2 所示的正态分布曲线表示.

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} \tag{1.4}$$

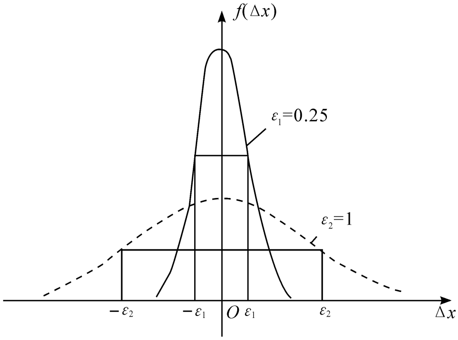


图 1.2 正态分布曲线

不难看出随机误差有如下特点:

(1) 有界性.在一定的客观条件下随机误差的绝对值不会超过一定的界限.

(2) 单峰性.绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率高.非常大的误差出现的概率趋于零.

(3) 对称性.绝对值相等的正误差和负误差出现的概率相等.

(4) 抵偿性.相同条件下对同一待测量量进行多次测量时,其误差的算数平均值随着测量次数 n 趋于无限而趋于零,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=0$$

由此可见,随机误差虽因不可预知而无法避免,但却可以通过多次测量,利用其统计规律性而达到互相抵偿,因而能找到真值的最佳近似值(又叫最佳估计值或最近真值).

1.2　不确定度的基本概念

1. 不确定度的概念

不确定度是表征测量结果具有分散性的一个参数.它是被测物理量的真值在某个量值范围内的一个评定.或者说,它表示由于测量误差的存在而对被测量值不能确定的程度.

不确定度反映了可能存在的误差分布范围,即随机误差分量和未定系统误差分量的联合分布范围.

不确定度一般包含有多个分量,按其数值的评定方法可归并为两类.

A 类不确定度　在同一条件下多次重复测量时,由一系列观测结果用统计分析评定的不确定度,用 μ_A 表示.

B 类不确定度　用其他方法(非统计分析)评定的不确定度,用 μ_B 表示.

上述两类不确定度采用方和根合成

$$\mu=\sqrt{\mu_A^2+\mu_B^2} \tag{1.5}$$

合成不确定度 μ 并非简单地由 μ_A 分量和 μ_B 分量线性合成或简单相加合成,而是服从"方和根合成",这是由于决定合成不确定度的两种误差——随机误差和不确定系统误差是两个互相独立而不相关的随机变量,其取值都具有随机性,因而它们之间具有相互抵偿性的缘故.

2. 不确定度与误差的关系

不确定度是在误差理论的基础上发展起来的.不确定度和误差既是两个不同的概念,它们有着根本的区别;又是相互联系的,都是由测量过程的不完善性引起的.

应当指出,不确定度概念的引入并不意味着误差一词需放弃使用.实际上,误差仍可用于定性地描述理论和概念的场合.例如,我们没有必要将误差理论改为不确定度理论,或将误差源改为不确定度源;误差仍可按其性质分为随机误差、系统误差等,不确定度则用于给出具体数值或进行定量运算、分析的场合.例如,在评定测量结果的准确度和计量器具的精度时,应采用不确定度来表述;需要给出具体数字指标的各种不确定度分析时不宜用误差分析一词代替等.还需注意,某些术语,如误差合成和不确定度合成,误差分析和不确定度分析等是可以并存的,但应了解其间的区别.在叙述误差的分析方法、合成方法和误差传递的一般原理和公式时,可以保留原来的名称,而在具体计算和表示计算结果时,应改为不确定度.总之,凡是涉及具体数值场合均应使用不确定度来代替误差,以避免出现将已知值赋予未

知量的矛盾.不确定度与误差的关系,可以简单归纳如下:

1) 误差与不确定度是两个不同的概念

如上所述,误差是一个理想的概念.根据传统的误差定义,由于真值一般是未知的,则测量误差一般也是未知的,是不能准确得知的.因此,一般无法表示测量结果的误差."标准误差"、"极限误差"等词也不是指具体的误差值,而是用来描述误差分布的数值特征、表征和与一定置信概率相联系的误差分布范围的.不确定度则是表示由于测量误差的存在而对被测量值不能确定的程度,反映了可能存在的误差分布范围,表征被测量的真值所处的量值范围的评定,所以不确定度能更准确地用于测量结果的表示.一定置信概率的不确定度是可以计算出来(或评定)的,其值永远为正值.而误差可能为正,可能为负,也可能十分接近于零,而且一般是无法计算的.因此,可以看出误差和不确定度是两个不同的概念.

