

# 共轭曲线啮合角函数 理论及其应用

林 菁 著

科 学 出 版 社

北 京

## 内 容 简 介

本书系统扼要地论述了共轭齿廓的啮合角函数理论,以啮合角函数为主线,将圆齿轮、非圆齿轮和凸轮的齿形或轮廓的求解及其几何特性分析统一起来,形成了一套新的、系统的、统一的、普遍适用的理论。本书主要内容为圆齿轮、非圆齿轮和凸轮机构的基本传动原理,以及非圆齿轮齿廓的设计方法。

本书可供从事齿轮和凸轮研究的科研人员使用,也可供从事齿轮和凸轮设计、制造的工程技术人员参考,还可作为研究生、本科生教学参考用书。

---

### 图书在版编目(CIP)数据

共轭曲线啮合角函数理论及其应用/林菁著. —北京:科学出版社,2005  
ISBN 7-03-014753-7

I. 共... II. 林... III. 共轭-齿轮传动 IV. TH132.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 005003 号

---

责任编辑:鄢德平 田土勇 于宏丽/责任校对:李奕萱

责任印制:钱玉芬/封面设计:王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社编务公司排版制作

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2005年3月第一版 开本:B5(720×1000)

2005年3月第一次印刷 印张:9 3/4

印数:1—1 500 字数:179 000

定价:22.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换 科印)

# 前 言

为保证传动质量，齿轮传动要求平稳，即一对相互啮合的齿轮应匀速转动。为保证两个定轴齿轮匀速转动，两轮齿廓在接触点的公法线与两轮轮心的连线必须相交于一定点，这样的齿廓是一种共轭齿廓。根据这一原理设计的齿轮传动为定比传动(传动比为常数)，可获得定传动比的齿廓曲线有无数个。因此，关于齿轮齿廓(共轭齿廓)的求解问题自然而然地摆在国内外齿轮研究学者们面前。目前常用的共轭齿廓求解方法有三种<sup>[1,2]</sup>：根据已知的齿廓，求另一个与之配对的共轭齿廓；根据已知的齿条齿廓，求一对共轭齿廓；根据已知的接触轨迹(或啮合轨迹)，求一对共轭齿廓；相反地，根据已知的齿廓亦可确定齿条刀具齿廓和齿廓接触轨迹。

齿轮传动除要求传动平稳，还要求承载能力高、齿面滑动系数小、摩擦磨损小、传动效率高、易于加工和测量等。根据接触应力的赫兹计算公式，齿轮齿面接触疲劳强度与接触点齿廓综合曲率半径的平方根成正比。在计算轮齿的弯曲强度时，应考虑齿根过渡曲线对齿根应力集中大小的影响。齿面滑动系数是衡量齿轮传动质量的一个重要指标。在其他条件相同时，若滑动系数的绝对值大，齿面的摩擦磨损就大；滑动系数的绝对值小，齿面的摩擦磨损就小。齿轮齿形决定了滑动系数的大小，齿形不同，滑动系数的大小就不同。由此可见，为分析研究齿轮的承载能力和传动性能，必须研究齿轮齿廓的几何特性。

本书提出了啮合角函数的概念，建立基于啮合角函数的平面共轭齿廓啮合的普遍理论，着眼于啮合角函数这一新视角，全面系统地论述了圆齿轮齿廓、非圆齿轮齿廓和凸轮轮廓的廓形求解及其几何特性分析，最终形成了一套新的、全面、系统、统一的理论体系。为圆齿轮、非圆齿轮和凸轮的研究、设计和制造提供了新途径和新方法。

全书共包括6章：第1章为概论；第2章为节曲线，主要介绍节曲线的基本求解方法；第3章为圆齿轮共轭齿廓，系统地介绍了基于啮合角函数的圆齿轮共轭齿廓求解及其几何特性分析；第4章为非圆齿轮齿廓，系统地介绍了基于啮合角函数的非圆齿轮共轭齿廓求解及其几何特性分析；第5章为非圆齿轮设计，系统地介绍了基于啮合角函数的非圆齿轮齿廓的设计求解方法；第6章为凸轮轮廓，系统地介绍了基于啮合角函数的凸轮轮廓求解及其几何特性分析。

本书获上海师范大学著作出版基金的资助，特在此表示衷心的感谢。

本书在撰写过程中，得到了中国矿业大学孟惠荣教授、东北大学鄂中凯教授的鼓励和支持，作者深表感谢。

本书承蒙上海交通大学邹慧君教授审阅，他对本书提出了很多宝贵意见，在此谨致谢意。

由于著者水平有限，书中难免存在缺点错误，真诚希望广大读者批评指正，以使这一理论更加充实完善。

著 者

2004年4月于上海

# 目 录

## 前言

第 1 章	概论	1
1.1	共轭曲线与齿廓啮合基本定理	1
1.2	啮合角与啮合角函数	1
1.3	几种常用的共轭齿廓求解方法	2
1.4	Euler-Savary 公式	5
1.5	共轭齿廓的奇异点	6
1.6	共轭齿廓的凹凸性	6
第 2 章	节曲线	8
2.1	节曲线的求解	8
2.2	节曲线的封闭条件	11
2.3	几种常见的节曲线	12
第 3 章	圆齿轮共轭齿廓	21
3.1	啮合角函数与共轭齿廓方程	21
3.2	齿条和啮合轨迹方程求解	26
3.3	共轭齿廓方程求解举例	27
3.4	共轭齿廓啮合角定理与基曲线	31
3.5	共轭齿廓曲率半径与渐屈线	35
3.6	共轭齿廓弧长与滑动系数	40
3.7	齿根过渡曲线	44
3.8	共轭齿廓凹凸性判别	48
第 4 章	非圆齿轮齿廓	59
4.1	共轭齿廓方程	59
4.2	齿条齿廓与接触轨迹	65
4.3	齿廓曲率半径	67
4.4	齿廓弧长与滑动系数	71
4.5	齿廓的啮合角函数与啮合界限点	75
4.6	渐屈线和节曲线	80
4.7	齿根过渡曲线	84
4.8	齿廓与节曲线	85
4.9	齿廓的凹凸性	87

第 5 章 非圆齿轮设计 .....	100
5.1 非圆齿轮设计方法和步骤 .....	100
5.2 非圆齿轮的设计计算举例 .....	105
第 6 章 凸轮轮廓 .....	119
6.1 移动滚子从动件盘形凸轮机构 .....	119
6.2 平底移动从动件盘形凸轮机构 .....	123
6.3 摆动滚子从动件盘形凸轮机构 .....	127
6.4 平底摆动从动件盘形凸轮机构 .....	130
6.5 凸轮机构运动误差 .....	133
参考文献 .....	150

# 第 1 章 概 论

## 1.1 共轭曲线与齿廓啮合基本定理

共轭曲线是指一对互为包络线的曲线，在运动过程中，共轭曲线始终保持连续相切接触。共轭曲线在机械传动中应用十分广泛，如齿廓曲线和凸轮轮廓曲线均属于共轭曲线。

如图 1-1 所示，欲使一对齿轮的传动比按给定规律变化，该对齿轮的轮齿齿廓  $K_1$  和  $K_2$  在某一点接触时，过接触点的齿廓公法线应与两轮连心线交于两轮的瞬心点  $P$  (节点)。这个规律通称为齿廓啮合基本定理，又称为 Willis 定理。为保证一对齿轮匀速转动，即定比传动，两轮齿廓接触点的公法线应与两轮轮心的连线相交于一定点(节点)，即节点为固定点。该定理不仅适用于定传动比的齿轮传动，还适用于变传动比的齿轮传动。它给出了设计齿轮齿形时应满足的几何条件。

理论上，可用作齿轮齿廓的曲线有无数种，目前常用的齿廓曲线有渐开线、圆弧和摆线等曲线。凡满足齿廓啮合基本定理的一对齿廓曲线称为共轭齿廓曲线，以下简称共轭齿廓。

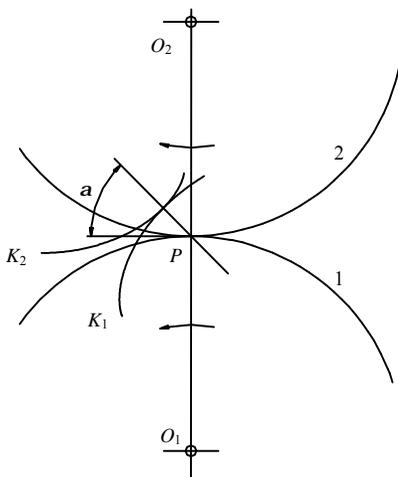


图 1-1 齿廓啮合基本定理

1、2: 瞬心线

## 1.2 啮合角与啮合角函数<sup>[3]</sup>

如图 1-1 所示，一对共轭齿廓接触点的公法线与齿廓节点处圆周速度之间的夹角  $\alpha$  称为啮合角。啮合角与某一参变量之间的函数关系称为啮合角函数。渐开线齿廓的啮合角函数为常数，而摆线齿廓的啮合角函数不是常数。啮合角函数不仅反映了齿轮的传动特性，而且还决定了齿廓形状。啮合角函数值越小，传动效率越高；啮合角函数值越大，传动效率越低，其取值范围为  $0^\circ \sim 90^\circ$ ，在此范围内应尽量取小值。已知啮合角函数，可直接求解齿廓曲线，分析齿廓的几何特性和啮合特性。以下各章将详细论述啮合角函数。

