



普通高等教育“十二五”规划教材
21世纪大学数学精品教材

可靠性理论及工程应用

张志华 编著



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
21 世纪大学数学精品教材

可靠性理论及工程应用

张志华 编著

科学出版社

北 京

版权所有，侵权必究

举报电话：010-64030229；010-64034315；13501151303

内 容 简 介

本书针对工科高年级学生和研究生数学知识结构，系统介绍了可靠性的基础理论和工程应用。主要包括可靠性基础、可靠性建模技术、常见可靠性评估和抽样检验方法，以及这些技术方法在可靠性工程中的应用。同时，还重点介绍了近年来可靠性理论的研究热点和取得的重要成果。

本书是一本适合高年级本科生和研究生学习可靠性理论的教材，也可作为可靠性工程技术人员的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

可靠性理论及工程应用/张志华编著. —北京：科学出版社，2012.1

普通高等教育“十二五”规划教材. 21世纪大学数学精品教材

ISBN 978-7-03-033265-3

I. 可… II. 张… III. 可靠性理论—高等学校—教材 IV. ①0213.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 281015 号

责任编辑：杨瑰玉 冯桂层 / 责任校对：蔡 莹

责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

<http://www.sciencep.com>

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本：B5(720×1000)

2012 年 1 月第 一 版 印张：24 1/4

2012 年 1 月第一次印刷 字数：468 000

定价：41.80 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

“21 世纪大学数学精品教材”丛书序

《21 世纪大学数学精品教材》为大学本科(本科 1 普通类和本科 2 一类)数学系列教材,体现了对数学精品的归纳及本套教材的精品特征.

一、组编机构

丛书设组编委员会,编委由 12 所高校数学院系的负责人构成(按姓氏笔画):

王公宝 方承胜 江世宏 李逢高 杨鹏飞 时 宝 何 穗 张志军
欧贵兵 罗从文 周 勇 殷志祥 高明成 黄朝炎 蔡光兴 戴明强

丛书主编:

蔡光兴 戴明强

二、编写特点

1. 适用性

教材的适用性是教材的生命力所在,每本教材的篇幅结合绝大部分高等院校数学院系对课程学时数的要求.部分教材配有教学光盘,便于教学.

2. 先进性

把握教改、课改动态和学科发展前沿,反映学科、课程的先进理念、知识和方法.

3. 创新性

市场需求和市场变化决定教材创新需要,数学教学在知识创新、思维创新等方面负有责任,一定程度的创新使教材更具冲击力和影响力.

创新与继承相结合,是继承基础上的创新.

创新转变为参编者、授课者的思想和行为,达到文化融合.

4. 应用性

丛书的读者对象为应用型和研究应用型大学本科(本科 1 普通类和本科 2 一类)学生,应用性是数学学科和数学教学发展的新特点,或展现在教材内容结构上,或体现于某些章节,或贯穿于其中.

5. 教学实践性和系统性

教材具有可操作性,教师好教,学生好学,同时保持知识完整.二者发生矛盾

时,前者优先,不过分追求体系完整.

三、指导思想

《21 世纪大学数学精品教材》大致可划分为两大类:基础知识类;方法与应用类.

1. 基础知识类

(1) 遵循高等院校教学指导委员会关于课程的教学基本要求,知识体系相对完整,结构严谨,内容精炼,循序渐进,推理简明,通俗易懂.

(2) 融入现代数学思想(如数学建模),分别将 Mathematica、Matlab、SAS、SPS 等软件的计算方法,恰当地融入课程教学内容中,培养学生运用数学软件的能力.

(3) 强化学生的实验训练和动手能力,可将实验训练作为模块,列入附录,供教学选用或学生自学自练,使用者取舍也方便.

(4) 教材章后均列出重要概念的英文词汇,布置若干道英文习题,要求学生用英文求解,以适应教育面向世界的需要,也为双语教学打下基础.

(5) 为使学生巩固知识和提高应用能力,章末列出习题,形式多样.书后配测试题,书末提供解题思路或参考答案.

2. 方法与应用类

(1) 融入现代数学思想和方法(如数学建模思想),体现现代数学创新思维,着力培养学生运用现代数学工具(软件)的能力,使教材真正成为基于现代数学软件的、将数学软件融合到教材与教学内容的现代精品教材.

(2) 加强教学知识与内容的应用性,注重数学思想和方法的操作与应用及其实用性.通过实例、训练、实验等各种方式,提高学生对数学知识、数学方法的应用能力及解决问题的能力.

(3) 强化学生的实验训练,通过完整的程序与实例介绍,教会学生分析问题、动手编程、分析结果,提高学生的实验操作水平、实际动手能力和创新能力.

(4) 教材章后均列出重要概念的英文词汇,布置若干道英文习题,要求学生用英文求解,以适应教育面向世界的需要,也为双语教学打下基础.

(5) 为使学生巩固知识和提高应用能力,章末列出习题,形式多样.书后配测试题,书末提供解题思路或参考答案.

《21 世纪大学数学精品教材》组编委员会

2011 年 6 月

前 言

可靠性作为产品质量的重要属性,是产品工作能力的度量.可靠性问题涉及产品研制开发、生产制造、使用直到报废的全过程.随着科学技术的发展,人们对产品可靠性的要求越来越高,可靠性技术在产品研制开发及使用过程中得到了广泛应用.本书是作者多年来为我校研究生讲授可靠性数学的基础上改写而成的,适用于工科院校高年级学生和研究生可靠性教学用书.

可靠性技术包括可靠性论证、设计、验证及使用控制等技术,这些技术方法涉及概率论、数理统计、随机过程和运筹学等多个数学分支.针对工科院校的高年级学生和研究生数学基础,如何让他们在有限时间内深入系统地掌握可靠性技术的理论基础和研究方法,了解可靠性技术的工程背景是我们在可靠性教学中关心的问题.迄今为止,国内出版的众多可靠性书籍大多数都有自己的侧重点.有的偏重于抽象的理论描述,涉及概率论与数理统计等学科较深入的理论知识;有的侧重于可靠性技术方法的介绍,以满足工程使用的需要;有的以丛书形式系统地介绍各种可靠性技术的理论和应用.但是,适用于工科院校高年级学生和研究生教学用书则难于找到.因此,编写一本既有理论又有应用的可靠性教学用书是必要的.基于这一想法,我们力求使本书具有如下特点:第一,重视可靠性数学理论的系统介绍,针对产品研制过程中的可靠性论证、设计分析和验证等可靠性问题,系统介绍了常见可靠性技术所涉及的相关可靠性数学理论,企图通过短时间的学习,可以较全面地掌握可靠性理论,为进一步开展可靠性研究奠定坚实的数学基础.第二,强调可靠性理论与常用可靠性技术的联系.为了使读者能够更好地掌握可靠性理论,本书各章基本上遵循了先理论、后应用的章节结构,针对每章节所研究的问题,首先介绍相关的可靠性数学理论知识,在此基础上,选择相关典型可靠性工作进行重点研究,从而使读者在全面掌握可靠性研究方法的同时,尽可能多地了解常见

的可靠性设计分析技术和可靠性验证技术. 第三,在内容的编写上,充分考虑了工科院校高年级学生和研究生的数学知识结构,适当增加了一些数学基础知识的介绍,便于教学实施.