2) 误差和不确定度是互相联系的

误差和不确定度都是由测量过程的不完善引起的,而且不确定度概念和体系是在现代误差理论的基础上建立和发展起来的.在估算不确定度时,用到了描述误差分布的一些特征参量,因此两者不是割裂的,也不是对立的.

1.3 测量结果随机误差的估算

1. 直接测量中随机误差的估算

1) 多次测量的算术平均值 $\overline{x}$

在相同条件下对一物理量进行了 n 次独立的直接测量,所得 n 个测量值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,称其为测量列,其算术平均值为

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1.6}$$

若无系统误差或已消除系统误差的前提下,当测量次数 $n\to\infty$时,由随机误差的抵偿性可知

$$\overline{x}\to a$$

即多次测量的算术平均值 $\overline{x}$ 是真值 a 的最佳估计值.

根据误差的定义,误差应是测量值与真值之差.但由于实际实验中真值一般不可知,因此通常用测量的算术平均值代替真值,这样测量值与算术平均值之差称为残差.在本书以后的叙述中,一般误差的计算都用残差,但仍用误差一词.

2) 多次测量结果的随机误差(标准误差) σ_x、$\sigma_{\overline{x}}$

对某一物理量 X 进行有限次(设为 n 次)等精度测量,所得测量列中任一测量结果的标准误差为

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}} \tag{1.7}$$

σ_x 表征了这一测量列的误差情况，但 σ_x 并不表示测量列中任一测量结果的测量误差为 σ_x，它是一个概率的概念：任一测量结果的误差落在$[-\sigma_x, \sigma_x]$范围内的概率为 68.3%．从图 1.2 可知，σ_x 小表示大多数的测量结果的误差聚集在较小的范围内，即测量结果比较集中，精密度高．而当 σ_x 大，表示大多数的测量结果的误差分散在较大的范围内，即测量结果分散，精密度低．显然，测量结果精密度越高越好．

测量量 X 的算术平均值 $\overline{x}$ 的标准误差为

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}} \tag{1.8}$$

$\sigma_{\overline{x}}$的意义与 σ_x 的意义相似，它表示测量量的算术平均值与真值的误差落在$[-\sigma_{\overline{x}}, \sigma_{\overline{x}}]$范围内的概率为 68.3%．显然 $\sigma_{\overline{x}} < \sigma_x$，所以测量量的算术平均值比测量列中任一个测量值都更可靠．我们也可以这样来理解它：由于算术平均值已经对单次测量的随机误差有一定的抵消，因而平均值就更接近真值，它们的随机误差分布离散性就会小得多，所以平均值的标准误差要比单次测量值的标准误差小得多．

由式(1.8)可知，随着测量次数 n 的增加，测量结果的误差越小．但测量次数 n 增加带来的好处并不是无限的，一般当 $n>10$ 时，测量误差随 n 的增加而减小的幅度已很小．因此，在大学物理实验中，通常取 $5 \leqslant n \leqslant 10$．

3）单次测量结果标准误差的估算

对有些测量量，由于使用的仪器精度足够高，并不需要进行多次测量．设仪器的最大读数误差为 Δ_m，则单次测量结果的标准误差为

$$\sigma = \frac{\Delta_m}{k} \tag{1.9}$$

式中 k 为分布系数，若认为单次测量时符合均匀分布，则 k 取为 $\sqrt{3}$．

4）测量结果的表示

测量结果的完整表示除了测量值以外，还应包括测量误差——标准误差和相对误差．这样，测量结果的表达式为

$$\begin{cases} x = \overline{x} \pm \sigma_{\overline{x}} & (\text{单位}) \\ E = \dfrac{\sigma_{\overline{x}}}{\overline{x}} & (\%) \end{cases} \tag{1.10}$$

式(1.10)表示真值 x_0 以多大的概率(68.3%)落在$(\overline{x} - \sigma_{\overline{x}})$到$(\overline{x} + \sigma_{\overline{x}})$的数值范围内．

例 1　设用一螺旋测微器对一钢球的直径进行了六次测量.消去零点偏差后，所得测量值分别为：$d_1=2.003\text{mm}$，$d_2=2.001\text{mm}$，$d_3=1.996\text{mm}$，$d_4=1.998\text{mm}$，$d_5=2.004\text{mm}$，$d_6=1.997\text{mm}$，则其算术平均值为

$$\bar{d}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}d_i=2.000\text{mm}$$