### 1.3 几种常用的共轭齿廓求解方法<sup>[4]</sup>

共轭齿廓曲线可通过几何作图法和数学解析的方法进行求解。几何作图法主要包括包络曲线法、Poncelet 法、Reuleaux 法、旋轮曲线(roulette)法四种方法。这些方法作图过程复杂，齿廓图形不精确，而且不便于齿廓几何特性分析。目前，普遍以数学解析理论为基础研究共轭齿廓。求解共轭齿廓时，常用的方法有三种：

给定一个齿廓的齿廓方程和传动关系(传动比)，求解另一个齿廓，称之为齿廓法；  
 给定齿条的齿廓方程和传动关系，求解另一个齿廓，称之为齿条法；  
 给定共轭齿廓接触轨迹方程和传动关系，求解一对共轭齿廓，称之为接触轨迹法。

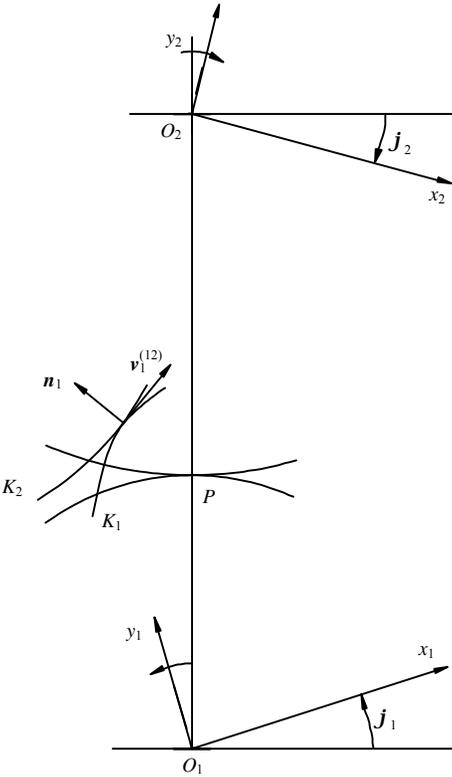


图 1-2 运动学法

#### 1.3.1 齿廓法

齿廓法包括包络曲线法、Gochman 法、运动学法和齿廓法线法。运动学法和齿廓法线法比包络曲线法和 Gochman 法更简便常用。

运动学法<sup>[5]</sup>，参见图 1-2，齿廓  $K_1$  和  $K_2$  分别绕轴线  $O_1$  和  $O_2$  转动，坐标系  $S_1(x_1, O_1, y_1)$  和  $S_2(x_2, O_2, y_2)$  分别与齿廓  $K_1$  和  $K_2$  固联。设齿廓  $K_1$  的参数方程为

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(u) \\ y_1 &= y_1(u) \end{aligned}$$

齿廓的啮合矢量方程为

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{v}_1^{(12)} = 0 \quad (1-1)$$

式中  $\mathbf{n}_1$  为齿廓  $K_1$  在坐标系  $S_1$  中的法矢量。 $\mathbf{v}_1^{(12)}$  为齿廓  $K_1$  和  $K_2$  啮合点在坐标系  $S_1$  中的相对运动速度矢量。将式(1-1)展开得

$$\frac{dy_1}{du} [y_1(1+i) - ai \cos j_1] - \frac{dx_1}{du} [x_1(1+i) - ai \sin j_1] = 0 \quad (1-2)$$

式中  $a$  为中心距， $i = j_1/j_2$  为传动比。式(1-2)确定了接触点参数  $u$  和齿廓  $K_1$  转角  $j_1$  之间的关系。再利用坐标系  $S_1$  与  $S_2$  之间的旋转坐标变换公式，即可求得齿廓  $K_2$  的



方程为

$$x_3 = x_3(u)$$

$$y_3 = y_3(u)$$

其上一一点  $m_3$  的切线与  $x_3$  轴的夹角为  $g$  , 则

$$\tan g = \frac{\frac{dy_3}{du}}{\frac{dx_3}{du}}$$

为使  $m_3$  成为接触点, 齿条  $K_3$  要平移一个距离  $l$  , 由图 1-4 可知

$$l = x_3 + y_3 \tan g \quad (1-3)$$

与此同时, 齿廓  $K_1$  和  $K_2$  相应转过角度  $j_1$  和  $j_2$  , 且

$$j_1 = \frac{l}{r_1} \quad (1-4)$$

$$j_2 = \frac{l}{r_2}$$

将式(1-3)代入式(1-4)得

$$j_1 = \frac{x_3 + y_3 \tan g}{r_1} \quad (1-5)$$

$$j_2 = \frac{x_3 + y_3 \tan g}{r_2} \quad (1-6)$$

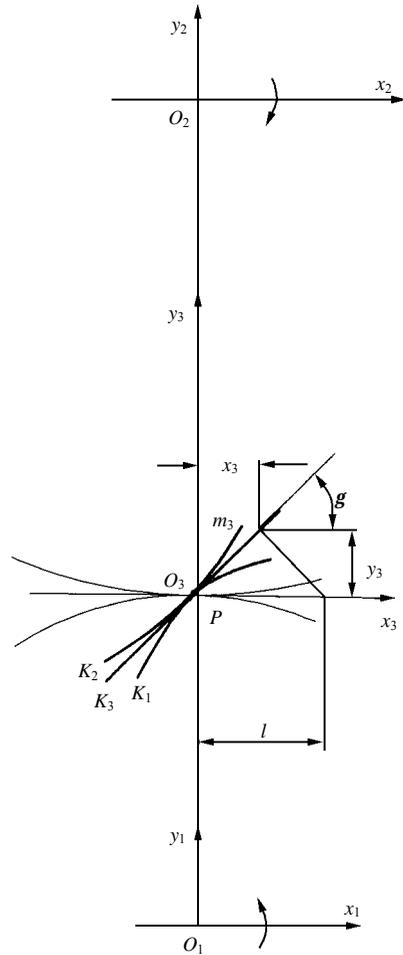


图 1-4 齿条法

式(1-5)和式(1-6)分别确立了接触点参数  $u$  与齿轮转角  $j_1$  和  $j_2$  之间的关系。根据坐标系间的坐标变换公式, 即可求出齿廓  $K_1$  和  $K_2$  的参数方程

$$x_1 = x_1(u)$$

$$y_1 = y_1(u)$$

$$x_2 = x_2(u)$$

$$y_2 = y_2(u)$$

### 1.3.3 接触轨迹法

如图 1-5，齿廓  $K_1$  和  $K_2$  分别与旋转坐标系  $S_1(x_1, O_1, y_1)$  和  $S_2(x_2, O_2, y_2)$  固联。取固定坐标系  $S(x, O, y)$ ，坐标系原点  $O$  与节点  $P$  重合。已知接触轨迹  $PM$  的方程为

$$y = y(x)$$

设齿廓  $K_1$  和  $K_2$  分别转过角  $j_1$  和  $j_2$  后，与接触轨迹曲线  $PM$  相交于  $M$  点，根据坐标系间的变换公式，齿廓  $K_1$  的方程为

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos j_1 + y \sin j_1 + r_1 \sin j_1 \\ y_1 &= -x \sin j_1 + y \cos j_1 + r_1 \cos j_1 \end{aligned}$$

式中

$$j_1 = \frac{\int \left( -\frac{y}{x} \right) dy - x + c}{r_1}$$

同理，齿廓  $K_2$  的方程为

$$\begin{aligned} x_2 &= x \cos j_2 - y \sin j_2 + r_2 \sin j_2 \\ y_2 &= x \sin j_2 + y \cos j_2 - r_2 \cos j_2 \\ j_2 &= \frac{\int \left( -\frac{y}{x} \right) dy - x + c}{r_2} \end{aligned}$$

使用上述传统的方法求解共轭齿廓时，一是必须给定一个齿廓方程或齿条方程，或是接触轨迹方程；二是必须经过旋转坐标变换后，才能求出其他的齿廓方程。根据传统的齿廓生成方法设计新齿形和进行齿廓几何特性分析研究较复杂。