自 2004 年完成初稿以来,本书一直作为我校研究生可靠性数学课程的教材使用. 在多年的教学使用过程中,许多专家和研究生对本书提出了众多宝贵意见,尤其是我校研究生院和应用数学系的领导和同事们给予了大力支持,在此深表感谢. 另外,在本书的编写过程中,参考了近年来出版的可靠性著作和发表的学术论文,为了便于读者进一步深入研究可靠性理论和技术,在本书的最后主要列出了近年来出版的可靠性著作,相关专题研究文献列出的较少,敬请专家学者谅解.

由于作者经验及水平有限,不当之处在所难免,敬请专家与广大读者批评指正.

作 者

2011 年 5 月

目 录

第 1 章 可靠性及可靠性模型	001
1.1 可靠性的基本概念	001
1.1.1 可靠性的定义	001
1.1.2 可靠性与产品寿命周期	003
1.2 产品故障模型及可靠性指标	004
1.2.1 不可修产品失效模型及其寿命分布函数	004
1.2.2 可靠度函数	005
1.2.3 失效率函数	006
1.2.4 平均寿命和可靠寿命	009
1.3 常用的寿命分布	011
1.3.1 指数分布	011
1.3.2 Gamma 分布	013
1.3.3 Weibull 分布	015
1.3.4 极值分布	017
1.3.5 对数正态分布	018
1.4 结构可靠性模型及其可靠性指标	019
1.4.1 应力强度的干涉理论	020
1.4.2 结构可靠度的计算及可靠指标	021
1.4.3 安全系数与结构可靠度的关系	023
第 2 章 典型不可修系统的可靠性	026
2.1 系统与结构函数	026
2.1.1 系统可靠性框图	026
2.1.2 结构函数	027
2.1.3 最小路及最小割	027
2.1.4 对偶	029
2.2 串并联系统	029
2.2.1 串联系统	029
2.2.2 并联系统	031
2.2.3 混联系统	032

2.3	表决系统	033
2.3.1	2/3(G)系统	033
2.3.2	$k/n(G)$ 系统	035
2.4	单调关联系统	035
2.4.1	单调关联系统的定义	036
2.4.2	单调关联系统可靠度的计算	037
2.4.3	单调关联系统的基本性质	042
2.4.4	重要度分析	043
2.5	储备系统	045
2.5.1	冷储备系统	046
2.5.2	温储备系统	049
2.6	可靠性预计	050
2.6.1	概述	050
2.6.2	相似设备法	050
2.6.3	应力分析法	051
2.6.4	数学模型预计方法	052
2.6.5	上、下限法	053
2.7	可靠性分配	055
2.7.1	概述	055
2.7.2	等分法	056
2.7.3	比例分配法	057
2.7.4	AGREE 方法	058
2.7.5	可靠性最优分配	060
2.8	故障树分析	065
2.8.1	概述	065
2.8.2	故障树的建立	066
2.8.3	故障树的定性分析	067
2.8.4	故障树的定量分析	070
第3章	可修系统的可靠性分析	071
3.1	可修产品故障模型及可靠性指标	071
3.1.1	可靠性指标	071
3.1.2	维修性指标	072
3.1.3	可用性指标	073
3.2	可修产品的更新模型	074

3.2.1	更新过程及主要结论	074
3.2.2	更新方程	077
3.2.3	可修产品的更新模型	077
3.2.4	可修产品的可靠性指标	078
3.3	可修串联系统的更新模型	084
3.3.1	系统的更新过程模型	084
3.3.2	系统可靠度	086
3.3.3	系统可用度	086
3.3.4	系统的平均故障次数	087
3.4	维修策略研究	088
3.4.1	总费用最小的定时更换策略	089
3.4.2	考虑可用度的维修策略	095
3.5	可修系统的 Markov 模型	096
3.5.1	Markov 过程及主要结论	096
3.5.2	可修系统的马氏模型	098
3.5.3	可修系统的瞬时可用度	098
3.5.4	系统的稳态可用度	100
3.5.5	系统的可靠度	101
3.5.6	系统的平均故障次数	103
3.5.7	可修串联系统的 Markov 模型	104
3.6	可修并联系统	108
3.6.1	n 个相同单元和一个维修工的情形	108
3.6.2	两个不同单元和一个维修工的情形	113
3.7	可修表决系统	114
第 4 章	可靠性试验与统计推断	116
4.1	可靠性试验及其分类	116
4.1.1	概述	116
4.1.2	可靠性试验的分类	117
4.1.3	可靠性试验程序	119
4.2	常见的可靠性评估方法	120
4.2.1	可靠性统计问题	120
4.2.2	次序统计量及其分布	121
4.2.3	点估计及其优良标准	123
4.2.4	极大似然估计	125

4.2.5 最小二乘法	126
4.3 参数的区间估计	128
4.3.1 区间估计的概念	128
4.3.2 枢轴量法	129
4.3.3 统计量法	131
4.3.4 大样本法	134
4.4 指数型产品可靠性评定	135
4.4.1 无替换定数截尾试验	135
4.4.2 有替换定数截尾试验	138
4.4.3 有替换定时截尾试验	140
4.4.4 无替换定时截尾试验	143
4.4.5 随机截尾试验	144
4.5 Weibull 型产品可靠性评定	145
4.5.1 极大似然估计	145
4.5.2 最优线性无偏估计	147
4.5.3 简单线性无偏估计	150
4.5.4 定时截尾试验数据的矩估计	153
4.6 对数正态型产品的可靠性评定	156
4.6.1 极大似然估计	156
4.6.2 最优线性无偏估计	159
4.6.3 简单线性无偏估计	161
4.7 可靠性指标的区间估计	163
4.7.1 位置形状分布及其估计的不变性	163
4.7.2 位置形状分布的不变估计	165
4.7.3 Weibull 分布的区间估计	166
4.8 寿命分布的拟合检验	171
4.8.1 位置形状模型的拟合检验	171
4.8.2 指数分布的拟合检验	174
4.8.3 Weibull 分布的拟合检验	177
第 5 章 可靠性检验及抽样	179
5.1 统计假设检验	179
5.1.1 假设检验的基本概念	179
5.1.2 检验统计量的点估计方法	183
5.1.3 广义似然比检验	185