各次测量的绝对偏差(残差)为(单位：mm)

$$\Delta_{d_1}=0.003\text{mm},\qquad \Delta_{d_2}=0.001\text{mm}$$
$$\Delta_{d_3}=-0.004\ \text{mm},\qquad \Delta_{d_4}=-0.002\ \text{mm}$$
$$\Delta_{d_5}=0.004\ \text{mm},\qquad \Delta_{d_6}=-0.003\ \text{mm}$$

则测量平均值的标准误差为

$$\sigma_{\bar{d}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})^2}{n(n-1)}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6}\Delta_{d_i}^2}{6(6-1)}}=0.002\text{mm}$$

于是测量结果为

$$d=\bar{d}\pm\sigma_{\bar{d}}=(2.000\pm0.002)\text{mm}$$

$$E=\frac{\sigma_{\bar{d}}}{\bar{d}}\times100\%=\frac{0.002}{2.000}\times100\%=0.10\%$$

2. 间接测量结果标准误差及其表示——标准误差的传递与合成

在实验中，某些物理量通常只能进行间接测量.直接测量是间接测量的基础，由于直接测量量存在误差，由直接测量量算出的间接测量量不可避免地引入误差，由直接测量量的误差引起的间接测量量误差称为误差传递.

1) 间接测量量标准误差的传递公式

设间接测量量 N 是由相互独立的直接测量量 $x,y,z,\cdots$通过函数关系 $N=f(x,y,x,\cdots)$计算得到的.设 $x,y,z,\cdots$的标准误差分别为 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\cdots$.由于误差是微小的量，相当于数学中的“增量”，因此，间接测量量的标准误差的计算公式与数学中的全微分公式类似.误差传递公式与全微分公式的不同之处是：①用标准误差 σ_x 代替微分 $\mathrm{d}x$ 等；②要用到标准误差合成的统计性质.于是，可得到间接测量量 N 的标准误差 σ_N 及相对误差 E 传递公式

$$\sigma_N=\sqrt{\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2+\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2+\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)^2\sigma_z^2+\cdots}\qquad(1.11)$$

$$\begin{aligned}E=\frac{\sigma_N}{N}&=\frac{1}{N}\sqrt{\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2+\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2+\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)^2\sigma_z^2+\cdots}\\&=\sqrt{\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\sigma_x}{N}\right)^2+\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\sigma_y}{N}\right)^2+\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\sigma_z}{N}\right)^2+\cdots}\end{aligned}\qquad(1.12)$$

在使用以上两式计算间接测量量时,应根据间接测量量的计算公式选择不同的计算顺序:

(1) 如果间接测量量计算公式是以多个直接测量量的加减运算为主,则先用式(1.11)计算绝对标准误差,再用式(1.12)计算相对误差比较简便.

(2) 如果间接测量量计算公式是以多个直接测量量的乘除或乘方等运算为主,则先用式(1.12)计算相对标准误差,再用 $\sigma_N = N \cdot E$ 计算绝对误差比较简便.

一些常见函数单次标准误差传递公式如下表 1.1 所示.

表 1.1

函数表达式	标准误差传递公式
$N = x + y$	$\sigma_N = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2},\ E = \dfrac{\sigma_N}{N}$
$N = xy$ 或 $N = \dfrac{x}{y}$	$E = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{\sigma_y}{y}\right)^2},\quad \sigma_N = N \cdot E$
$N = kx$	$\sigma_N = k \cdot \sigma_x,\ E = \dfrac{\sigma_N}{N} = \dfrac{k\sigma_x}{kx} = E_x$
$N = lx^k$	$E = k \cdot \dfrac{\sigma_x}{x},\ \sigma_N = N \cdot E = lkx^{k-1}\sigma_x$
$N = \dfrac{x^m y^n (w-q)}{z^l}$	$E = \sqrt{\left(m\dfrac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(n\dfrac{\sigma_y}{y}\right)^2 + \left(\dfrac{\sigma_{(w-q)}}{w-q}\right)^2 + \left(l\dfrac{\sigma_z}{z}\right)^2}$ $\sigma_N = E \cdot N,\quad \sigma_{(w-q)} = \sqrt{\sigma_w^2 + \sigma_q^2}$
$N = \sin x$	$\sigma_N = \lvert \cos x \rvert \cdot \sigma_x,\ E_N = \dfrac{\sigma_N}{N}$
$N = \ln x$	$\sigma_N = \dfrac{\sigma_x}{x},\ E_N = \dfrac{\sigma_N}{N}$

在实际计算时,若直接测量量中有多次测量量,且在计算间接测量量时用的是直接测量量的算数平均值,则直接得到间接测量量的算数平均值 $\overline{N}$.