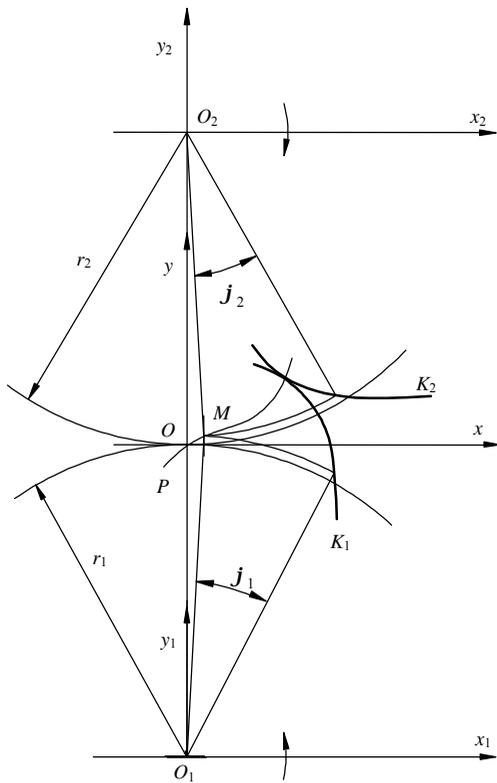


图 1-5 啮合轨迹法

## 1.4 Euler-Savary 公式<sup>[5]</sup>

1765 年，L. Euler 阐明了相啮合的一对齿轮，其齿形曲线的曲率半径和曲率中心位置的关系。后来，Savary 进一步完成了这一方法，成为 Euler-Savary 方程。

如图 1-6，Euler-Savary 公式可写成

$$\frac{1}{r_1 - l} + \frac{1}{r_2 + l} = \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \frac{1}{\sin a} \quad (1-7)$$

式中  $r_1$  和  $r_2$  分别为接触点处齿廓  $K_1$  和  $K_2$  的曲率半径。 $l = \overline{PM}$ ， $a$  为啮合角。在啮合节点处， $l = 0$ ，综合曲率半径为

$$r_{12} = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \sin a \quad (1-8)$$

计算齿轮节点处的接触强度时，式(1-8)是很有用的综合曲率半径计算公式。

Euler-Savary 公式看起来简单，但是要利用它，必须给出两个齿廓的接触点在啮合线上的位置，计算  $a$  值、线段  $l$  的长度和齿廓  $K_1$  的曲率半径  $r_1$ 。只有在完成以上步骤之后，才能算出  $r_2$  值。通常先确定齿廓方程，然后根据数学分析中的曲率半径计算公式直接计算  $r_1$  或  $r_2$  值。

## 1.5 共轭齿廓的奇异点

为保证共轭齿廓连续光滑啮合，齿廓曲线一阶导数应连续。换句话说，齿廓曲线应没有奇异点。共轭齿廓上的奇异点有两类：根切点；啮合界限点。共轭齿廓上的尖点均为根切点。用范成法加工齿轮时，被切齿轮的齿廓是刀具齿廓曲线族的包络。包络齿廓应该只由正常点构成。如果在包络齿廓上出现奇异点(折断点、尖点和其他形式的奇异点)，则切齿时，在奇异点处将发生根切。根切后，将有一部分正常齿廓被切掉。根据刀具齿廓求出被切齿轮齿廓方程，利用微分几何方法找出奇异点较困难。

齿廓能否参加接触的两部分的分界点，称为啮合界限点。为保证齿轮副能正常的啮合，设计齿形时，齿形工作部分不应有根切点和啮合界限点。

## 1.6 共轭齿廓的凹凸性

齿廓的凹凸性直接影响齿廓的接触状态，齿面接触应力和润滑状况。在曲率

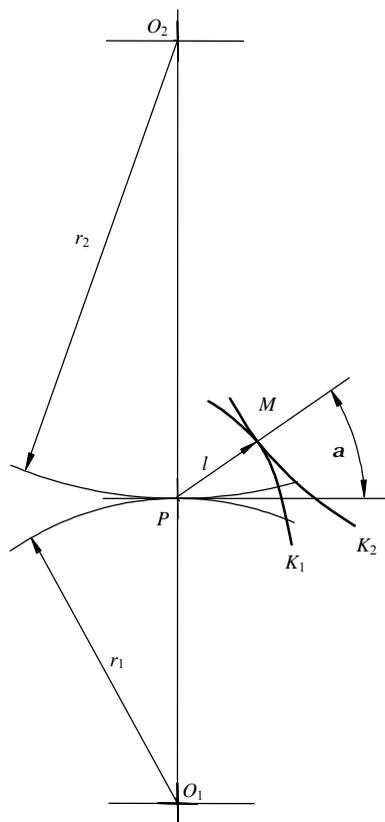


图 1-6 Euler-Savary 公式

半径相同的情况下，凸对凹齿面接触应力比凸对凸齿面接触应力小。对齿廓凹凸性的分析研究，目前仍局限于根据齿廓曲线的曲率半径判别凹凸性。如果齿廓方程未知，则无法判别它的凹凸性。反过来，仅由曲率半径公式也无法求出满足特定凹凸性要求的齿廓。因此有必要寻找判别共轭齿廓凹凸性的新方法。提出的新方法应当是在共轭齿廓方程未知的情况下，能够判别共轭齿廓的凹凸性。

## 第2章 节曲线

齿轮传动按节曲线形状分为圆齿轮传动和非圆齿轮传动，圆齿轮传动的传动比为常数，其节曲线为圆。非圆齿轮传动的传动比是变化的，一般为齿轮转角的函数，称为传动比函数。它的节曲线不是圆，一般为传动比的函数。而传动比函数一般根据设计要求确定。为求解非圆齿轮齿廓曲线，首先必须求出节曲线，而后根据节曲线才能确定非圆齿轮齿廓曲线。

### 2.1 节曲线的求解

如图 2-1(a)，齿廓 1 和齿廓 2 分别绕各自的回转中心  $O_1$  和  $O_2$  转动。在转动的过程中，如果齿廓 1 和齿廓 2 连续相切接触(啮合)，即这两个齿廓既不脱离也不相互切入，则称齿廓 1 和齿廓 2 为一对共轭齿廓。假如在某一时刻，齿廓 1 上的一点  $C_1$  与齿廓 2 上一点  $C_2$  啮合，齿廓 1 和齿廓 2 在啮合点处的公法线与齿廓回转中心连线  $\overline{O_1O_2}$  的交点为  $P$ 。根据三心定理<sup>[6]</sup>， $P$  点为齿廓 1 和齿廓 2 之间相对运动的瞬时回转中心，即瞬心。瞬心  $P$  又称为节点。对于圆齿轮，节点  $P$  为固定点。对于非圆齿轮，随着齿廓的转动，节点  $P$  沿连心线移动。

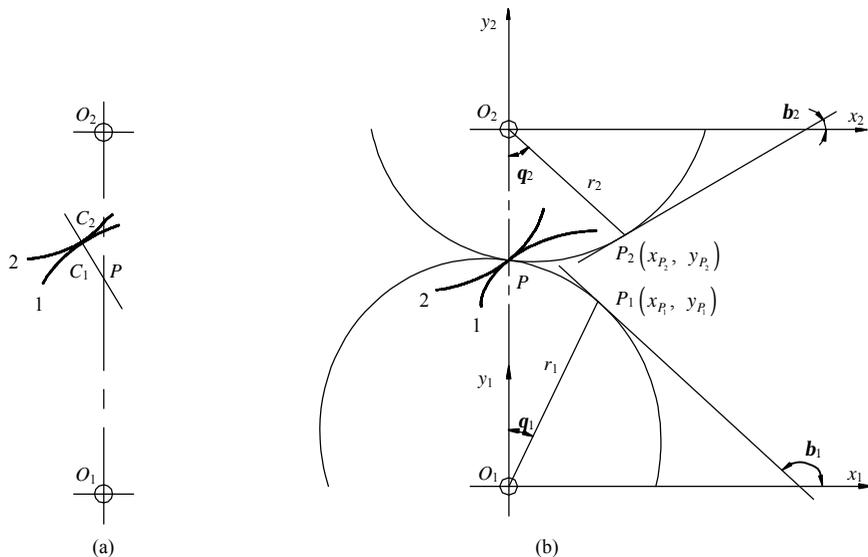


图 2-1 节点与节曲线

(a) 节点；(b) 节曲线

如图 2-1(b), 设齿廓 1 与直角坐标系  $x_1O_1y_1$  固联, 齿廓 2 与直角坐标系  $x_2O_2y_2$  固联。在起始位置时,  $y_1$  轴和  $y_2$  轴与连心线  $\overline{O_1O_2}$  重合, 齿廓 1 与齿廓 2 在节点处啮合。当直角坐标系  $x_1O_1y_1$  和  $x_2O_2y_2$  分别随着齿廓 1 和齿廓 2 转动时, 节点  $P$  在直角坐标系  $x_1O_1y_1$  上的轨迹曲线  $r_1(\mathbf{q}_1)$  和在直角坐标系  $x_2O_2y_2$  上的轨迹曲线  $r_2(\mathbf{q}_2)$ , 称为齿廓 1 和齿廓 2 的节曲线。根据相对运动原理, 齿廓 1 和齿廓 2 的啮合运动相当于两个节曲线之间的纯滚动转动。

