前 言

群及其表示理论, 作为数学的一个分支, 是处理具有一定对称性的物理体系的一种有力工具. 利用群论方法, 可以直接对体系的许多性质作出定性的了解, 可以简化复杂的计算, 也可以预言物理过程的发展趋向. 作为一门课程,《群论及其在物理学中的应用》也应是物理系研究生的必读课程或高年级大学生的选修课程. 本书正是为了适应这一需要而编写的.

本书是在历年复旦大学物理系部分研究生使用的讲义基础上经补充、修订而成的. 全书共分五章. 第一章从群的基本性质开始, 介绍了群的表示理论, 并且相当详细地介绍了三十二个晶体点群的对称操作. 第二章在了解不可约表示基矢性质的基础上, 主要分析薛定谔方程的对称性, 并且具体讨论了群论在矩阵元计算、组成杂化轨道以及分子正则振动等方面的应用. 此外, 作为微扰算符影响的具体例子, 介绍了完全转动群的不可约表示按点群的简约. 第三章在详细讨论完全转动群的不可约表示之后, 介绍了其在角动量耦合以及不可约张量算符方面的应用, 同时还介绍了双点群的性质和时间反演对称性. 第四章在微扰理论的体系中, 应用群论分别讨论计入电子间的库仑相互作用, 自旋–轨道耦合, 具有一定对称性的晶体场, 外磁场以及超精细结构等因素的影响后原子状态的变化, 集中介绍群论在原子体系中的应用. 最后一章则在详细讨论空间群及其不可约表示的基础上, 介绍群论在晶体能带理论和晶格振动方面的应用. 限于篇幅, 排列群在本书中只作为群的一个具体例子提及, 而并未作专门的详细讨论. 在每章正文后面均附有主要的参考资料目录以及一定数量的习题, 以便帮助读者比较深入地掌握有关内容.

作为一门研究生课程使用的教材, 本书的内容是建立在大学物理系毕业生的知识水平基础之上的. 因此, 对其他方面的读者, 在阅读本书时要求具有初等量子力学和固体物理学的知识基础.

在本书编写过程中, 得到了科学出版社的热情支持, 陆栋同志详细地阅读了全部书稿, 提出了许多宝贵的意见, 给编者以很大帮助, 曹佩芳同志草绘了全部插图, 在此一并致谢.

编 者

1984 年 7 月

目 录

第一章　群和群表示

本章将介绍群和群表示的基本定义、性质以及有关的基本定理. 先从抽象群的定义和性质出发, 逐步介绍同晶体性质有关的点群, 最后介绍有关群表示的重要的基本定理. 在叙述中对于线性代数中已介绍过的基本定理不再证明, 而只是引用其结果.

§1.1　群的定义和有限群的几个性质

1.1.1　群的定义

凡是满足下面几个条件的元素集合或操作集合均称为群, 常以 G 表示. 如果用 A_1, $A_2, \cdots$ 表示群 G 中所包含的元素或操作, 即 $A_i \in G$, $i = 1, 2, \cdots$, 或集合 $\{A_i\}$ 必须满足下述条件：

(1) 群中任何一对操作或元素 A_i 与 A_j 的乘积 A_k 是唯一的和单值的, A_k 仍是集合中的一个操作或元素,

$$A_iA_j = A_k, \quad i = j \text{ 或 } i \neq j. \tag{1.1-1}$$

(2) 群中的元素集合一定要包含不变元素 (或操作), 常以 E 表示, $E \in G$, E 具有下列特性：

$$EA_i = A_iE = A_i, \tag{1.1-2}$$

其中 $A_i \in G$ 是群 G 中的任何一个元素.

(3) 任意三个元素 (或操作) 的乘积满足组合定则

$$(A_iA_j)A_k = A_i(A_jA_k). \tag{1.1-3}$$

(4) 如果群中包含元素 A_i, 也一定包含 A_i 的逆元素 A_i^{-1},

$$A_iA_i^{-1} = A_i^{-1}A_i = E. \tag{1.1-4}$$

在这里应该指出, 条件 (1) 所得的乘积 A_k 与 A_i 及 A_j 的次序有关, $A_iA_j = A_k$ 意味着 A_j, A_i 依次作用的结果与 A_k 的作用相同, 如果 $A_iA_j = A_jA_i$, 则元素 A_i 与 A_j 是对易的. 在一般情况下, 群中的任何两个元素 A_i 与 A_j 不一定对易.