2) 间接测量量标准误差的表示

间接测量结果的表示方法与直接测量结果的表示方法相似,一般使用下列方式

$$\begin{cases} N = \overline{N} \pm \sigma_N & (\text{单位}) \\ E = \dfrac{\sigma_N}{\overline{N}} \times 100\% \end{cases} \tag{1.13}$$

间接测量结果的标准误差的意义与直接测量结果的标准误差的意义相似,表示待测量有多大的概率(68.3%)落在$(\overline{N} - \sigma_N) \sim (\overline{N} + \sigma_N)$的数值范围内.

例 2　一铁圆柱体,用感量为 0.02g 的天平称量其质量 m 一次,$m = 279.8$g,

用分度值为 0.02mm 的游标卡尺测量其高度 H 八次，用千分尺测量其直径 D 六次（测量数据填在表中），求该铁圆柱体的密度.

解 测量数据

$m=279.68\text{g}$，　$\Delta_m=0.02\text{g}$

次数	1	2	3	4	5	6	7	8	平均值 $\bar{H}$
H/mm	90.46	90.26	90.36	90.38	90.28	90.42	90.34	90.30	90.35
$\Delta_H=H_i-\bar{H}/\text{mm}$	0.11	−0.09	0.01	0.03	−0.07	0.07	−0.01	−0.05	$\sum\Delta_H^2$
Δ_H^2/mm^2	0.012 1	0.008 1	0.000 1	0.000 9	0.004 9	0.004 9	0.000 1	0.002 5	0.033 6

次数	1	2	3	4	5	6	平均值 $\bar{D}$
D/mm	22.456	22.457	22.454	22.451	22.459	22.453	22.455
$\Delta_D=D_i-\bar{D}/\text{mm}$	0.001	0.002	−0.001	−0.004	0.004	−0.002	$\sum\Delta_D^2$
Δ_D^2/mm^2	0.000 001	0.000 004	0.000 001	0.000 016	0.000 016	0.000 004	0.000 046

(1) 计算质量的标准误差

$$\sigma_m=\frac{\Delta_m}{\sqrt{3}}=\frac{0.02}{\sqrt{3}}=0.012\ (\text{g})$$

(2) 计算高度的标准误差

$$\sigma_H=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{8}\Delta_H^2}{n(n-1)}}=\sqrt{\frac{0.033\,6}{8\times7}}=0.025(\text{mm})$$

(3) 计算直径的标准误差

$$\sigma_D=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{8}\Delta_D^2}{n(n-1)}}=\sqrt{\frac{0.000\,046}{6\times5}}=0.001\,3(\text{mm})$$

(4) 圆柱体的密度

$$\bar{\rho}=\frac{4m}{\pi\bar{D}^2\bar{H}}=\frac{4\times279.68}{3.141\,59\times22.455^2\times90.35}=7.817(\text{g/cm}^3)$$

根据标准误差传递公式(1.12)分别推导出各直接测量量对密度 ρ 的偏导数

$$\frac{\partial\rho}{\partial m}=\frac{4}{\pi D^2H},\quad\frac{\partial\rho}{\partial D}=\frac{-8m}{\pi D^3H},\quad\frac{\partial\rho}{\partial H}=\frac{-4m}{\pi D^2H^2}$$

将以上偏导数代入式(1.12)，整理得间接测量量密度 ρ 的相对误差

$$E_{\bar{\rho}}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2+\left(\frac{\sigma_H}{H}\right)^2+\left(2\frac{\sigma_D}{D}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{0.012}{279.68}\right)^2+\left(\frac{0.025}{90.35}\right)^2+\left(2\times\frac{0.0013}{22.455}\right)^2}=0.031\%$$

$$\sigma_{\bar{\rho}}=\rho\cdot E_{\bar{\rho}}=7.817\times0.031\%=0.003\ (\mathrm{g/cm^3})$$

结果表达

$$\begin{cases}\rho=\bar{\rho}\pm\sigma_{\bar{\rho}}=(7.817\pm0.003)\mathrm{g/cm^3}\\ E=0.031\%\end{cases}$$

1.4　有效数字及其运算规则

由于物理测量中总存在误差,因而直接测量的数值只能是一个近似值.由直接测量量通过计算求得的间接测量量也只能是一个近似值,而测量误差决定了测量值的位数只能是有限位数,测量结果数字的最后一位应与误差相对应,不能随意取舍.因此,在物理测量中,必须按照一定的表示方法和运算规则来正确表达和计算测量结果.