根据传动比定义, 齿廓 1 和齿廓 2 的瞬时传动比为

$$i = \frac{w_1}{w_2} = \frac{dq_1}{dq_2}$$

式中  $w_1$  和  $w_2$  分别为齿廓 1 和齿廓 2 的瞬时角速度。由于节曲线  $r_1(\mathbf{q}_1)$  和  $r_2(\mathbf{q}_2)$  相互作用纯滚动运动, 所以

$$r_1 d\mathbf{q}_1 = r_2 d\mathbf{q}_2$$

由前两式得

$$i = \frac{r_2}{r_1} \quad (2-1)$$

设中心距  $\overline{O_1O_2} = d$ , 则

$$r_2 = d - r_1 \quad (2-2)$$

所以

$$i = \frac{d - r_1}{r_1} = \frac{d}{r_1} - 1 \quad (2-3)$$

若已知传动比函数  $i(\mathbf{q}_1)$ , 则可求得齿廓 1 和齿廓 2 的节曲线为

$$r_1 = \frac{d}{1 + i(\mathbf{q}_1)} \quad (2-4)$$

$$r_2 = \frac{di(\mathbf{q}_1)}{1 + i(\mathbf{q}_1)} \quad (2-5)$$

式(2-4)和式(2-5)为节曲线的极坐标方程, 参见图 2-1(b), 其直角坐标方程为

$$\begin{aligned} x_{P_1} &= r_1 \sin \mathbf{q}_1 \\ y_{P_1} &= r_1 \cos \mathbf{q}_1 \end{aligned} \quad (2-6)$$

$$\begin{aligned}x_{P_2} &= r_2 \sin \boldsymbol{q}_2 \\y_{P_2} &= r_2 \cos \boldsymbol{q}_2\end{aligned}\quad (2-7)$$

式中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}_2 &= \int_0^{\boldsymbol{q}_1} \frac{1}{i(\boldsymbol{q}_1)} d\boldsymbol{q}_1 \\&= \int_0^{\boldsymbol{q}_1} \frac{r_1(\boldsymbol{q}_1)}{d - r_1(\boldsymbol{q}_1)} d\boldsymbol{q}_1\end{aligned}\quad (2-8)$$

在  $\boldsymbol{q}_1$  的变化范围内，传动比函数为有界函数。为保证两个节曲线能够连续相互作用纯滚动运动，节曲线应为连续光滑曲线。

如图 2-1(b)，节曲线的切线与  $x$  轴的夹角为

$$\boldsymbol{b}_1 = \arctan \left( \frac{dy_{P_1}}{dx_{P_1}} \right) \quad (2-9)$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \arctan \left( \frac{dy_{P_2}}{dx_{P_2}} \right) \quad (2-10)$$

将式(2-6)的两边分别对角  $\boldsymbol{q}_1$  求导，可求得

$$\begin{aligned}\frac{dy_{P_1}}{dx_{P_1}} &= \frac{\frac{dy_{P_1}}{d\boldsymbol{q}_1}}{\frac{dx_{P_1}}{d\boldsymbol{q}_1}} \\&= \frac{\frac{dr_1}{d\boldsymbol{q}_1} \cos \boldsymbol{q}_1 - r_1 \sin \boldsymbol{q}_1}{\frac{dr_1}{d\boldsymbol{q}_1} \sin \boldsymbol{q}_1 + r_1 \cos \boldsymbol{q}_1}\end{aligned}\quad (2-11)$$

同理

$$\frac{dy_{P_2}}{dx_{P_2}} = \frac{\frac{dy_{P_2}}{d\boldsymbol{q}_2}}{\frac{dx_{P_2}}{d\boldsymbol{q}_2}}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{dr_2}{dq_2} \cos q_2 - r_2 \sin q_2 \\
 &= \frac{\frac{dr_2}{dq_2} \cos q_2 - r_2 \sin q_2}{\frac{dr_2}{dq_2} \sin q_2 + r_2 \cos q_2}
 \end{aligned} \tag{2-12}$$

## 2.2 节曲线的封闭条件

为使非圆齿轮连续地回转，齿轮节曲线应当是封闭的。对于齿轮 1 的封闭节曲线，有

$$r_1(0) = r_1(2\pi) = r_1(2n\pi) \tag{2-13}$$

式中  $n$  为整数。式(2-13)表明，节曲线的向径  $r_1$  是转角  $q_1$  的周期函数，周期为  $2\pi$ 。当  $r_1$  的变化周期小于  $2\pi$  时，式(2-13)也应满足，此时， $r_1$  在  $q_1 = 0 \sim 2\pi$  范围内周期个数应为整数。由前面给出的节曲线方程式可知，传动比函数  $i(q_1)$  在  $q_1 = 0 \sim 2\pi$  范围内的周期数亦为整数(以  $n_1$  表示)。

同理，齿轮 2 节曲线封闭条件应为，传动比函数  $i(q_2)$  在  $q_2 = 0 \sim 2\pi$  范围内的周期数亦为整数(以  $n_2$  表示)。当传动比  $i$  变化一个周期时，齿轮 1 的转角为  $2\pi/n_1$ ，齿轮 2 的转角为  $2\pi/n_2$ 。由式(2-8)可得齿轮 2 的封闭条件为

$$\frac{2\pi}{n_2} = \int_0^{2\pi/n_1} \frac{r_1(q_1)}{d - r_1(q_1)} dq_1 \tag{2-14}$$

已知齿轮 1 的节曲线  $r_1(q_1)$ 、整数  $n_1$  和  $n_2$ ，则由式(2-14)可求出中心距  $d$ ，进而可求出齿轮 2 的节曲线。

另外，对应于整数  $n_1$  和  $n_2$ ，齿轮 1 节曲线应由  $n_1$  段同样的连续光滑曲线组成，且每一段曲线对应的弧心角为  $2\pi/n_1$ ；齿轮 2 的节曲线同样应由  $n_2$  段连续光滑曲线组成，且每一段曲线对应的弧心角为  $2\pi/n_2$ 。由于整个封闭的节曲线为连续光滑曲线，所以每一段光滑曲线应满足如下条件：

- (1) 每段光滑曲线的起点与前一段曲线的终点重合；
- (2) 每段光滑曲线起点的切线与前一段曲线终点的切线重合；
- (3) 每段光滑曲线起点的向径与前一段曲线终点的向径重合，且长度相等。

因此，每段光滑曲线起点的切线与该点节曲线向径之间的夹角应等于前一段曲线终点的切线与该点节曲线向径之间的夹角。

## 2.3 几种常见的节曲线<sup>[7]</sup>

### 2.3.1 椭圆节曲线

椭圆曲线是最常见的非圆齿轮封闭节曲线，这种齿轮常称为椭圆齿轮。椭圆齿轮常用于纺织机械、造纸机械、卷烟机械和往复式输送机等机器中。

如图 2-2，椭圆长轴为  $2a$ ，短轴为  $2b$ ，焦距为  $2c$ 。椭圆节曲线常用极坐标表示，坐标原点位于椭圆的一个焦点处，该点同时也是椭圆齿轮 1 的回转中心，它的极坐标为

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{p_1}{1 - e_1 \cos q_1} \\ p_1 &= a(1 - e_1^2) \end{aligned} \quad (2-15)$$

式中  $e_1$  为椭圆的偏心率。根据椭圆的性质

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{c}{a} \\ a &= \sqrt{b^2 + c^2} \end{aligned} \quad (2-16)$$

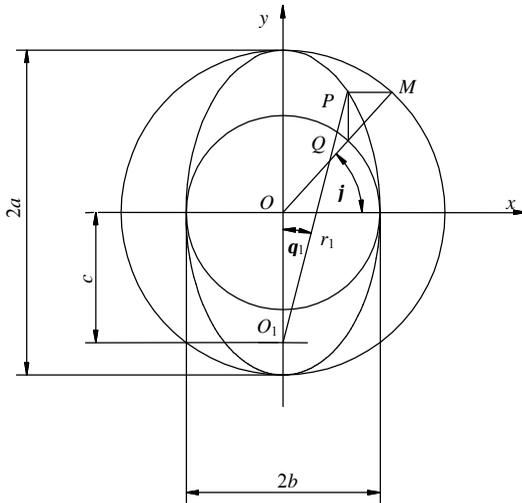


图 2-2 椭圆节曲线

显然，向径  $r_1$  的变化周期为  $2\pi$ ，即  $n_1 = 1$ 。假如齿轮 2 的节曲线也为封闭曲线，且回转一周时， $r_2$  的变化周期数为  $n_2$ ，将式(2-15)代入封闭条件式(2-14)得