5.2 成败型产品的可靠性假设检验	187
5.2.1 成败型产品的假设检验	187
5.2.2 检验势函数的计算	187
5.2.3 广义似然比检验	189
5.3 指数型产品的可靠性假设检验	190
5.3.1 一个指数分布母体的检验	190
5.3.2 两个指数分布母体的检验	193
5.4 成败型产品的抽样检验	195
5.4.1 计数抽样检验的基本原理	195
5.4.2 抽样检验方案的分类	198
5.4.3 抽样检验方案有关参数的确定	199
5.5 成败型产品的序贯抽样检验	200
5.5.1 成败型序贯抽样检验原理	200
5.5.2 序贯抽样检验的确定	202
5.5.3 抽样特性曲线及其平均抽样量	203
5.5.4 序贯抽样检验方案的制订	205
5.5.5 截尾序贯抽样检验	205
5.6 指数型产品的抽样检验	207
5.6.1 定数截尾寿命试验抽样方案	208
5.6.2 定时截尾寿命试验抽样方案	210
5.6.3 定时截尾试验抽样方案的分类	212
5.6.4 电子元器件的级别和定级试验	215
5.7 指数型产品的序贯抽样检验	219
5.7.1 指数型产品的序贯抽样检验原理	219
5.7.2 序贯抽样检验的方案	221
5.7.3 抽样特性曲线	222
5.7.4 序贯抽样检验的制定步骤	222
5.7.5 截尾序贯抽样检验试验	223
第 6 章 可靠性试验数据的 Bayes 推断	226
6.1 Bayes 定理及统计推断	226
6.1.1 Bayes 定理	226
6.1.2 充分统计量	229
6.1.3 损失函数和后验风险	229
6.1.4 参数的 Bayes 估计	230

6.1.5 参数的区间估计	231
6.2 先验分布的确定	232
6.2.1 共轭先验分布	232
6.2.2 无信息先验分布	236
6.2.3 多层先验分布	240
6.3 成败型产品成功率的 Bayes 评估	242
6.3.1 无先验信息情况下的 Bayes 评估	242
6.3.2 有先验信息情况下的 Bayes 评估	244
6.4 指数型产品可靠性的 Bayes 评估	249
6.4.1 定数截尾寿命试验	249
6.4.2 定时截尾寿命试验	250
6.4.3 电子产品可靠性的 Bayes 评估程序	252
6.5 可靠性检验和抽样的 Bayes 方法	253
6.5.1 可靠性检验的 Bayes 理论	253
6.5.2 常见的可靠性 Bayes 检验	255
6.5.3 成败型产品可靠性抽样检验的 Bayes 方案	260
6.5.4 指数型产品可靠性抽样检验试验的 Bayes 方案	264
6.6 无失效数据的统计分析	266
6.6.1 无失效数据的统计模型	266
6.6.2 无失效数据的修正似然函数法	267
6.6.3 无失效数据的配分布曲线法	269
6.6.4 正态分布情况下无失效数据的统计方法	272
6.6.5 IFRA 类分布情况下无失效数据的统计方法	275
第 7 章 可靠性增长试验及其统计分析	279
7.1 可靠性增长概述	279
7.1.1 可靠性增长技术及其意义	279
7.1.2 可靠性增长过程	280
7.1.3 可靠性增长试验	282
7.1.4 产品故障分类及处理	283
7.2 可靠性增长趋势检验	285
7.2.1 图分析法	286
7.2.2 故障截尾数据的 Laplace 趋势检验法	287
7.2.3 定时截尾数据的 Laplace 趋势检验	288
7.3 Duane 模型	290

7.3.1 Duane 模型的数学描述	290
7.3.2 Duane 模型的改进	291
7.3.3 模型估计及拟合	292
7.4 NHPP 过程及 AMSAA 模型	293
7.4.1 NHPP 过程	294
7.4.2 AMSAA 模型的数学描述	299
7.4.3 故障截尾数据的统计推断	300
7.4.4 时间截尾数据的统计推断	305
7.5 顺序约束可靠性增长模型的统计分析	308
7.5.1 成败型顺序约束可靠性增长模型	309
7.5.2 指数型顺序约束可靠性增长模型	313
第 8 章 系统可靠性评定	317
8.1 概述	317
8.2 样本空间排序法	318
8.2.1 样本空间的排序	318
8.2.2 参数的置信区间	320
8.3 成败型系统的可靠性评估	323
8.3.1 可靠度的置信限	323
8.3.2 串联系统可靠度的精确置信下限	324
8.3.3 并联系统可靠度的精确置信下限	328
8.4 指数型系统的可靠性评估	330
8.5 软件系统的可靠性评估	333
8.5.1 软件测试	333
8.5.2 软件分域测试的可靠性模型	334
8.5.3 软件可靠度的置信下限	335
8.5.4 软件无失效分域测试的置信下限	337
8.6 系统可靠度的经典近似置信限	338
8.6.1 串联系统可靠性评估的 L - M 方法	339
8.6.2 一般系统可靠度的 MML 方法	340
8.6.3 常见系统可靠度的置信下限	341
8.7 系统可靠性的 Bayes 评估	345
8.7.1 系统可靠性的 Bayes 评估步骤	345
8.7.2 成败型串并联系统的 Bayes 评估方法	345
8.7.3 指数型串联系统的 Bayes 评估	348

8.7.4 一般串联系统的 Bayes 评估 350

附录 352

附表 1 正态分布的上分位数表 352

附表 2 χ^2 分布的上侧分位数表 352

附表 3 t 分布的上分位数表 354

附表 4 F 分布上侧分位数表 355

附表 5 最佳线性无偏估计系数表(Weibull 分布) 357

附表 6 最佳线性无偏估计的方差表(Weibull 分布) 362

附表 7 简单线性无偏估计表(Weibull 分布) 362

附表 8 正态分布参数极大似然估计用简表 364

附表 9 最佳线性无偏估计的方差表(对数正态分布) 364

附表 10 最佳线性无偏估计系数表(对数正态分布) 365

附表 11 简单线性无偏估计表(对数正态分布) 367

参考文献 369

第 1 章 可靠性及可靠性模型

可靠性是产品质量的重要属性之一. 作为基础, 本章介绍了可靠性的基本概念, 研究了常见的可靠性模型及其寿命分布.

1.1 可靠性的基本概念

1.1.1 可靠性的定义

众所周知, 质量是产品的生命, 因此, 人们十分重视产品的质量. 为了全面刻画产品质量, 人们从不同侧面提出了众多质量指标, 这些质量指标形成了产品质量指标体系. 按照产品质量指标的属性对其进行分类, 这些质量指标可分为性能指标、可靠性指标、安全性指标、适应性指标和经济性指标等. 如电视机有很多表示图像清晰程度、音质是否优美等质量指标, 称这些指标为性能指标, 即完成规定功能所需要的指标. 产品的可靠性指标反映了产品保持其性能指标的能力. 如在电视机出厂时其各项性能指标检验是合格的, 那么, 3000 小时后电视机是否仍保持出厂时各项性能指标呢? 这是用户十分关心的问题. 为了说明产品保持其性能指标的能力, 就必须向用户提供有关该产品的可靠性指标, 如平均寿命、可靠度等. 由此可见, 可靠性指标是产品的重要质量指标, 它与产品性能指标的差别主要体现在时间上, 性能指标不涉及时间因素, 而可靠性指标与时间因素密切相关, 是时间性的质量指标.