在本书中以 G 代表群, 属于群 G 的元素 (或操作)$A_i(i=1,2,\cdots)$ 用 $A_i\in G$ 来标志.

如果群 G 的元素 (或操作) 的个数是有限的, 这个群称为有限群. 在本书中我们主要讨论有限群.

1.1.2 有限群的基本性质

(1)*群阶* 有限群中各不相同元素的数目称为群阶, 用 g 表示.

(2)*乘积表* 常用乘积表来记述群中所有元素 (或操作) 之间的乘积, 表 1.1-1 给出一个六阶群的乘积表.

表 1.1-1 六阶群的乘积表

	E	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
E	E	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	A_1	E	A_4	A_5	A_2	A_3
A_2	A_2	A_5	E	A_4	A_3	A_1
A_3	A_3	A_4	A_5	E	A_1	A_2
A_4	A_4	A_3	A_1	A_2	A_5	E
A_5	A_5	A_2	A_3	A_1	E	A_4

可以看出, 表中的每一行及每一列中, 各元素只出现一次. 这是一个很明显的定理, 可以很容易得到证明, 因为如果某个元素在表中出现两次,

$$A_iA_j=A_k$$

和

$$A_iA_l=A_k,\quad A_l\neq A_j,$$

则

$$A_i^{-1}A_iA_j=EA_j=A_j=A_i^{-1}A_k, \tag{1.1-5}$$

$$A_i^{-1}A_iA_l=EA_l=A_l=A_i^{-1}A_k. \tag{1.1-6}$$

由于 A_i^{-1} 也是群 G 中的元素, 以上两式表明两个元素的乘积不是单值的, 显然与群的定义 (1) 相违背.

(3)*元素的阶* 如果 $A_i\in G$, 则满足 $A_i^{\alpha}=E$ 的最小正整数 α 称为元素 A_i 的阶. 在表 1.1-1 所示的六阶群中, 由于

$$A_1^2=A_2^2=A_3^2=E,$$

所以 A_1, A_2, A_3 都是二阶的元素;

$$A_4^3=A_5^3=E,$$

A_4, A_5 都是三阶的元素.

(4)**共轭元素** 如果 A_i, A_j, X 都是群 G 的元素, 则 $A_i \in G, A_j \in G, X \in G$, 如果

$$XA_iX^{-1} = A_j, \tag{1.1-7}$$

则元素 A_i 称为 A_j 的共轭元素. 显然, 群的任一元素 A_i 是自身的共轭元素.

$$EA_iE^{-1} = A_i. \tag{1.1-8}$$

又如

$$A_i = X^{-1}A_jX. \tag{1.1-9}$$

设

$$X^{-1} = Y, \quad Y \in G, \quad X = Y^{-1},$$

则式 (1.1-9) 可写成

$$YA_jY^{-1} = A_i, \tag{1.1-10}$$

元素 A_j 也是 A_i 的共轭元素, 因此共轭关系是相互的.

如果 A_i 与 A_j 互为共轭, A_j 与 A_k 互为共轭, 则 A_i 也与 A_k 互为共轭. 这个性质可以证明如下：因为

$$XA_iX^{-1} = A_j, \quad X \in G, \tag{1.1-11}$$

$$YA_jY^{-1} = A_k, \quad Y \in G, \tag{1.1-12}$$

$$YA_jY^{-1} = YXA_iX^{-1}Y^{-1} = YXA_i(YX)^{-1}. \tag{1.1-13}$$

令

$$YX = Z, ZA_iZ^{-1} = A_k, \tag{1.1-14}$$

由 $Y \in G$, $X \in G$ 知 $Z \in G$, 因此 A_i 也与 A_k 互为共轭, 这个性质又称为共轭的传递性.