一、有效数字的概念

1. 有效数字的定义及其基本性质

通过图 1.3 所示的长度测量的例子,可以帮助理解有效数字的概念.用分度值(最小刻度值)为 1mm 的米尺来测量物体的长度 L 时,一般是将被测物的一端和米尺的“0”刻度线对齐,而读出物体另一端所对应的刻度值.图中(Ⅰ)的物体长度 L 在 4.2cm 和 4.3cm 之间,凭经验可将其估读为 4.27cm 或 4.28cm.显然,在所得读数中,“4.2”是准确的,而最后一位数字“7”或“8”则是估计的,含有误差,故称为存疑数字.读数应尽可能符合实际,读出存疑数字比不读合理.因此,全部准确数字(如 4.2)加上一位存疑数字(如 7 或 8)所组成的一串数字就有效而合理地表示了测量值的大小,人们称这种数字串为有效数字.需要强调指出的是,有效数字中除全部准确数字外,还必须含有一位存疑数字,且只许末尾一位为存疑数字;有效数字的末位应是误差所在数位.因此,当图中物体(Ⅱ)的右端恰好与 15cm 刻度线对齐时,准确数字为“15.0”,再加上对毫米分格内的估读数“0”,则物体长度 L 的有效数字应记为 15.00cm,而不能记为 15cm 或 15.0cm(因为它们所反映的误差不同).以单一的单位表示的测量数字中,从数量级最大的那个非零数字开始,直至误差所在数位,每个数字都是有意义的,包括末尾的“0”在内,都不可省略,也不可凭空加上去.有效数字(串)中数字的个数可粗略地反映相对误差的大小.

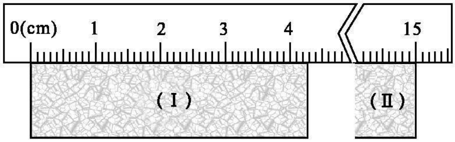


图 1.3　用米尺测量物体长度

例如,15,15.0 和 15.00,它们的相对误差分别不超过十分之一,百分之一和千分之一.人们常把由几个数字组成的有效数字相应地称为几位(的)有效数字.例如,108.00 是 5 位有效数字;0.45 是 2 位有效数字;0.000 5 是 1 位有效数字.有效数字位数的多少是测量准确度的一个标志,必须如实地表达.

任何测量仪器总存在仪器误差,在仪器设计中一般使仪器标尺和最小分度值与仪器误差的数值相对应,两者基本上保持在同一数位上.在使用仪器对被测量进行测量读数时,只能准确读到仪器的最小分度值,所得数字是准确的数字,称为可靠数字;然后在最小分度值以下还可再估读一位数字,一般也就是仪器误差或相应的仪器不确定度所在的那一位数字,它具有不确定性,其估读会因人而异,通常称为可疑数字.测量中,测量数据要用有效数字表示,最末位为存在误差的估计值,一般为最小分度值的 1/10 的整数倍.根据刻度情况也可由最小分度值的 1/5 或 1/2 倍读出.有效数字定义:**测量结果中所有可靠数字加上末位的可疑数字统称为测量结果的有效数字**.

有效数字的位数是指从一个有效数字的左侧的第一个非零数字数起到右侧所有数字.如 123.4 有 4 位有效数字,0.012 34 也是 4 位有效数字,23.6 有 3 位有效数字.

有效数字具有以下基本特性:

(1) 有效数字的位数与仪器精度(最小分度值)有关,也与被测量的大小有关.

对于同一被测量,如果使用不同精度的仪器进行测量,则测得的有效数字的位数是不同的.例如,用最小分度值 0.01mm 的千分尺测量一物体的长度读数为 8.344mm.其中前三位数字“8.34”是可靠数字,末位“4”是在最小分度值内估读的数字,为可疑数字,所以该测量值有 4 位有效数字.如果改用最小分度值(游标精度)为 0.02mm 的游标卡尺来测量,其读数为 8.34mm,测量值就只有 3 位有效数字.游标卡尺没有估读数字,其末位数字“4”为可疑数字,它与游标卡尺的误差极限 0.02mm在同一数位上的.仪器精度(最小分度值)决定测量结果有效数字最末位的位置.