作为产品的质量属性, 可靠性与性能同等重要, 二者密不可分. 没有可靠性保证的产品, 性能指标再好也无法发挥作用; 同样, 离开产品的性能指标, 其可靠性就无从谈起. 如武器装备的可靠性较差, 不仅会增加维修工作量和费用, 甚至会丧失战斗力影响战局. 因此, 可靠性工程师的职责就在于设法提高产品的可靠性.

作为一门学科, “可靠性”是有其确切的定义的, 在国家标准 GB3187^[1] 和国军标准 GJB451A^[2] 中给出的产品可靠性定义是:

定义 产品在规定的条件下和规定的时间内, 完成规定功能的能力称为产品的可靠性(reliability).

在定义中所指的产品可以泛指任何系统、设备和元器件, 如可以将整个核电站、舰船等大型复杂系统作为产品考察其可靠性, 也可将电子元器件、机械零部件等作为产品考察其可靠性. 在可靠性定义中还涉及产品的工作环境、工作时间和规

定功能等因素。

“规定条件”包括使用时的环境条件和工作条件,如温度、振动、冲击等环境条件,使用时的应力条件、维护方法,储存时的储存条件等,这些条件对产品可靠性都会产生直接影响。在不同环境和工作条件下,同一产品的可靠性也不一样。因此,在研究产品可靠性时,需要对产品的工作条件、维护方式、环境条件和操作过程等进行详细描述。

“规定时间”是指产品规定的任务时间,这是可靠性定义中的核心,因为不谈时间就无可靠性可言。规定时间的大小、单位与产品类型、使用目的有关。譬如,在导弹发射时,要求发射装置在几秒或几分钟内可靠工作;地下电缆系统则要求几十年内可靠工作。对于有些产品,其规定时间常常是工作次数(如继电器)、行驶里程(如车辆)等。

“规定功能”是指产品规定的必须具备的功能及其技术指标。通过试验,产品的各项规定的功能及技术指标都已达到,则称该产品完成了规定功能;否则称该产品丧失规定功能。产品不能或一部分不能完成规定功能的事件或状态称为产品的故障。对于不可修产品,也称为失效。

产品故障的表现形式称为故障模式。引起故障的物理、化学变化等内在原因,称为故障机理。产品故障可以有多种分类方法。如按故障的规律可以分为偶然故障与渐变故障;按故障后果可以分为致命性故障与非致命性故障;而按故障统计特性又可以分为独立故障与从属故障。

“能力”这里是一个定性要求,在可靠性分析中,只是定性理解是不够的,必须对它进行定量刻画。由于产品在工作时发生故障带有偶然性,因此,在可靠性定义中的“能力”具有统计意义。另外,由于所研究产品的广泛性,可靠性的“能力”指标也是多种多样,如常用的可靠性指标有“可靠度”、“平均寿命”等。

由此可见,可靠性就是在上述三个“规定”下研究产品发生故障的统计规律。一般情况下,可靠性定义中的三个“规定”可以利用产品的寿命剖面和任务剖面进行描述。

产品的寿命剖面(life profile)是指:产品从制造到寿命终结或退出使用这段时间内所经历的全部事件和环境的时序描述。寿命剖面说明了产品在整个寿命期经历的事件(如装卸、运输、储存、检测、维修、部署、执行任务等)以及每个事件的顺序、持续时间、环境和工作方式。而产品的任务剖面(mission profile)是指:产品在完成规定任务时间内所经历的事件和环境的时序描述。对于完成多种任务的产品对应着多个任务剖面。任务剖面一般包括:

- (1) 产品的工作状态;
- (2) 使用及维修方案;
- (3) 产品工作的时间与顺序;

(4) 产品所处环境(外加的与诱发的)的时间与顺序;

(5) 任务成功或故障的定义.

显然,产品的寿命剖面包含一个或多个任务剖面.寿命剖面和任务剖面是正确建立产品可靠性模型、进行可靠性论证、设计等工作的基础.一般情况下,产品的寿命剖面、任务剖面在产品论证时就应该提出.

1.1.2 可靠性与产品寿命周期

产品从立项论证到退役报废所经历的整个时间成为产品的寿命周期.它通常包括论证、方案、工程研制与定型、生产、使用与保障以及退役等阶段.在产品寿命周期的每个阶段都存在着可靠性问题.经验表明,产品可靠性是设计出来的,生产出来的,管理出来的.因此,为了保证产品可靠性要求能够得到落实,需要在产品设计、生产和使用过程中开展一系列技术与管理活动,称为可靠性工程(reliability engineering).在工程实际中,可靠性工程一般指产品论证、设计及制造过程中的可靠性技术与管理活动,而将产品使用和维修过程中的可靠性技术与管理活动称为可靠性管理(reliability management).

可靠性工程是为了达到产品可靠性要求而进行的有关设计、试验和生产等一系列工作的总和,它是为适应产品的可靠性要求发展起来的新兴边缘学科.可靠性工程研究产品的故障发生原因、消除和预防措施,其主要任务是保证产品可靠性和可用性,延长产品使用寿命,降低维修费用,提高产品的使用效益.可靠性工程的工作重点是:

(1) 明确了解用户对产品可靠性的要求以及产品使用、维修、储存期间的自然环境以及保证产品能很好地完成任务的保障资源;

(2) 控制由于产品硬件、软件和人的因素造成对产品可靠性的影响.预防设计缺陷、选择不恰当的元器件和原材料以及减少生产过程中的波动等;

(3) 采用可靠性增长技术使产品设计成熟起来;

(4) 采用规范化的工程途径开展有效的可靠性工程活动.

可靠性工程贯穿于产品论证、设计、制造和试验的各个环节,每个阶段的可靠性工作重点并不相同.在产品论证阶段,其主要任务是通过分析产品的使用要求,从不同侧面提出产品可靠性的定性和定量要求.可靠性定性要求包括确定可靠性工作项目、制定和贯彻可靠性设计准则、简化设计、制定和实施元器件大纲等内容;可靠性定量要求是指根据产品的复杂性和实际使用特点,选择一个或多个可靠性指标描述产品可靠性,形成产品可靠性的指标体系,以便在产品设计、制造和使用过程中量化产品的可靠性.在产品设计阶段,其主要任务是对产品进行可靠性设计和可靠性试验,研究预防产品可能故障和隐患的方法;而可靠性试验是通过试验(或测试)来验证产品的可靠性,研究在有限的试验样机、时间和试验费用下如何获

得合理的评定结果;通过对可靠性设计和试验奠定产品的可靠性基础.在产品制造阶段,可靠性工作的主要任务是研究制造偏差对可靠性的影响、缺陷处理和早期故障排除等问题,通过对制造偏差的控制及早期故障排除,保证设计目标的实现.