(5)类 群中彼此共轭的元素组成类, 仍以表 1.1-1 所示的六阶群为例, 根据乘积表, 可得到下面的结果：

$$\begin{aligned}
EA_1E^{-1} &= A_1, & EA_4E^{-1} &= A_4,\\
A_1A_1A_1^{-1} &= A_1, & A_1A_4A_1^{-1} &= A_5,\\
A_2A_1A_2^{-1} &= A_3, & A_2A_4A_2^{-1} &= A_5,\\
A_3A_1A_3^{-1} &= A_2, & A_3A_4A_3^{-1} &= A_5,\\
A_4A_1A_4^{-1} &= A_2, & A_4A_4A_4^{-1} &= A_4,\\
A_5A_1A_5^{-1} &= A_3, & A_5A_4A_5^{-1} &= A_4.
\end{aligned}$$

因此, 在这个六阶群中, $A_1A_2A_3$ 组成一类, A_4A_5 组成另一类, 不变元素 E 则自成一类, 可表示成

$$C_1 = E, \quad C_2 = \{A_1, A_2, A_3\}, \quad C_3 = \{A_4, A_5\}. \tag{1.1-15}$$

同类的元素有相同的阶. 因为

$$\begin{aligned}(XA_jX^{-1})^n &= XA_iX^{-1}(XA_iX^{-1})\cdots(XA_iX^{-1}) \\ &= XA_i^nX^{-1} = XEX^{-1} = E,\end{aligned}$$

即如 $A_i^n = E$, 则 $(XA_iX^{-1})^n$ 也等于 E, 从而证明了 A_i 与其共轭元素 XA_iX^{-1} 有相同的阶.

§1.2　子群和商群

1.2.1　子群的定义

如果在群 G 的元素集合中能找到某一部分元素, 则称为子集合 H, 用符号 $H \subset G$ 来表示, 而且子集合 H 的元素组成群, 则 H 称为 G 的子群. 如果子集合 H 是 G 的子群, H 的元素只要满足下面的两个条件:

(I)H 中的任何两个元素的乘积仍在 H 之中;

(II)H 中的每一个元素的逆元素仍在 H 之中.

由于 $H \in G$, G 中的元素的乘积满足组合定律, 因此 H 的元素必然满足 §1.1 所给的条件 (3), 在这里不必重复. 同时, 由于上述条件 (I)、(II) 以及逆元素的定义, 子集合也必包含不变元素 E. 如 G 是有限群, 对 G 中任何一个阶为 n 的元素 A_i, 下列关系就成立:

$$A_i^n = A_jA_i^{n-1} = E = A_j^{n-1}A_i,$$

即 A_i 的逆元素是 A_i^{n-1}, 因此子集合 H 的元素只要满足本节所述的条件 (I), 也必然满足条件 (II).

以表 1.1-1 的六阶群为例, 子集合 $\{E, A_1\}$、$\{E, A_2\}$、$\{E, A_3\}$ 及 $\{E, A_4, A_5\}$ 都是 G 的子群. 可以按照类的定义将子群的元素分类, 容易证明子群 $\{E, A_4, A_5\}$ 中的三个元素各成一类, 而在群 G 中 A_4, A_5 是同类的, 由此可知在群 G 中同属一类的元素, 在子群 H 中不一定再属同一类.

1.2.2　陪集的定义和有关的定理

(1)定义　设子群 $H \subset G$, H 的元素集合是 $\{E, B_1, B_2, \cdots\}$ 如有 $N \in G$, 但不在 H 中, 则集合 $\{NE, NB_1, NB_2, \cdots\}$ 称为元素 N 所产生的子群 H 的左陪集, 而集合 $\{EN, B_1N, B_2N, \cdots\}$ 称为元素 N 所产生的子群 H 的右陪集.

(2)有关陪集的几个定理

定理一 陪集中的元素互不相同, 也不同于子群的元素.

证 (i) 如果 $NB_i = NB_j$, 则 $B_i = B_j$ 与子群的定义不符合, 因此 $NB_i \neq NB_j$.

(ii) 如果 $NB_i = B_k$, $B_k \in H$, 则 $N = B_k B_i^{-1}$, 即 $N \in H$, 与陪集的定义不符, 因此 NB_i 不可能是 H 中的元素.

定理二 同一个子群的两个右陪集 (或左陪集) 的元素完全相同, 或完全不相同.