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{n_2} &= \int_0^{2\pi} \frac{r_1(\mathbf{q}_1)}{d - r_1(\mathbf{q}_1)} d\mathbf{q} \\ &= \frac{2\pi p_1}{\sqrt{(d - p_1)^2 - d^2 e_1^2}}\end{aligned}$$

由此解得中心距  $d$  为

$$d = a \left[ 1 + \sqrt{n_2^2 - e_1^2 (n_2^2 - 1)} \right] \quad (2-17)$$

将齿轮 1 的节曲线方程式(2-15)代入条件式(2-8), 并进行积分得

$$\tan \frac{n_2 \mathbf{q}_2}{2} = \sqrt{\frac{d - p_1 + de_1}{d - p_1 - de_1}} \tan \frac{\mathbf{q}_1}{2} \quad (2-18)$$

或者

$$\cos \mathbf{q}_1 = \frac{(d - p_1 + de_1) \cos^2 \frac{n_2 \mathbf{q}_2}{2} - (d - p_1 - de_1) \sin^2 \frac{n_2 \mathbf{q}_2}{2}}{(d - p_1 + de_1) \cos^2 \frac{n_2 \mathbf{q}_2}{2} + (d - p_1 - de_1) \sin^2 \frac{n_2 \mathbf{q}_2}{2}} \quad (2-19)$$

根据式(2-3)、式(2-5)、式(2-15)和式(2-19)可求得齿轮 2 的节曲线为

$$r_2 = \frac{n_2 p_1}{\sqrt{n_2^2 - e_1^2 (n_2^2 - 1)} + e_1 \cos n_2 \mathbf{q}_2} \quad (2-20)$$

令

$$p_2 = \frac{n_2^2 p_1}{\sqrt{n_2^2 - e_1^2 (n_2^2 - 1)}} \quad (2-21)$$

$$e_2 = \frac{e_1}{\sqrt{n_2^2 - e_1^2 (n_2^2 - 1)}} \quad (2-22)$$

则

$$r_2 = \frac{p_2}{1 + e_2 \cos n_2 \mathbf{q}_2} \quad (2-23)$$

显然,  $r_2$  的变化周期为  $\mathbf{q}_2 = 2\pi/n_2$ 。比较式(2-15)和式(2-23), 它们的形式相似, 属于同一类曲线。

齿轮 1 和齿轮 2 的传动比为

$$i = \frac{d}{r_1} - 1 = \frac{e_1(e_1 - \cos q_1) + (1 - e_1 \cos q_1) \sqrt{n_2^2 - e_1^2(n_2^2 - 1)}}{1 - e_1^2} \quad (2-24)$$

工程上还常用另一种椭圆参数方程。如图 2-2，以椭圆的几何中心  $O$  为坐标原点，短轴为  $x$  轴，长轴为  $y$  轴，作直角坐标系  $(xOy)$ 。以  $O$  为圆心，分别以椭圆的半长轴  $a$  和半短轴  $b$  为半径作两个圆。向径  $OM$  与上述两圆交于点  $Q$  和  $M$ 。过  $Q$  作  $y$  轴的平行线，过  $M$  作  $x$  轴的平行线，两线交于  $P(x,y)$ ，则根据椭圆作图压缩法<sup>[8]</sup>， $P$  点就是椭圆上的一点。以向径  $OM$  与  $x$  轴的夹角  $j$  为参数，则椭圆方程为

$$\begin{aligned} x &= b \cos j \\ y &= a \sin j \end{aligned} \quad (2-25)$$

若坐标原点取在椭圆焦点  $O_1$  处，则椭圆方程为

$$\begin{aligned} x &= b \cos j \\ y &= a(e_1 + \sin j) \end{aligned} \quad (2-26)$$

由图 2-2 可知，角  $q_1$  与  $j$  之间的关系为

$$\begin{aligned} \cos q_1 &= \frac{y + e_1 a}{r_1} = \frac{e_1 + \sin j}{1 + e_1 \sin j} \\ \sin q_1 &= \frac{\cos j \sqrt{1 - e_1^2}}{1 + e_1 \sin j} \end{aligned} \quad (2-27)$$

或

$$\begin{aligned} \sin j &= \frac{\cos q_1 - e_1}{1 - e_1 \cos q_1} \\ \cos j &= \frac{\sqrt{1 - e_1^2} \sin q_1}{1 - e_1 \cos q_1} \end{aligned} \quad (2-28)$$

由式(2-9)~式(2-12)、式(2-15)和式(2-23)，可求出齿轮 1 和齿轮 2 节曲线的切线与  $x$  轴的夹角为

$$b_1 = \arctan \left( \frac{\sin q_1}{\cos q_1 - e_1} \right) \quad (2-29)$$

$$b_2 = -\arctan \left[ \frac{\sin q_2 + e_2 (\sin q_2 \cos n_2 q_2 - n_2 \cos q_2 \sin n_2 q_2)}{\cos q_2 + e_2 (\cos q_2 \cos n_2 q_2 + n_2 \sin q_2 \sin n_2 q_2)} \right] \quad (2-30)$$

下面给出几种具体情况。

(1) 当  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1$  时, 两个节曲线是全等的椭圆。由式(2-18)、式(2-20)和式(2-24)得

$$r_2 = \frac{p_1}{1 + e_1 \cos q_2}$$

$$q_2 = 2 \arctan \left[ \left( \frac{1 + e_1}{1 - e_1} \right) \tan \frac{q_1}{2} \right] \quad (2-31)$$

$$i = \frac{1 - 2e_1 \cos q_1 + e_1^2}{1 - e_1^2}$$

$$d = 2a$$

比较式(2-15)和式(2-28), 由于极角  $q_2$  的起始位置与极角  $q_1$  不同, 节曲线  $r_2$  的方程与  $r_1$  的方程形式不同, 但这两个节曲线的几何形状完全相同, 参见图 2-3。

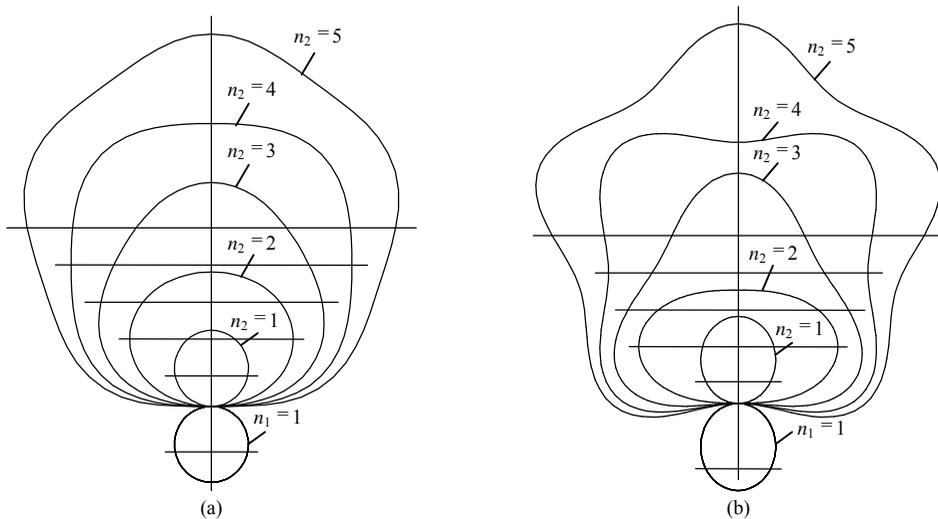


图 2-3 椭圆节曲线

(a)  $a = 20\text{mm}$ ,  $e_1 = 0.2$ ; (b)  $a = 20\text{mm}$ ,  $e_1 = 0.5$

(2) 当  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 2$  时, 齿轮 2 的节曲线为二阶椭圆, 通常也称为卵圆, 参见图 2-3。同理可得

$$\begin{aligned}
 r_2 &= \frac{4p_1}{\sqrt{4-3e_1^2} + e_1 \cos 2q_2} \\
 q_2 &= \arctan \left[ \sqrt{\frac{(1+e_1)(\sqrt{4-3e_1^2} + e_1)}{(1-e_1)(\sqrt{4-3e_1^2} - e_1)}} \tan \frac{q_1}{2} \right] \\
 i &= \frac{e_1(e_1 - \cos q_1) + \sqrt{4-3e_1^2}(1 - e_1 \cos q_1)}{1 - e_1^2} \\
 d &= a(1 + \sqrt{4-3e_1^2})
 \end{aligned} \tag{2-32}$$