可靠性管理是指产品在使用活动中进行的有关可靠性管理、维修及保障等一系列工作,它是研究产品使用过程中维护、保养、维修及保障策略,以保证产品可用性,延长产品使用寿命,降低维修费用,提高产品的使用效益.可靠性管理的工作重点是:通过产品运行过程中的可靠性监控、诊断预测,制定产品的售后服务和维修策略,以较少的费用、时间实现产品的可靠性目标,防止产品可靠性劣化,建立产品使用过程中的可靠性数据反馈系统.

由此可见,可靠性工程和可靠性管理^[3]所包含的工作内容相当深广,从横的方面来看,可靠性工程和管理可分为可靠性基础(技术理论、基础设备条件)、可靠性技术(元器件可靠性、系统可靠性及可靠性评价)及可靠性控制和管理等.从纵的方面来看,可靠性工程和管理可分为可靠性数学、可靠性物理、可靠性设计技术(可靠性指标论证分析、可靠性预计和分配、元器件降额应用、电磁兼容性设计、机械可靠性设计、故障模式及危害度分析和故障树分析等)、可靠性统计(试验技术和数据处理技术)、维修性理论、保障性理论等.而可靠性数学是可靠性设计技术的基础.因此,本书将重点研究可靠性数学和可靠性统计的理论,作为例子,选择有关可靠性技术方法进行介绍,以说明可靠性数学在产品研制和使用中的应用.

1.2 产品故障模型及可靠性指标

在研究产品可靠性时,人们常常将产品分为可修产品和不可修产品.所谓可修产品是指当产品丧失规定的功能后可以通过检修恢复其功能;而当产品丧失规定的功能后检修是不可能的或不划算的,产品发生失效后将被废弃,则称该产品为不可修产品.本节将研究不可修产品故障的统计规律,建立不可修产品的可靠性模型.对于可修产品的可靠性模型,将在第3章中研究.

1.2.1 不可修产品失效模型及其寿命分布函数

如果不可修产品丧失了规定的功能,则称产品发生失效.从产品开始工作到失效前的时间称为产品寿命(记为 T).由于产品发生失效是随机的,因此产品寿命 T 是一个非负随机变量.设产品寿命 T 的分布函数为

$$F(t) = P(T \leq t), \quad t \geq 0 \quad (1.2.1)$$

称 $F(t)$ 为失效分布函数或寿命分布函数,简称寿命分布(life distribution)或失效分布(failure distribution).它表示产品在 t 时刻前发生失效的概率.在可靠性研究

中,确定产品寿命分布是一项非常重要的工作.由概率论的知识可知,寿命分布满足如下性质:

- (1) $F(0) = 0$;
- (2) $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$;
- (3) $F(t)$ 是 t 的非减右连续函数.

根据产品的实际使用特点,产品寿命通常为连续型随机变量和离散型随机变量.当产品寿命 T 为连续型随机变量时,那么产品的寿命分布又可以利用失效概率密度函数(简称为失效密度)来表示,即存在非负函数 $f(t)$,使得

$$F(t) = \int_0^t f(u) du$$

对于上述失效密度 $f(t)$,一般满足如下性质:

- (1) $f(t) \geq 0$;
- (2) $\int_0^{\infty} f(t) dt = 1$.

对于许多产品,其寿命常常用使用次数来表示,这些产品的寿命为离散型随机变量,其寿命分布可用分布列来表示.若产品寿命的可能取值为 $t_k (k=1, 2, \dots)$,其寿命分布可表示为

$$p_k = P\{T = t_k\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

显然,上述分布列满足如下性质:

- (1) $p_k \geq 0 (k = 1, 2, \dots)$;
- (2) $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

1.2.2 可靠度函数

可靠度函数(reliability function,简称可靠度)是一个常用的产品可靠性指标.其定义为:产品在规定的条件下和规定的时间 t 内,完成规定功能的概率,用 $R(t)$ 表示.由定义可知

$$R(t) = P(T > t)$$

若产品的寿命分布为 $F(t)$,则 $R(t)$ 与 $F(t)$ 的关系为

$$R(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t) \quad (1.2.2)$$

即 $R(t) + F(t) = 1$. 由概率论的性质可知:

- (1) $R(0) = 1$;
- (2) $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0$;

(3) $R(t)$ 是 t 的非增左连续函数.

由此可见,可靠度 $R(t)$ 与寿命分布 $F(t)$ 一一对应,即可靠度 $R(t)$ 可由寿命分布 $F(t)$ 确定,反之 $F(t)$ 也可由可靠度 $R(t)$ 唯一确定.

1.2.3 失效率函数

在可靠性理论的研究中,人们常常需要考察当产品工作到一定时间后其失效的条件概率.即已知产品已工作到时刻 t 的情况下,在时刻 t 后单位时间内发生失效的概率称为产品在时刻 t 的失效率函数,简称失效率(failure rate),记为 $\lambda(t)$.

为了简单起见,在这里我们只对产品寿命为连续型和离散型的情况进行讨论.

1. 产品寿命为连续型随机变量

若产品寿命 T 为连续型随机变量,其寿命分布为 $F(t)$,失效率密度为 $f(t)$,由定义可知,失效率 $\lambda(t)$ 可表示为

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(T \leq t + \Delta t \mid T > t)}{\Delta t} \quad (1.2.3)$$

由条件概率的性质可知

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(T \leq t + \Delta t \mid T > t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(T \leq t + \Delta t, T > t)}{\Delta t P(T > t)} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \frac{1}{1 - F(t)} = \frac{F'(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \end{aligned}$$

即

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{F'(t)}{1 - F(t)} = \frac{-R'(t)}{R(t)} \quad (1.2.4)$$

由此可知,当寿命分布 $F(t)$ 或 $f(t)$ 已知时,由式(1.2.4)可求出失效率 $\lambda(t)$. 反之,假若已知产品的失效率 $\lambda(t)$,也可以求出寿命分布函数或可靠度. 由式(1.2.4)可得

$$d \ln[R(t)] = -\lambda(t) dt$$

注意到 $R(0) = 1$, 则有

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(t) dt\right] \quad (1.2.5)$$

$$f(t) = [1 - R(t)]' = \lambda(t) \exp\left[-\int_0^t \lambda(t) dt\right]$$

2. 产品寿命为离散型随机变量

若产品寿命 T 为离散型随机变量, 其寿命分布为 $\{p_k, k = 1, 2, \dots\}$, 则产品失效率 $\lambda(t)$ 可表示为

$$\lambda(t_k) = P\{T = t_k \mid T \geq t_k\} = \frac{p_k}{q_k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.2.6)$$

其中 $q_k = \sum_{i=k}^{\infty} p_i$. 由式(1.2.6)可知, 失效率 $\lambda(t_k) \leq 1$.