证 设 $H \subset G$, H 的元素是 $\{E, B_1, B_2, \cdots\}$. 如 $X \in G$, $Y \in G$, 由 X 产生的右陪集是 $\{EX, B_1X, B_2X, \cdots\}$, 由 Y 产生的右陪集是 $\{EY, B_1Y, B_2Y, \cdots\}$. 如果

$$B_k X = B_l Y,$$

则 $B_l^{-1} B_k = YX^{-1}$, 由于 $B_l^{-1} B_k \in H$, 则 $YX^{-1} \in H$.

根据乘积表的性质 $\{EYX^{-1}, B_1YX^{-1}, B_2YX^{-1}, \cdots\}$ 就是子群 H, 也就是说它的右陪集 $\{EYX^{-1}X, B_1YX^{-1}X, B_2YX^{-1}X, \cdots\}$ 与子集合 $\{EX, B_1X, B_2X, \cdots\}$ 完全相同, 只是元素的排列次序可能不相同. 这也就证明了如

$$B_k X = B_l Y,$$

则两个右陪集的所有元素完全相同. 反之, 可以证明, 在两个陪集中如有一个元素不同, 则所有元素都是不同的.

定理三 子群 H 的阶 h 是群 G 阶 g 的因子, $l = g/h$, 整数 l 称为子群的指数.

在 G 中选元素 X, X 不在 H 中. 用 X 组成子群 H 的右陪集 $\{EX, B_1X, B_2X, \cdots\}$, 我们用 HX 代表这个陪集. 在 G 中如再选一个元素 Y, Y 不在 H 也不在右陪集 HX 中, 则根据上述定理 HY 的元素集合与 H 和 HX 都完全不同, 因此可将群的元素集合写成

$$\{G\} = \{H\} + \{HX\} + \{HY\} + \{HZ\} + \cdots,$$

即群的元素集合将在子群$\{H\}$及其右陪集$\{HX\}\{HY\}$(或左陪集)$\cdots$ 出现, 因此 G 的阶 g 是子群 H 的阶 h 的整数倍, $g = lh$.

例 对于表 1.1-1 所示的六阶群, 已经指出 $\{E, A_4, A_5\}$ 是一个子群, 取其右陪集 $\{EA_1, A_4A_1, A_5A_1\} = \{A_1, A_3, A_2\}$ 和左陪集 $\{A_1E, A_1A_4, A_1A_5\} = \{A_1, A_2, A_3\}$. 这里, 这两个陪集的元素集合是完全相同的.

1.2.3 内积与共轭子群

(1)内积 如果群 G 中有两组元素集合

$$\{X, Y, \cdots\}, \quad \{X', Y', \cdots\}.$$

$$\{X, Y, \cdots\} \cdot \{X', Y', \cdots\} = \{XX', XY', \cdots, YX', YY', \cdots\} \tag{1.2-1}$$

称为两个集合的内积 (又名正常乘积). 在式 (1.2-1) 右方的集合中只取不同的元素.

例一　表 1.1-1 的六阶群中 $\{A_1, A_2\}$ 和 $\{A_3, A_5\}$ 的内积为 $\{A_1, A_2\}\cdot\{A_3, A_5\} = \{A_5, A_3, A_2, A_1\}$.

(2)*共轭子群*　设子群 $H_1 \subset G$, $H_1 = \{E, B_1, B_2\}$. 如 $X \in G$, 取 $H_2 = XH_1X^{-1}$, 即元素集合 $\{XEX^{-1}, XB_1X^{-1}, XB_2X^{-1}\}$, 那么 H_2 也是 G 的子群, 并称之为 G 中 H_1 的共轭子群.

例二　令表 1.1-1 中的子群 $\{E, A_1\} = H_1$, 取 $X = A_4$,

$$A_4A_1A_4^{-1} = A_2, \quad A_4EA_4^{-1} = E,$$

即 $\{E_1, A_2\} = H_2$ 是 H_1 的共轭子群, 那么也可把 H_2 看成是 X 与 H_1X^{-1} 的内乘积,

$$H_2 = X \cdot H_1X^{-1}$$

1.2.4　不变子群 (自轭子群或正则子群)

如果对于所有在 G 中的元素 X, 元素集合 $X \cdot HX^{-1}$ 与 H 相同, 则 H 称为不变子群, 又名自轭子群或正则子群. 显然, 不变子群必包含 G 的一个或几个完全的类, 可以证明表 1.2-1 所示的六阶群的子群 $\{E, A_4, A_5\}$ 即不变子群, 下面证明几个与不变子群有关的重要定理.