有效数字的位数还与被测量本身的大小有关.若用同一仪器测量大小不同的被测量,其有效数字的位数也不相同.被测量越大,测得结果的有效数字位数也就越多.

(2) 有效数字的位数与小数点的位置无关，单位换算时有效数字的位数不应发生变化.

例如，重力加速度 $980\mathrm{cm/s^2}$、$9.80\mathrm{m/s^2}$ 或 $0.009\ 80\mathrm{km/s^2}$ 都是 3 位有效数字．也就是说，采用不同单位时，小数点的位置移动而使测量值的数值大小不同，但测量值的有效数字位数不变．必须注意：用以表示小数点位置的“0”不是有效数字，“0”在数字中间或数字后面都是有效数字，不能随意增减.

(3) 有效数字位数反映测量的误差.

有效数字的末位是估读数字，存在不确定性．对于间接测量量也是如此，其结果的最后一位应与标准误差所在的那一位对齐．如在上节圆柱体密度的例子中，$\rho=7.817\mathrm{g/cm^3}$，$\sigma_\rho=0.003\mathrm{g/cm^3}$，测量值的末位“7”刚好与标准误差 0.003 的“3”对齐，结果写成 $\rho=(7.817\pm0.003)\mathrm{g/cm^3}$．如果写成 $\rho=(7.817\ 2\pm0.003\ )\mathrm{g/cm^3}$ 或 $\rho=(7.817\pm0.0025)\mathrm{g/cm^3}$ 都是错误的.

由于有效数字的最后一位是误差所在位，因此有效数字或有效位数在一定程度上反映了测量值的误差限值．测量值的有效数字位数越多，测量的相对误差就越小；有效数字位数越少，相对误差就越大．一般来说，2 位有效数字对应于 $10^{-1}\sim10^{-2}$ 的相对误差；3 位有效数字对应于 $10^{-2}\sim10^{-3}$ 的相对误差，依次类推．可见，有效数字可以粗略地反映测量结果的误差.

2．数值的科学表示法

对同一测量值，当单位选取不同时，数字的书写形式会有所不同，会出现数值大小与有效位数发生矛盾的情形，例如，234cm 写成 2.34m 是正确的，若写成 2 340mm则是错误的．为了解决此矛盾，通常采用科学表示法，即用有效数字乘以 10 的幂指数的形式来表示．如 $234\mathrm{cm}=2.34\mathrm{m}=2.34\times10^3\mathrm{mm}$．又如某人测得钢的杨氏模量为 $2.18\times10^{11}\mathrm{N/m^2}$，标准误差 $3\times10^9\mathrm{N/m^2}$，这个结果写成 $(2.18\pm0.03)\times10^{11}\mathrm{N/m^2}$，表示标准误差取 1 位，测量值的有效数字为 3 位，测量值的最后一位与标准误差对齐.

二、有效数字的运算规则

间接测量量是由直接测量量经过一定函数关系计算出来的．而各直接测量量的大小和有效数字位数一般都不相同，间接测量量的有效数字的确定就比较麻烦．另外，间接测量结果的误差也是由各直接测量结果的误差通过误差传递公式求出来的，计算中也会出现如何确定有效位数的问题.

对各直接测量量和间接测量量的有效数字，在运算前后，都需要进行适当的取位和数值的进舍修约，以符合误差理论的要求.

1. 数值的舍入修约规则

为保证在对大量数据进行舍入取舍的情况下，不出现舍入不均衡的现象，在对数据进行舍入修约时，一般采用“五下舍，五上入，整五凑偶”的规则.

(1) 拟舍弃数字的最左一位数字小于 5 时，则舍去，即保留的各位数字不变.

(2) 拟舍弃数字的最左一位数字大于 5，或者是 5 而其后跟有非 0 的数字时，则进 1，即保留的末位数字加 1.

(3) 拟舍弃数字的最左一位数字为 5，而右面无数字或皆为 0 时，若所保留的末位数字为奇数则进 1，为偶数或 0 则舍弃，即“奇进偶不进”.