3. 失效率的统计解释与规律

作为可靠性理论中的重要概念, 失效率能够灵敏地反映产品的失效规律, 人们通常用失效率的大小对产品进行分级. 对于失效率 $\lambda(t)$, 可以有如下的概率解释和统计解释.

(1) 产品失效率 $\lambda(t)$ 的概率解释. 若产品工作到时刻 t 仍然正常工作, 则它在 $[t, t + \Delta t]$ 中失效的概率为

$$P\{T \leq t + \Delta t \mid T \geq t\} = \frac{P\{t \leq T \leq t + \Delta t\}}{P\{T \geq t\}} \approx \lambda(t) \Delta t$$

因此, 当 Δt 很小时, $\lambda(t) \Delta t$ 表示该产品在 t 以前正常工作的条件下, 在 $[t, t + \Delta t]$ 中的失效概率.

(2) 产品的失效率 $\lambda(t)$ 的频率解释. 设在 $t = 0$ 时有 N 个产品开始工作, 到时刻 t 有 $n(t)$ 个产品失效, 还有 $N - n(t)$ 个产品能够继续工作. 为了考察时刻 t 后产品的失效情况, 在时间 $[t, t + \Delta t]$ 内, 观察还能继续工作的 $N - n(t)$ 个产品的失效情况. 假设在时间 $[t, t + \Delta t]$ 内有 Δn 个产品失效, 则在时刻 t 尚有 $N - n(t)$ 个产品能够继续工作的条件下, 单位时间内发生失效的频率为

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{\Delta n / [N - n(t)]}{\Delta t} \quad (1.2.7)$$

由于 $\Delta n / [N - n(t)]$ 是产品的失效频率, 则失效率的估计是产品失效频率的速度. 由失效率的估计(1.2.7)可知, 失效率的量纲为 $\ast\ast\%$ /小时. 对于高可靠性产品, 其失效率较小, 一般规定失效率的基本单位是菲特. 其中 1 菲特 = 10^{-9} /小时.

例 1.1 设产品寿命 T 服从指数分布, 其失效密度为

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0 \quad (1.2.8)$$

记为 $T \sim E(\lambda)$, 则产品的可靠度为

$$R(t) = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} d\lambda = e^{-\lambda t}, \quad t > 0$$

由式(1.2.4)可得到产品的失效率为

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \lambda$$

由上可知,当产品寿命服从指数分布时,产品的失效率为常数,说明产品失效频率的速度并不随着工作时间的增加而变化.相对于产品可靠度,由于可靠度总是随着产品工作时间的增加而降低,可靠度的变化趋势并不能直观地反映产品失效频率的变化情况.由此可见,失效率更能灵敏地反映产品在每一个时刻的失效规律.

为了充分了解产品失效率的变化规律,自20世纪50年代以来,通过分析各类产品的可靠性数据给出了产品失效率的各种变化规律.在20世纪50年代,人们通过分析当时产品的可靠性数据,发现产品(特别是结构较简单的机械产品)的失效率函数呈现出如图1.1(A)所示的典型曲线形式,通常称这类典型曲线为浴盆曲线.在图1.1(A)中,浴盆曲线明显地分三个阶段,分别对应着产品的三个时期.

(1) 早期失效期. 在产品的早期使用阶段,产品失效率 $\lambda(t)$ 呈下降的趋势,即在产品刚刚投入使用时,由于产品设计与工艺缺陷、装配上的问题或质量检验不严等原因,造成产品的失效率较高;但随着产品工作时间的增加,造成产品早期失效的原因逐步被排除,产品的失效率将迅速降低.所以产品生产方一般采用筛选的办法剔除一批不合格品,减少产品的早期失效.

(2) 偶然失效期. 随着造成产品早期失效的原因被排除,产品的工作状态逐步稳定,进入到产品偶然故障期.在此阶段,造成产品失效的主要原因一般为产品外部因素的突然冲击导致产品失效.因此,产品在此阶段的失效率 $\lambda(t)$ 较低且比较稳定,基本保持常数,是产品的最佳工作阶段.

(3) 耗损失效期. 随着产品工作时间的延长,产品零部件的磨损、疲劳和老化的累积效应越来越明显,造成产品的性能逐渐变劣,产品发生故障的频率越来越大,其失效率 $\lambda(t)$ 呈现出上升趋势,此时产品进入耗损失效期.

随着科学技术的进步,人们制造出的产品结构越来越复杂,引起产品失效的原因也与过去的产品发生了较大变化.自20世纪70年代以来,人们开始关注现代产品失效规律的研究工作,以便客观掌握产品的失效规律.在浴盆曲线的基础上,人们又总结出产品失效的另外五类失效规律,如图1.1所示.

在上述产品失效的六种规律中,失效类型A、B、C所表示的产品失效率与产品的累积工作时间有关,通常称该类产品为工龄相关产品;而失效类型D、E、F所表示的产品失效率与产品的累积工作时间无关,即产品的失效率不受产品工作时间的影 响,通常称为非工龄相关产品.进一步的研究表明:对于复杂电子产品,其失效率变化规律为类型D、E、F的比例占80%以上,而失效率变化规律为类型A、B、

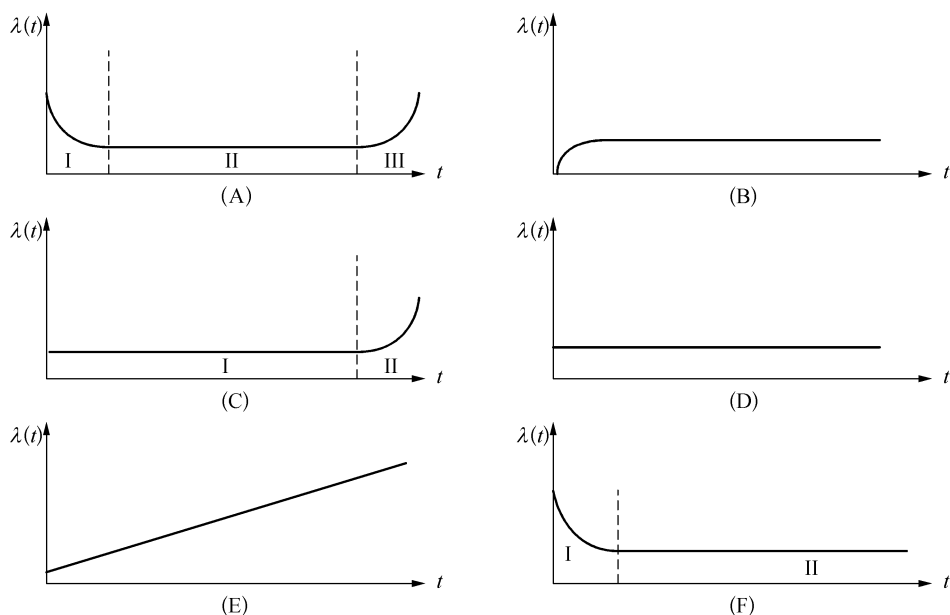


图 1.1 典型的失效率函数

C 的比例较低. 这些研究成果不仅极大地丰富了可靠性和维修性理论, 而且从根本上改变了人们使用产品和维修产品的观念, 由此发展形成的现代维修理论已在工程实际中得到广泛应用. 有关这方面的深入研究可参考文献[4]和[5].