(3) 当  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 3$  时, 齿轮 2 的节曲线为三阶椭圆, 同样也称为卵圆, 参见图 2-3。这时

$$\begin{aligned}
 r_2 &= \frac{9p_1}{\sqrt{9-8e_1^2} + e_1 \cos 3q_2} \\
 q_2 &= \frac{2}{3} \arctan \left[ \sqrt{\frac{(1+e_1)(\sqrt{9-8e_1^2} + e_1)}{(1-e_1)(\sqrt{9-8e_1^2} - e_1)}} \tan \frac{q_1}{2} \right] \\
 i &= \frac{e_1(e_1 - \cos q_1) + \sqrt{9-8e_1^2}(1 - e_1 \cos q_1)}{1 - e_1^2} \\
 d &= a(1 + \sqrt{9-8e_1^2})
 \end{aligned} \tag{2-33}$$

### 2.3.2 卵圆节曲线

2.2 节讨论椭圆节曲线时, 齿轮 1 的节曲线为椭圆, 齿轮 2 的节曲线为椭圆或高阶椭圆。本节讨论齿轮 1 和齿轮 2 的节曲线均为高阶椭圆的情况, 即节曲线为卵圆。

如图 2-4, 卵圆可看作是由椭圆演变出来的新曲线, 参见式(2-15), 将椭圆极角缩小整数倍  $n_1$  ( $n_1 > 1$ ), 保持向径  $r_1$  不变, 则由原始椭圆导出的曲线为卵圆, 其方程可以写成

$$r_1 = \frac{p_1}{1 - e_1 \cos n_1 q_1} \tag{2-34}$$

齿轮 2 的节曲线的求解方法和上述方法基本相同, 这里不再赘述, 直接给出结果

$$r_2 = \frac{p_2}{1 + e_2 \cos n_2 \mathbf{q}_2}$$

$$p_2 = \frac{n^2 p_1}{\sqrt{n^2 - e_1^2 (n^2 - 1)}} \quad (2-35)$$

$$e_2 = \frac{e_1}{\sqrt{n^2 - e_1^2 (n^2 - 1)}}$$

$$\mathbf{q}_2 = \frac{2}{n_2} \arctan \left( \sqrt{\frac{d - p_1 + de_1}{d - p_1 - de_1}} \tan \frac{n_1 \mathbf{q}_1}{2} \right) \quad (2-36)$$

$$i = \frac{e_1 (e_1 - \cos n_1 \mathbf{q}_1) + (1 - e_1 \cos n_1 \mathbf{q}_1) \sqrt{n^2 - e_1^2 (n^2 - 1)}}{1 - e_1^2}$$

$$(2-37)$$

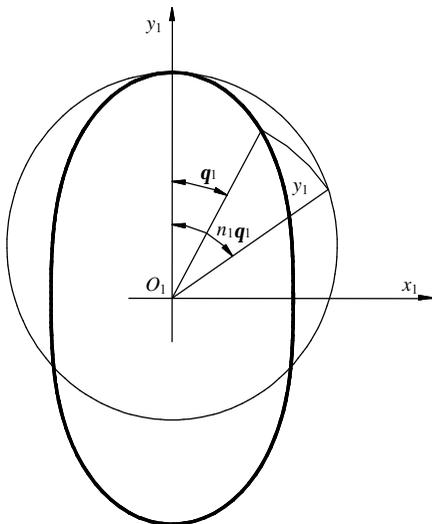


图 2-4 卵圆的形成

$$d = a \left[ 1 + \sqrt{n^2 - e_1^2 (n^2 - 1)} \right] \quad (2-38)$$

式(2-38)中  $n = n_2/n_1$  ,  $n_2 > 1$ 。

由式(2-9)~式(2-12)、式(2-34)和式(2-35), 可求得齿轮 1 和齿轮 2 节曲线的切线与  $x$  轴的夹角为

$$b_1 = \arctan \left[ \frac{\sin \mathbf{q}_1 - e_1 (\sin \mathbf{q}_1 \cos n_1 \mathbf{q}_1 + n_1 \cos \mathbf{q}_1 \sin n_1 \mathbf{q}_1)}{\cos \mathbf{q}_1 - e_1 (\cos \mathbf{q}_1 \cos n_1 \mathbf{q}_1 + n_1 \sin \mathbf{q}_1 \sin n_1 \mathbf{q}_1)} \right] \quad (2-39)$$

$$b_2 = -\arctan \left[ \frac{\sin \mathbf{q}_2 + e_2 (\sin \mathbf{q}_2 \cos n_2 \mathbf{q}_2 - n_2 \cos \mathbf{q}_2 \sin n_2 \mathbf{q}_2)}{\cos \mathbf{q}_2 + e_2 (\cos \mathbf{q}_2 \cos n_2 \mathbf{q}_2 + n_2 \sin \mathbf{q}_2 \sin n_2 \mathbf{q}_2)} \right] \quad (2-40)$$

当  $n_1 = n_2$  时, 两个节曲线为全等的卵圆。由式(2-34)~式(2-38)得

$$r_1 = \frac{p_1}{1 - e_1 \cos n_1 \mathbf{q}_1} \quad (2-41)$$

$$r_2 = \frac{p_1}{1 + e_1 \cos n_1 \mathbf{q}_2} \quad (2-42)$$

$$\mathbf{q}_2 = \frac{2}{n_1} \arctan \left[ \left( \frac{1 + e_1}{1 - e_1} \right) \tan \frac{n_1 \mathbf{q}_1}{2} \right] \quad (2-43)$$

$$i = \frac{1 - 2e_1 \cos n_1 q_1 + e_1^2}{1 - e_1^2}$$

$$d = 2a$$

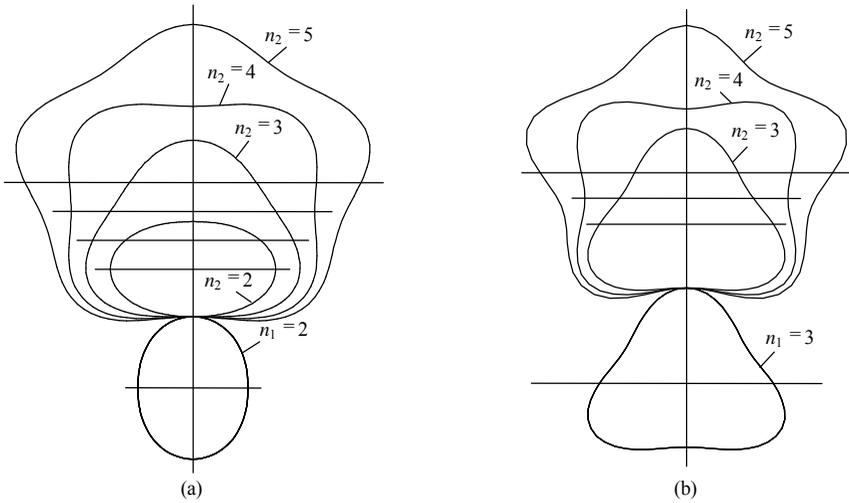


图 2-5 卵圆节曲线

(a)  $n_1 = n_2 = 2$  ; (b)  $n_1 = n_2 = 3$

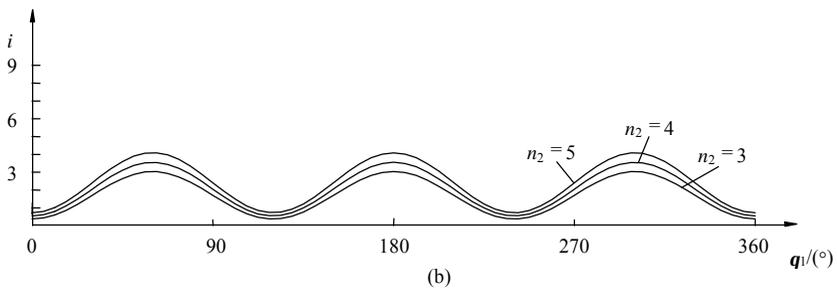
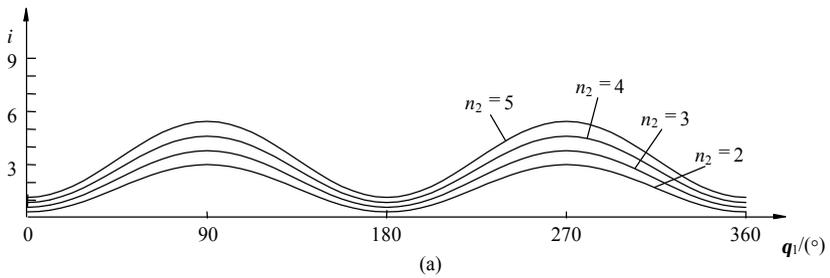


图 2-6 卵圆齿轮传动比

( $a = 20\text{mm}$ ,  $e_1 = 0.5$ )

(a)  $n_1 = 2$  ; (b)  $n_1 = 3$

如图 2-5 为三种不同情况的卵圆节曲线。图 2-6 为相应卵圆齿轮传动比曲线。从图中可以看出, 当  $n_1 = 2$  时, 齿轮 1 每转一周, 传动比函数重复变化两次。当  $n_1 = 3$  时, 齿轮 1 每转一周, 传动比函数重复变化三次。