根据上述规则，要将下列各数据保留四位有效数字，舍入后的数据为

$$3.141\,59 \to 3.142; \qquad 2.717\,29 \to 2.717$$
$$4.510\,50 \to 4.510; \qquad 3.215\,50 \to 3.216$$
$$6.378\,501 \to 6.379; \qquad 7.691\,499 \to 7.691$$

对于测量结果的标准误差的有效数字，规定采取只进不舍的规则，且只保留 1 位有效数字.例如，1.3 节的实例中，密度的误差计算结果为 0.002 467 5$\mathrm{g/cm^3}$，结果表示中写为 $\sigma=0.003\mathrm{g/cm^3}$.当欲保留的数位为 1 或 9 时，可以保留两位.如：0.001 23写为 0.001 3，0.096 2 写为 0.10.

2. 有效数字运算规则

有效数字的运算规则为：准确数字与准确数字的运算结果仍为准确数字，准确数字与非准确数字或非准确数字与非准确数字的运算结果为非准确数字.运算结果只保留一位非准确数字.

下面通过一些具体例子说明有效数字的运算规则.

1) 加减法

运算结果的最后一位(非准确位)与参与运算的所有数字中非准确位数值最大者相同.

例 3 求 $N=X+Y+Z$，其中 $X=(98.7\pm0.3)\mathrm{cm}$，$Y=(6.238\pm0.006)\mathrm{cm}$，$Z=(14.36\pm0.08)\mathrm{cm}$.

解 $N=X+Y+Z=98.7+6.238+14.36=119.298\ (\mathrm{cm})$

$$\sigma_N=\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2+\sigma_Z^2}=\sqrt{0.3^2+0.006^2+0.08^2}=0.31=0.4(\mathrm{cm})$$

所以

$$N=(119.3\pm0.4)\mathrm{cm}$$

从计算结果中可以看出，结果的标准误差的非零位与分量中误差最大的一致.

$$\begin{array}{r} 98.\underline{7} \\ 6.23\underline{8} \\ +14.3\underline{6} \\ \hline 119.\underline{298} \end{array}$$

保留 1 位非准确数字,结果为 $119.\underline{3}$.

2) 乘除法

运算结果的位数与所有参与运算的数字中有效数字位数最少的相同.

例 4　求圆柱体的密度,其中 $D=(22.455\pm0.002)\mathrm{mm}$, $H=(90.35\pm0.03)\mathrm{mm}$, $m=(279.68\pm0.012)\mathrm{g}$.

解　计算间接测量量的标准误差(由例 2 知)

$$\sigma_{\bar{\rho}}=0.003\mathrm{g/mm^3}$$

计算间接测量量

$$\bar{\rho}=\frac{4m}{\pi D^2 H}=\frac{4\times279.68}{3.141\ 59\times22.455^2\times90.35}=0.007\ 816\ 595\cdots(\mathrm{g/mm^3})$$
$$=7.816\ 595\cdots(\mathrm{g/cm^3})$$

根据标准误差的有效数字,判断间接测量量结果的有效数位应保留到 $0.001\mathrm{g/cm^3}$ 位,即

$$\bar{\rho}=7.817\mathrm{g/cm^3}$$

可见,结果的有效数字位数(4 位)与直接测量量中位数最少的(H)一样.当直接测量数据没有给出误差时,结果的有效数字位数一般就直接取与各分量中有效数字位数最少者相同.

在运算中,常遇到一些物理常数和纯数学数字(如 π, $\sqrt{2}$等),它们通常被看作有无限多位的有效数字,不影响运算结果的有效数字位数.但某些常数若只写出有限位时,则不再有无限多位的有效数字,如当把 π 写成 3.14 的话,就只有三位有效数字.

3) 函数运算的有效数字取值

对某一函数进行运算时,可以利用微分运算推出该函数的误差传递公式,再将直接测量值的误差代入公式,求出函数的误差,从而可以确定函数的有效位数.若直接测量值没有给出误差,则可在直接测量值准确数字的最后一位数取 1 作为误差代入误差传递公式.

下面通过举例说明上述函数运算的有效数字取位方法的应用.

例 5　已知 $x=65.2$,求 $\ln x$.

解　对 $\ln x$ 求微分得误差公式为

$$\Delta(\ln x)=\Delta x/x$$

由于直接测量值 x 没有标明误差,故在直接测量值的倒数第二位(对应准确位的最后一位或仪器的最小分度值所在位)上取 1 作为最大误差,即 $\Delta x=1$,将 x、Δx 代入上式得

$$\Delta(\ln x)=0.02$$

因此,$\ln x$ 的尾数应保留到小数点后 2 位,即

$$\ln x=\ln 65.2=4.18$$

一般情况下,对 x 的自然对数 $\ln x$,其尾数部分的位数取与该数 x 的有效数字位数相同.