1.2.4 平均寿命和可靠寿命

1. 平均寿命

设产品寿命 T 的寿命分布为 $F(t)$, 它的数学期望

$$E(T) = \int_0^{\infty} t dF(t) \quad (1.2.9)$$

称为产品的平均寿命, 记为 MTTF(mean time to failure). 平均寿命是一个标志产品平均能工作多长时间的量, 不少产品用平均寿命作为可靠性指标.

若寿命 T 具有失效密度 $f(t)$, 则有

$$E(T) = \int_0^{\infty} t f(t) dt \quad (1.2.10)$$

由于 $f(t) = -\frac{dR(t)}{dt}$, 若可靠度 $R(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} [tR(t)] = 0$, 则由分部积分法可得

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t) dt$$

上式表明,产品的平均寿命在几何上等于可靠度 $R(t)$ 与时间轴 t 所夹的面积.

例 1.2(续例 1.1) 设产品寿命 T 服从指数分布 $E(\lambda)$, 其失效密度为 $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} (t > 0)$. 由于 $\lim_{t \rightarrow \infty} [tR(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} [te^{-\lambda t}] = 0$, 则其平均寿命为

$$\text{MTTF} = \int_0^{\infty} te^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

在此例中,还可以求出 $t = 1/\lambda$ 时刻的可靠度为 $R(1/\lambda) = e^{-\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} = e^{-1} = 0.368$. 这表明,当产品寿命服从指数分布时,只有大约 36.8% 的产品寿命超过平均寿命,而大约 63.2% 的产品在平均寿命之前失效.

2. 可靠寿命

设产品的可靠度为 $R(t)$. 显然,随着产品工作时间的延长,产品可靠度 $R(t)$ 将随之下降. 在实际中,人们常常十分关心产品可靠度下降到一定程度时的时间,为此,人们引入了产品的可靠寿命.

对于给定的可靠度 r ($0 < r < 1$), 当产品的可靠度下降到 r 时所对应的时间称为产品的可靠寿命(reliable life), 用 t_r 表示, 即

$$R(t_r) = r \quad (1.2.11)$$

特别地, 当 $r = 0.5$ 时, $t_{0.5}$ 被称为产品的中位寿命. 中位寿命反映了产品好坏各占一半时所对应的工作时间, 当 $r = e^{-1}$ 时, $t_{e^{-1}}$ 称为产品的特征寿命.

在例 1.1 中, 由于产品的可靠度函数为 $R(t) = e^{-\lambda t}$, 因此产品的可靠寿命 t_r 为

$$t_r = -\frac{\ln r}{\lambda}$$

例 1.3 设产品的失效密度为 $f(t) = 0.25 - 0.03125t$ ($0 < t < 8$), 其中 t 为年, 求 $F(t)$, $R(t)$, $\lambda(t)$, MTTF, $t_{0.5}$.

由产品的失效密度可知, 产品的寿命分布函数为

$$F(t) = \int_0^t f(t) dt = 0.25t - 0.015625t^2, \quad 0 < t < 8$$

其可靠度和失效率分别为

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - 0.25t + 0.015625t^2, \quad 0 < t < 8$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{0.25 - 0.03125t}{1 - 0.25t + 0.015625t^2}, \quad 0 < t < 8$$

类似地, 可得到

$$\text{MTTF} = \int_0^{\infty} R(t) dt = \int_0^8 [1 - 0.25t + 0.015625t^2] dt = 2.667(\text{年})$$

$$t_{0.5} = 2.343(\text{年})$$

1.3 常用的寿命分布

1.3.1 指数分布

在可靠性理论中,特别是在电子产品的可靠性研究中,指数分布是最基本、最常用的寿命分布之一.

设产品寿命 T 具有寿命分布函数

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, t \geq 0 \quad (1.3.1)$$

则称 T 服从参数为 λ 的指数分布,记为 $T \sim E(\lambda)$. 此时其失效密度为

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, t > 0 \quad (1.3.2)$$

对于寿命服从指数分布的产品,其各种可靠性指标分别为

$$\text{平均寿命: } \text{MTTF} = \frac{1}{\lambda} \left(\text{对应的方差为 } \text{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2} \right);$$

$$\text{可靠寿命: } t_r = -\frac{\ln r}{\lambda};$$

$$\text{特征寿命: } t_{e^{-1}} = \frac{1}{\lambda} \text{ (与平均寿命相等).}$$

例 1.4 某产品寿命服从指数分布,其平均寿命为 4000 小时,求产品的失效率和使用 100 小时后的可靠度.

根据题意,有 $\text{MTTF} = \frac{1}{\lambda} = 4000$, 因此,产品的失效率为

$$\lambda = \frac{1}{\text{MTTF}} = 2.5 \times 10^{-4}$$

当 $t = 100$ (小时) 时,因 $\lambda t = 0.025$, 则产品使用 100 小时后的可靠度为

$$R(100) = e^{-\lambda t} = 0.97531$$

定理 1.1 产品寿命 T 服从指数分布的充要条件是: 对于任意的 $s > 0, t > 0$, 恒有

$$P(T > t + s \mid T > t) = P(T > s) \quad (1.3.3)$$

成立.

证明 必要性. 由于 $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, 则

$$P(T > s+t | T > t) = \frac{P(T > s+t)}{P(T > t)} = e^{-\lambda s} = P(T > s)$$

充分性. 由式(1.3.3)可得

$$P(T > t+s | T > t) = \frac{P(T > t+s)}{P(T > t)} = P(T > s)$$

记 $\varphi(t) = P(T > t)$, 则上式可改写为

$$\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t) \quad (1.3.4)$$

解上述函数方程, 对任意正数 m, n 及 $t > 0$, 有

$$\varphi(mt) = \varphi^m(t), \quad \varphi\left(\frac{m}{n}\right) = \varphi^m\left(\frac{1}{n}\right), \quad \varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \varphi^{\frac{1}{n}}(1)$$

故对任意有理数 $t > 0$, 有

$$\varphi(t) = \varphi^t(1) \quad (1.3.5)$$

进一步, 根据实数的连续性, 对任意实数 $t > 0$, 存在 $t_n \rightarrow t-0$, $t'_n \rightarrow t+0$, 其中 t_n, t'_n 均为有理数, 且当 $n \rightarrow \infty$, 有

$$\varphi(t_n) = \varphi^{t_n}(1) \rightarrow \varphi^t(1)$$

$$\varphi(t'_n) = \varphi^{t'_n}(1) \rightarrow \varphi^t(1)$$

由于 $\varphi(t)$ 的非增性, $\varphi(t'_n) \leq \varphi(t) \leq \varphi(t_n)$, 令 $n \rightarrow \infty$, 即知(1.3.5)式对任意实数 $t > 0$ 成立. 由于寿命 T 是非退化的, 可知 $\varphi(t)$ 不恒为 0, 也不恒为 1, 即 $0 < \varphi(1) < 1$, 故存在实数 $\lambda > 0$, 使得 $\varphi(1) = e^{-\lambda}$, 于是 $\varphi(t) = e^{-\lambda t}$. 定理证毕.