定理一　不变子群的左陪集与右陪集相等.

证　这个定理也可看做是不变子群的定义. 如果 $H \cdot X = X \cdot H$, 则 $H = X \cdot HX^{-1}$, 这就是不变子群的定义. 反之, 由于 $H = X \cdot HX^{-1}$, 如

$$H = \{E, B_1, B_2, \cdots, B_l\},$$

$$XH = \{XE, XB_1, XB_2, \cdots, XB_l\},$$

$$\begin{aligned} XHX^{-1} &= \{XEX^{-1}, XB_1X^{-1}, \cdots, XB_lX^{-1}\} \\ &= \{E, B_1, B_2, \cdots, B_l\}, \end{aligned}$$

因此可将右陪集的元素集合写成

$$HX = \{EX, B_1X, B_2X, \cdots, B_lX\}$$

$$= \{XEX^{-1}X, XB_1X^{-1}X, \cdots, XB_lX^{-1}X\}$$

$$= \{XE, XB_1, \cdots, XB_l\} = XH,$$

即证明了不变子群左陪集与右陪集有相同的元素集合.

表 1.1-1 所示的六阶群的不变子群是 $\{E, A_4, A_5\}$, 取 $X = A_1$, 左陪集 A_1H 的元素集合是 $\{A_1E, A_1A_4, A_1A_5\} = \{A_1, A_2, A_3\}$.

右陪集 HA_1 的元素集合是 $\{EA_1, A_4A_1, A_5A_1\} = \{A_1, A_3, A_2\}$, 二者完全相同.

这个定理也意味着不变子群做为一个整体与 G 中的任何一个元素对易.

定理二 不变子群的两个左陪集的内乘积也是一个左陪集.

证 根据内积的定义, $H \cdot H = H$

令

$$XH \cdot YH = XYH \cdot H = (XY)H.$$

则

$$XY = Z, \quad Z \in G,$$

$$XH \cdot YH = ZH,$$

而 ZH 是 H 的左陪集.

定理三 不变子群与其任何陪集的内乘积仍是该陪集本身.

证 $H \cdot XH = XHX^{-1}XH = XH$, 因此在不变子群与其陪集的内乘积中, H 的作用有如群 G 中不变元素的作用.

常用 H_N 表示某个群的不变子群, 以区别于其他的子群.

1.2.5 商群

如将不变子群 H_N 及其所有不同的陪集 $H_NX_1, H_NX_2, \cdots$ 等都看作元素, 则这些元素也构成群, 而元素之间的乘积则相应地为陪集之间的内乘积. 这一元素集合 $H_N, H_NX_1, \cdots$ 称为商群. 由于 $G = H_N + H_NX_1 + \cdots + H_NX_l$, 故常以 G/H_N 表示商群.

在表 1.1-1 的六阶群的情形下, $H_N = \{E, A_4, A_5\}$ 为不变子群. 取 $X = A_1$, $H_NA_1 = \{A_1, A_3, A_2\} \equiv C_N$, H_N 和 C_N 就是商群的元素, $G = H_N + G_N$. 可将此商群的乘积列成表 1.2-1.

表 1.2-1 商群乘积表

	H_N	C_N
H_N	H_N	C_N
C_N	C_N	H_N

商群具有下列性质:

(1) 商群的不变元素即不变子群 H_N;

(2) 如商群中有 H_NU, 也必有 H_NU^{-1}, 上例中

$$A_1 = A_1^{-1}, H_NU = H_NU^{-1};$$

(3) 商群的阶等于不变子群的指数;

(4) 商群的元素包含不变子群及其所有的不同陪集.

例 如有一个 24 阶的群, 乘积表如表 1.2-2 所示, 为节省篇幅, 表中只列出元素 A_i 的下标 i 的值, 而不写出 A.