例 6　已知 $x=38°24'\pm1'$,求 $\sin x$.

解　对 $\sin x$ 求微分得出误差公式为

$$\Delta(\sin x)=\cos x\cdot\Delta x$$

将 x 用角度代入,Δx 化为弧度代入得

$$\Delta(\sin x)=\cos 38°24'\times\frac{\pi}{180}\times\frac{1}{60}=0.000\ 3$$

所以 $\sin 38°24'=0.621\ 1$,为 4 位有效数字(最后位与 $\Delta(\sin x)$的非零位对齐).

例 7　已知 $x=7.85\pm0.05$,求 e^x.

解　对 e^x 求微分得到 e^x 的误差为

$$\Delta(e^x)=e^x\cdot\Delta x=e^{7.85}\times0.05=2.566\times10^3\times0.05=0.13\times10^3$$

故

$$e^x=(2.57\pm0.13)\times10^3$$

为 3 位有效数字.

必须指出,测量结果的有效数字位数取决于测量,而不取决于运算过程.因此在运算时,尤其是使用计算器时,不要随意扩大或减少有效数字位数,更不要认为算出结果的位数越多越好.

4) 测量最终结果的有效数字

用计算公式计算间接测量量时,其计算结果的有效数字根据以上的有效数字计算规则和函数运算的有效数字取值规则进行取舍.多数的间接测量量都是由直接测量量通过乘除、乘方开方运算得到,对于这样的间接测量量,结果的有效数字位数可暂取为与参与运算的直接测量量中有效位数最少的一样.在求得间接测量量的标准误差后,再根据其标准误差进行最后的取舍.

结果的标准误差一般只保留 1 位有效数字.相对误差保留 2 位有效数字.直接测量量的标准误差作为中间结果时,可以保留 2 位.

结果的标准误差求出后,其最后的非零位与测量量结果进行比较,如最后位没有对齐,应将右侧多的位数根据前面叙述的规则进行修约(误差修约时要只进不舍),使测量量和标准误差的最后(右)位对齐.

如测量杨氏模量时，直接测量量中有效位数最少的为3位有效数字，则由公式求得的杨氏模量保留3位有效数字，$Y=2.18\times10^{11}\,\mathrm{kg/m^2}$.根据误差传递公式求得标准误差为 $\sigma_Y=2.3\times10^{9}\,\mathrm{kg/m^2}$.则根据上述规则，最终结果为 $Y=(2.18\pm0.03)\times10^{11}\,\mathrm{kg/m^2}$，$E=1.4\%$.

1.5　实验数据处理的一般方法

物理实验的数据处理不单纯是取得数据后的数学运算，而是要以一定的物理模型为基础，以一定的物理条件为依据，通过对数据的整理、分析和归纳计算，得出明确的实验结论.因此实验中的数据记录、整理、计算或作图分析都必须具有条理性和严密的逻辑性.图表的建立应易于直观地对数据进行分析和处理，计算过程应充分考虑误差的消除与传递的基本理论，方法得当，条理分明.

数据处理的方法较多，从低年级学生的实际情况出发，这里只介绍物理实验中常用的列表法、作图法、逐差法和线性回归法.

一、列表法

直接从仪器或量具上读出的、未经任何数学处理的数据称为实验测量的原始数据，它是实验的宝贵资料，是获得实验结果的依据.正确完整地记录原始数据是顺利完成实验的重要保证.

在记录数据时，把数据列成表格形式，既可以简单而明确地表示出有关物理量之间的对应关系，便于分析和发现数据的规律性，也有助于检验和发现实验中的问题.

列表的具体要求：

(1) 表格设计合理，最好呈“横平竖直”，便于看出相关量之间的对应关系，便于分析数据之间的函数关系和数据处理.

(2) 标题栏中写明代表各物理量的符号和单位，单位不要重复记在各数值上.

(3) 表中所列数据要正确反映测量结果的有效数字.

(4) 实验室所给出的数据或查得的单项数据应列在表格的上部.

二、作图法

作图法是将一系列数据之间的关系或其变化情况用图线直观地表示出来，是一种最常用的数据处理方法.它可以研究物理量之间的变化规律，找出对应的函数关系求取经验公式.如果图线是依据许多测量数据点描述出来的光滑曲线，则作图法有多次测量取其平均效果的作用；能简便地从图线上求出实验需要的某些结果，绘出仪器的校准曲线；在图线范围内可以直接读出没有进行观测的对应于某 x 的