### 2.3.3 线性传动比节曲线

这种节曲线的传动比  $i$  为转角  $q_1$  的线性函数, 应用中一般要求  $i$  随  $q_1$  均匀减小, 即

$$i = i_0 - kq_1 \quad (k > 0) \quad (2-44)$$

式中  $k$  为比例常数。当  $q_1 = 0$  时,  $i = i_0$ ; 当  $q_1 = q_{1\max}$  时,  $i = i_1$ 。所以

$$k = \frac{i_0 - i_1}{q_{1\max}}$$

由式(2-4)和式(2-5), 齿轮 1 的节曲线为

$$r_1 = \frac{d}{1 + i_0 - kq_1} \quad (2-45)$$

由式(2-8), 经积分得

$$q_1 = \frac{i_0}{k} (1 - e^{kq_2}) \quad (2-46)$$

将式(2-44)和式(2-46)代入式(2-5), 齿轮 2 的节曲线为

$$r_2 = \frac{di_0 e^{kq_2}}{1 + i_0 e^{kq_2}} \quad (2-47)$$

如图 2-7 为线性传动比节曲线。显然, 这种节曲线是非封闭的, 因此只能用于摆动传动。

由式 (2-9)~ 式 (2-12)、式 (2-45) 和式 (2-47), 可求出齿轮 1 和齿轮 2 节曲线的切线与  $x$  轴的夹角为

$$b_1 = -\arctan \left[ \frac{k \cos q_1 + (1 + i_0 - kq_1) \sin q_1}{k \sin q_1 + (1 + i_0 - kq_1) \cos q_1} \right] \quad (2-48)$$

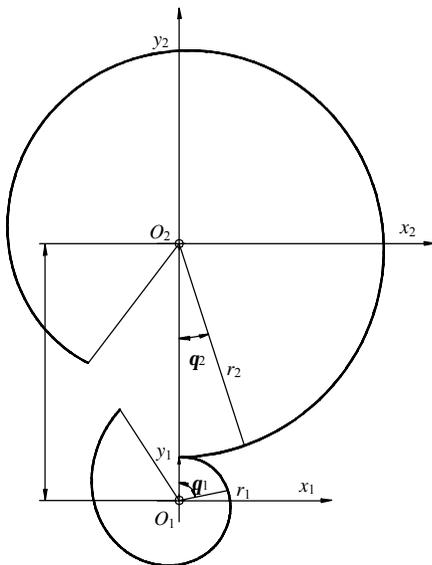


图 2-7 线性传动比节曲线

$$b_2 = \arctan \left[ \frac{k \cos q_2 - (1 + i_0 e^{kq_2}) \sin q_2}{k \sin q_2 + (1 + i_0 e^{kq_2}) \cos q_2} \right] \quad (2-49)$$

### 2.3.4 对数线节曲线

齿轮 1 的对数线节曲线方程为

$$r_1 = r_0 e^{lq_1} \quad (2-50)$$

式中  $r_0 = r_1(0)$ ， $l$  为常数。由式(2-2)和式(2-8)，齿轮 2 的节曲线方程为

$$\begin{aligned} r_2 &= d - r_0 e^{lq_1} \\ q_2 &= -\frac{1}{l} \ln \left( \frac{d - r_0 e^{lq_1}}{d - r_0} \right) \end{aligned} \quad (2-51)$$

或者

$$r_2 = (d - r_0) e^{-lq_2} \quad (2-52)$$

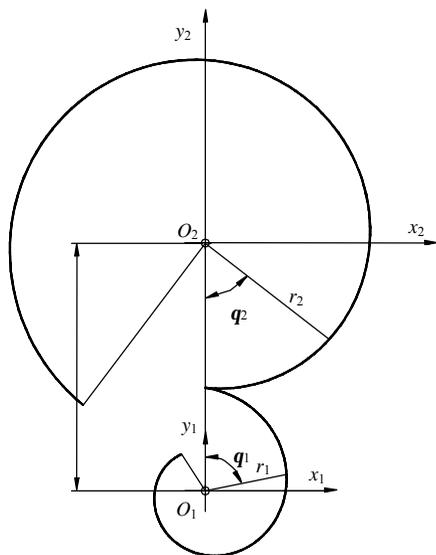


图 2-8 对数线节曲线

图 2-8 为对数线节曲线。同线性传动比节曲线一样，这种节曲线也是非封闭的，只能用于摆动传动。

由式 (2-9)~ 式 (2-12)、式 (2-45) 和式 (2-47)，可求出齿轮 1 和齿轮 2 节曲线的切线与  $x$  轴的夹角为

$$b_1 = \arctan \left( \frac{l \cos q_1 - \sin q_1}{l \sin q_1 + \cos q_1} \right) \quad (2-53)$$

$$b_2 = \arctan \left( \frac{l \cos q_2 - i_0 \sin q_1}{l \sin q_2 + i_0 \cos q_1} \right) \quad (2-54)$$

式中  $i_0 = (d - r_0)/r_0$ ，为初始传动比。

### 第 3 章 圆齿轮共轲齿廓

传统的共轲齿廓求解主要有三个途径：一是已知一个齿廓方程求另一个共轲齿廓方程；二是已知齿条方程求一对共轲齿廓方程；三是已知接触轨迹方程求一对共轲齿廓方程。在每一种途径中，具体的求解方法各具特色。但是，求解的过程中均用到了坐标系之间的变换公式，这使得齿廓方程的求解较复杂<sup>[2,5,9~12]</sup>。

共轲齿廓的几何特性包括曲率半径、渐屈线、滑动系数、齿廓根切和过渡曲线等。每一种几何特性分析研究的方法各异，没有统一的方法，缺乏系统性。另外，共轲齿廓方程的求解方法与齿廓几何特性的分析研究方法之间没能有机地联系起来。

基于啮合角函数的圆齿轮共轲齿廓求解方法是一种直接求解法。该方法通过定义啮合角函数，在齿廓、齿条和接触轨迹曲线均未知的情况下，无需坐标系之间的旋转坐标变换，可直接求解共轲齿廓方程，并且在齿廓未知的情况下，可直接求解齿廓的几何特性。以啮合角函数为主线，将共轲齿廓方程和齿廓几何特性有机地联系起来，增强了圆齿轮齿廓啮合几何学研究的系统性，简化了圆齿轮齿廓啮合几何学的研究方法，使得这一理论更易于理解、掌握和应用。

#### 3.1 啮合角函数与共轲齿廓方程<sup>[3,4]</sup>

参见图 3-1，符号  $K_1$  和  $K_2$  代表齿轮 1 和齿轮 2 的一对共轲齿廓，两轮的节圆半径分别为  $r_1$  和  $r_2$ 。旋转坐标系  $(x_1O_1y_1)$  和  $(x_2O_2y_2)$  分别与齿廓  $K_1$  和  $K_2$  固联，且坐标系的原点与齿轮回转中心重合。在初始位置时， $y_1$  轴与  $y_2$  轴通过节点  $P$ ，与两轮的连心线重合。假设齿廓  $K_1$  上一点  $C_1$  的法线与其节圆相交于点  $P_1$ ，齿廓  $K_2$  上一点  $C_2$  的法线与其节圆相交于点  $P_2$ ，当齿廓  $K_1$  逆时针转过角度  $q_1$ ，相应地齿廓  $K_2$  顺时针转过角度  $q_2$  时，点  $P_1$  和  $P_2$  同时运动到节点  $P$ ，点  $C_1$  和  $C_2$  在  $C$  点进入接触。根据齿廓啮合基本定律，可得

$$\overline{C_1P_1} = \overline{C_2P_2} \quad (3-1)$$

$$PP_1 = PP_2 = r_1q_1 = r_2q_2 \quad (3-2)$$

$$a_1 = a_2 \quad (3-3)$$

式中  $a_1$  为齿廓  $K_1$  上  $C_1$  点的法线与节圆在  $P_1$  点的切线之间的夹角， $a_2$  为齿廓  $K_2$  上  $C_2$  点的法线与节圆在  $P_2$  点的切线之间的夹角。根据啮合角的定义， $a_1$  和  $a_2$  分别