表 1.2-2

	E	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
E	E	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	1	6	3	4	5	2	7	E	9	10	11	8	13	14	15	12	17	18	19	16	21	22	23	20
2	2	8	12	16	9	1	20	13	5	19	21	6	E	23	17	3	15	22	10	4	11	18	14	7
3	3	9	13	17	10	6	21	14	2	16	22	7	1	20	18	4	12	23	11	5	8	19	15	E
4	4	10	14	18	11	7	22	15	3	17	23	E	6	21	19	5	13	20	8	2	9	16	12	1
5	5	11	15	19	8	E	23	12	4	18	20	1	7	22	16	2	14	21	9	3	10	17	13	6
6	6	7	4	5	2	3	E	1	10	11	8	9	14	15	12	13	18	19	16	17	22	23	20	21
7	7	E	5	2	3	4	1	6	11	8	9	10	15	12	13	14	19	16	17	18	23	20	21	22
8	8	20	16	9	1	12	13	2	19	21	6	5	23	17	3	E	22	10	4	15	18	14	7	11
9	9	21	17	10	6	13	14	3	16	22	7	2	20	18	4	1	23	11	5	12	19	15	E	8
10	10	22	18	11	7	14	15	4	17	23	E	3	21	19	5	6	20	8	2	13	16	12	1	9
11	11	23	19	8	E	15	12	5	18	20	1	4	22	16	2	7	21	9	3	14	17	13	6	10
12	12	5	E	15	19	8	11	23	1	4	18	20	2	7	22	16	3	14	21	9	6	10	17	13
13	13	2	1	12	16	9	8	20	6	5	19	21	3	E	23	17	4	15	22	10	7	11	18	14
14	14	3	6	13	17	10	9	21	7	2	16	22	4	1	20	18	5	12	23	11	E	8	19	15
15	15	4	7	14	18	11	10	22	E	3	17	23	5	6	21	19	2	13	20	8	1	9	16	12
16	16	19	23	22	21	20	18	17	12	15	14	13	8	11	10	9	E	7	6	1	5	4	3	2
17	17	16	20	23	22	21	19	18	13	12	15	14	9	8	11	10	1	E	7	6	2	5	4	3
18	18	17	21	20	23	22	16	19	14	13	12	15	10	9	8	11	6	1	E	7	3	2	5	4
19	19	18	22	21	20	23	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	1	E	4	3	2	5
20	20	13	9	1	12	16	2	8	21	6	5	19	17	3	E	23	10	4	15	22	14	7	11	18
21	21	14	10	6	13	17	3	9	22	7	2	16	18	4	1	20	11	5	12	23	15	E	8	19
22	22	15	11	7	14	18	4	10	23	E	3	17	19	5	6	21	8	2	13	20	12	1	9	16
23	23	12	8	E	15	19	5	11	20	1	4	18	16	2	7	22	9	3	14	21	13	6	10	17

常把这个群称为 O 群. 由该表可以证明不变子群的元素集合为

$$H_N = \{E, A_6, A_{17}, A_{19}\},$$

$$H_NA_1 = \{A_1, A_7, A_{16}, A_{18}\} = A_N,$$

$$H_NA_2 = \{A_2, A_4, A_{20}, A_{22}\} = B_N,$$

$$H_NA_3 = \{A_3, A_5, A_{23}, A_{21}\} = C_N,$$

$$H_NA_8 = \{A_8, A_{10}, A_{13}, A_{15}\} = D_N,$$

$$H_NA_9 = \{A_9, A_{11}, A_{12}, A_{14}\} = E_N.$$

商群的乘积表可以表示为表 1.2-3.

表 1.2-3 O 群的商群乘积表

	H_N	A_N	B_N	C_N	D_N	E_N
H_N	H_N	A_N	B_N	C_N	D_N	E_N
A_N	A_N	H_N	C_N	B_N	E_N	D_N
B_N	B_N	D_N	E_N	A_N	C_N	H_N
C_N	C_N	E_N	D_N	H_N	B_N	A_N
D_N	D_N	B_N	A_N	E_N	H_N	C_N
E_N	E_N	C_N	H_N	D_N	A_N	B_N

可以看出, 这个乘积表具有和一般的群相同的性质, 实际上也是一个六阶群的乘积表.

§1.3 同构群与同态群, 核

1.3.1 同构群

如有 G 和 G' 两个群, 二者的元素集合分别为

$$G = \{E, A_1, A_2, \cdots, A_h\},$$
$$G' = \{E, A'_1, A'_2, \cdots, A'_h\},$$

二者的阶相同, 而且在乘积表中元素之间保持一一对应的关系, 例如在 G 中有 $A_iA_j = A_k$, 则在 G' 中有 $A'_iA'_j = A'_k$. 具有以上性质的两个群是同构群.

1.3.2 同态群

如果群 G 的阶 g 不等于群 G' 的阶 g', 设 $g < g'$, 且群 G 中的某个元素和 G' 的几个元素相对应, 则称 G 和 G' 为同态群. 例如表 1.1-1 的六阶群同态于表 1.2-2 所示的 O 群, 元素之间的对应关系如下:

$$E \leftrightarrow H_N = \{E, A_6, A_{17}, A_{19}\};$$
$$A_1 \leftrightarrow A_N = \{A_1, A_7, A_{16}, A_{18}\};$$
$$A_2 \leftrightarrow C_N = \{A_3, A_5, A_{23}, A_{21}\};$$
$$A_3 \leftrightarrow D_N = \{A_8, A_{10}, A_{13}, A_{15}\};$$
$$A_4 \leftrightarrow B_N = \{A_2, A_4, A_{20}, A_{22}\};$$
$$A_5 \leftrightarrow E_N = \{A_9, A_{11}, A_{12}, A_{14}\}.$$

1.3.3 核

群 G' 中与 G 的不变元素对应的元素集合是 G' 的不变子群, 又称为 G' 同态于 G 的核, 常用 K 表示. 商群 G'/K 与 G 同构, 上例中 H_N 即核 K.

§1.4 群的矩阵表示与有关的定理

在本书中我们将用到简单的矩阵理论, 所用的符号及简单的运算法则见本书的附录一.

1.4.1 群 G 的矩阵表示的定义

如果有一些 n 维的方矩阵 $D_1, D_2, \cdots, D_g$, 其中包括单位矩阵 D_1, $D_1 = I$, 则 $(D_1)_{ij} = I_{ij} = \delta_{ij}$. 每个矩阵的行列式 $|D_k| \neq 0$, 矩阵之间彼此的乘积关系与群 G 的元素 $E, A_2, A_3, \cdots$ 一一对应, 这样的一组矩阵称为矩阵群, 这个矩阵群与群 G 同构. 群 G 中的不变元素和矩阵群中的单位矩阵相对应, 与逆元素相对应的矩阵就是与该元素相对应的矩阵的逆矩阵. 既然这个矩阵群与群 G 同构, 就可以代表群 G 的性质, 该矩阵群就是群 G 的矩阵表示, 或简称为群 G 的表示.

1.4.2 幺正矩阵群

如果 $\tilde{D}^* \equiv D^+$, $D^+ = D^{-1}$, 则根据矩阵的性质 (见附录一), 这样的矩阵称为幺正矩阵. 如果矩阵群中的每个矩阵都是幺正矩阵, 则它们组成的群称为幺正矩阵群.

1.4.3 可约表示, 完全可约表示和不可约表示

令 $D(A_i)$ 代表与群 G 中元素 A_i 相对应的矩阵, 如 $D(A_i)$ 具有形式

$$D(A_i) = \begin{pmatrix} D_1(A_i) & D_{12}(A_i) \\ 0 & D_2(A_i) \end{pmatrix}, \tag{1.4-1}$$

$D_1(A_i)$ 是 m 维方矩阵, $D_2(A_i)$ 是 $n-m$ 维的方矩阵, 则

$$\begin{aligned} & D(A_1)D(A_2) \\ = & \begin{pmatrix} D_1(A_1) & D_{12}(A_1) \\ 0 & D_2(A_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1(A_2) & D_{12}(A_2) \\ 0 & D_2(A_2) \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} D_1(A_1)D_1(A_2) & D_1(A_1)D_{12}(A_2) + D_{12}(A_1)D_2(A_2) \\ 0 & D_2(A_1)D_2(A_2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.4-2}$$

如果

$$\left.\begin{aligned} & D(A_1)D(A_2) = D(A_3), \\ & D_1(A_1)D_1(A_2) = D_1(A_3), \\ & D_2(A_1)D_2(A_2) = D_2(A_3), \\ & D_1(A_1)D_{12}(A_2) + D_{12}(A_1)D_2(A_1) = D_{12}(A_3), \end{aligned}\right\} \tag{1.4-3}$$