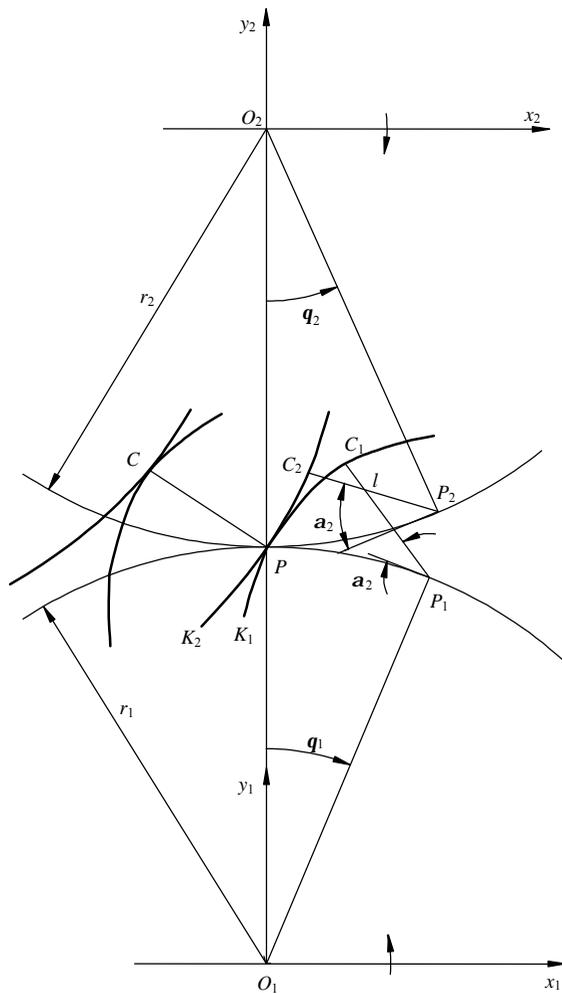


图 3-1 圆齿轮共轭齿廓

为齿廓  $K_1$  和  $K_2$  的啮合角。为了分析问题简便，令

$$a = a_1 = a_2$$

$$l = \overline{C_1 P_1} = \overline{C_2 P_2}$$

这里，我们定义  $l$  为法线长，角  $q_1$  和角  $q_2$  分别为齿廓  $K_1$  和  $K_2$  的法线角位置，以后简称法线角位置。对于外啮合齿廓，取  $q_1$  顺时针为正， $q_2$  逆时针为正。对于内啮合齿廓，取  $q_1$  和  $q_2$  均顺时针为正。

众所周知，圆柱齿轮传动分为两种：内啮合齿轮传动；外啮合齿轮传动。

如图 3-1 所示为一对外啮合齿轮的共轭齿廓。在初始位置时，坐标系  $(x_1 O_1 y_1)$  的  $y_1$  轴和坐标系  $(x_2 O_2 y_2)$  的  $y_2$  轴位于两轮连心线  $\overline{O_1 O_2}$  上，齿廓  $K_1$  和  $K_2$  在节点处啮合。从图上可以看出，齿廓  $K_1$  上的一点  $C_1$  在坐标系  $(O_1 x_1 y_1)$  中的坐标为

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \sin \mathbf{q}_1 - l \cos(\mathbf{a} + \mathbf{q}_1) \\ y_1 &= r_1 \cos \mathbf{q}_1 + l \sin(\mathbf{a} + \mathbf{q}_1) \end{aligned} \quad (3-4)$$

此即所求齿廓  $K_1$  的参数方程。齿廓  $K_2$  上的一点  $C_2$  在坐标系  $(x_2 O_2 y_2)$  中的坐标为

$$\begin{aligned} x_2 &= r_2 \sin \mathbf{q}_2 - l \cos(\mathbf{a} - \mathbf{q}_2) \\ y_2 &= -r_2 \cos \mathbf{q}_2 + l \sin(\mathbf{a} - \mathbf{q}_2) \end{aligned} \quad (3-5)$$

此即所求齿廓  $K_2$  的参数方程。由式(3-2)可得

$$i = \frac{\mathbf{q}_1}{\mathbf{q}_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (3-6)$$

式中  $i$  为齿轮传动比(常数)。

由于齿廓  $K_1$  上一点  $C_1$  的法线总是与该点的切线垂直，而且  $C_1$  点的法线与  $x_1$  轴的夹角为  $\pi - (\mathbf{a} + \mathbf{q}_1)$ ，因此有

$$\frac{\frac{dy_1}{dq_1}}{\frac{dx_1}{dq_1}} = \cot(\mathbf{a} + \mathbf{q}_1) \quad (3-7)$$

将式(3-4)两边分别对  $\mathbf{q}_1$  求导得

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dq_1} &= -r_1 \sin \mathbf{q}_1 + \frac{dl}{dq_1} \sin(\mathbf{a} + \mathbf{q}_1) + l \left( 1 + \frac{d\mathbf{a}}{dq_1} \right) \cos(\mathbf{a} + \mathbf{q}_1) \\ \frac{dx_1}{dq_1} &= r_1 \cos \mathbf{q}_1 - \frac{dl}{dq_1} \cos(\mathbf{a} + \mathbf{q}_1) + l \left( 1 + \frac{d\mathbf{a}}{dq_1} \right) \sin(\mathbf{a} + \mathbf{q}_1) \end{aligned} \quad (3-8)$$

又知

$$\cot(\mathbf{a} + \mathbf{q}_1) = \frac{\cos(\mathbf{a} + \mathbf{q}_1)}{\sin(\mathbf{a} + \mathbf{q}_1)} \quad (3-9)$$

将式(3-8)和式(3-9)代入式(3-7)，简化整理为

$$\frac{-r_1 \sin q_1 + \frac{dl}{dq_1} \sin(\mathbf{a} + q_1) + l \left( 1 + \frac{d\mathbf{a}}{dq_1} \right) \cos(\mathbf{a} + q_1)}{r_1 \cos q_1 - \frac{dl}{dq_1} \cos(\mathbf{a} + q_1) + l \left( 1 + \frac{d\mathbf{a}}{dq_1} \right) \sin(\mathbf{a} + q_1)} = \frac{\cos(\mathbf{a} + q_1)}{\sin(\mathbf{a} + q_1)} \quad (3-10)$$

将式(3-10)展开, 得

$$\begin{aligned} & -r_1 \sin q_1 \sin(\mathbf{a} + q_1) + \frac{dl}{dq_1} \sin^2(\mathbf{a} + q_1) + l \left( 1 + \frac{d\mathbf{a}}{dq_1} \right) \cos(\mathbf{a} + q_1) \sin(\mathbf{a} + q_1) \\ & = r_1 \cos q_1 \cos(\mathbf{a} + q_1) - \frac{dl}{dq_1} \cos^2(\mathbf{a} + q_1) + l \left( 1 + \frac{d\mathbf{a}}{dq_1} \right) \sin(\mathbf{a} + q_1) \cos(\mathbf{a} + q_1) \end{aligned} \quad (3-11)$$

将式(3-11)合并同类项

$$\frac{dl}{dq_1} [\sin^2(\mathbf{a} + q_1) + \cos^2(\mathbf{a} + q_1)] = r_1 [\cos q_1 \cos(\mathbf{a} + q_1) + \sin q_1 \sin(\mathbf{a} + q_1)] \quad (3-12)$$

将式(3-12)化简得

$$\frac{dl}{dq_1} = r_1 \cos \mathbf{a} \quad (3-13)$$

式(3-13)可看成是齿廓啮合方程的微分表达式, 即齿廓啮合微分方程。因为节圆半径  $r_1$  为常数, 所以式(3-13)还可写成

$$l = r_1 \int_0^{q_1} \cos \mathbf{a} dq_1 \quad (3-14)$$

式(3-14)即为齿廓啮合积分方程。为保证齿廓为共轭齿廓, 齿廓参数  $l$ 、 $\mathbf{a}$ 、 $q_1$  三者之间必须满足式(3-13)或式(3-14)。显然, 当给定函数  $\mathbf{a}(q_1)$  后, 通过式(3-4)、式(3-5)、式(3-6)和式(3-13), 在齿廓、齿条和接触轨迹曲线未知的情况下, 不用坐标变换, 可直接求出一对外啮合共轭齿廓的齿廓方程。

定义 啮合角  $\mathbf{a}$  与齿廓法线角位置  $q_1$  (或  $q_2$ ) 之间的函数关系  $\mathbf{a}(q_1)$  (或  $\mathbf{a}(q_2)$ ) 称为啮合角函数。计算时, 啮合角函数的取值范围为  $0 \leq \mathbf{a} \leq \pi/2$ 。通过引入啮合角函数, 复杂的共轭齿廓求解问题转化为简单的啮合角函数的定义, 这将使共轭齿廓的求解过程简化, 为设计生成新齿形开辟了新途径。

对于一对内啮合齿轮的齿廓  $K_1$  和  $K_2$ , 参见图 3-2, 齿廓  $K_1$  和  $K_2$  分别与旋转坐标系  $(x_1 O_1 y_1)$  和  $(x_2 O_2 y_2)$  固联, 坐标原点取在齿轮的回转中心。在初始位置时,  $y_1$  轴和  $y_2$  轴位于两轮连心线  $\overline{O_1 O_2}$  上, 齿廓  $K_1$  和齿廓  $K_2$  在节点  $P$  处啮合。设齿廓