定理 1.2 若 $F(t)$ 是连续型寿命分布, 且 $F(0) = 0$, 则

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, t \geq 0$$

的充分必要条件是

$$\lambda(t) = \lambda > 0, \forall t > 0$$

证明略.

定理 1.1 表明, 如果已知产品到时刻 t 还能正常工作, 则它再工作 s 小时失效的概率与时间 t 无关. 这就是所谓的“无记忆性”, 它是指数分布的重要刻画.

产品寿命服从指数分布的物理解释是: 假设产品在 $t = 0$ 时开始工作, 在工作

过程中由于受外界各种随机冲击而引起产品失效. 记 N_t 表示在时间 $(0, t]$ 内产品受到冲击的次数, 假若冲击次数 $N_t (t \geq 0)$ 满足如下条件:

(1) 在时间 $(a, a+t]$ 内产品受外界冲击次数 $N_{t+a} - N_a$ 的概率分布与起点无关;

(2) 在互不相交的时间区间内, 产品受外界冲击次数是相互独立的;

(3) 在间隔长为 Δt 的时间内产品受二次以上冲击的概率为 $o(\Delta t)$.

对于满足上述三个条件的冲击模型, 可以证明: 在时间 $(0, t]$ 内产品受外界冲击次数 N_t 服从 Poisson 过程, 其分布函数为

$$P(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

这里 λ 为参数, 且 $\lambda > 0$. 有关证明见定理 7.1.

假若产品经受不住外界冲击, 即当外界冲击来到时产品立即失效, 此时产品寿命 T 就是第一个冲击来到的时间. 其可靠度函数为

$$\begin{aligned} R(t) &= P\{T > t\} = P\{\text{在 } (0, t] \text{ 内无冲击}\} \\ &= P\{\text{在 } (0, t] \text{ 内出现 } 0 \text{ 次冲击}\} = P\{N_t = 0\} \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

1.3.2 Gamma 分布

称非负随机变量 T 服从 Gamma 分布. 若 T 的失效密度为

$$f(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}, \quad t > 0 \quad (1.3.6)$$

记作 $T \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$. 式中 α, λ 为参数, 且 $\alpha > 0, \lambda > 0$, $\Gamma(\cdot)$ 是 Gamma 函数

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

当 $\alpha = 1$ 时, $f(t)$ 是指数分布函数; 当 α 为正整数时, $f(t)$ 是爱尔兰分布函数. 其密度函数曲线如图 1.2 所示. 对应的产品寿命分布、可靠度和失效率分别为

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt \\ R(t) &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt \end{aligned}$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\int_t^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt} \tag{1.3.7}$$

当 $\alpha = 2$ 时, $\lambda(t) = \frac{\lambda^2 t}{1 + \lambda t}$. 几种失效率图形如图 1.3 所示.

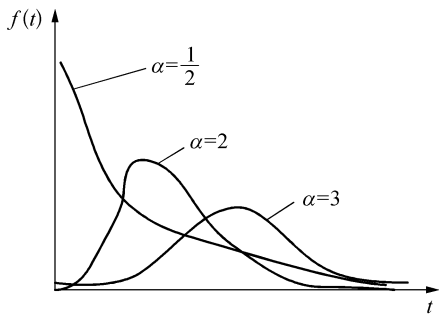


图 1.2 参数 α 对 Gamma 分布密度函数 $f(t)$ 的影响

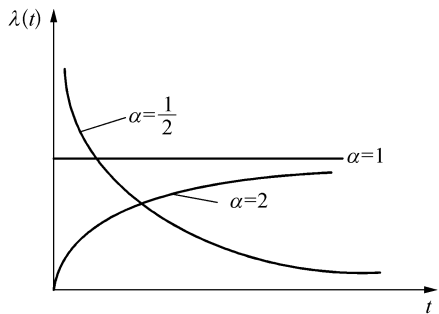


图 1.3 Gamma 分布的失效率 $\lambda(t)$ 曲线

Gamma 分布的平均寿命与方差分别为

$$E(T) = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad \text{Var}(T) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

Gamma 分布作为指数分布的一种推广,也可以用冲击模型进行解释. 假若产品能经受若干次外界冲击,但当产品受冲击次数累积到 α 次时就产生失效. 此时,产品寿命 T 就是第 α 次冲击来到的时间. 假如在时间 $(0, t]$ 内产品受到的冲击次数 N_t 服从 Poisson 分布,则产品寿命 T 服从 Gamma 分布.

例 1.5 设某产品的寿命服从 $\alpha = 2, \lambda = 0.01$ 的 Gamma 分布,求产品的失效率和使用 100 小时后的可靠度.

根据题意,可得到产品的可靠度和失效密度分别为

$$R(t) = (1 + \lambda t) e^{-\lambda t} = (1 + 0.01t) e^{-0.01t}$$
$$f(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} = 0.01^2 t e^{-0.01t}$$

因此,产品的失效率为

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{t}{(10\,000 + 100t)}$$

当 $t = 100$ (小时) 时,因 $\lambda t = 1$, 则产品使用 100 小时后的可靠度为

$$R(100) = (1 + \lambda t)e^{-\lambda t} = 0.7358$$

1.3.3 Weibull 分布

称非负随机变量 T 服从 Weibull 分布. 若 T 的失效密度为

$$f(t) = \frac{m}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{m-1} \exp \left[- \left(\frac{t}{\eta} \right)^m \right], \quad t \geq 0 \quad (1.3.8)$$

记作 $T \sim W(m, \eta)$. 其中 m 称为形状参数且 $m > 0$; η 称为特征寿命, 这里 $\eta = t_{e^{-1}}$. 不同形状参数 m (η 固定) 的密度函数曲线如图 1.4 所示. 对应的产品寿命分布函数为

$$F(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{\eta} \right)^m \right], \quad t \geq 0$$

当产品寿命 T 服从 Weibull 分布 $W(m, \eta)$ 时, 其平均寿命与方差分别为

$$E(T) = \eta \Gamma \left(\frac{1}{m} + 1 \right)$$

$$\text{Var}(T) = \eta^2 \left[\Gamma \left(\frac{2}{m} + 1 \right) - \Gamma^2 \left(\frac{1}{m} + 1 \right) \right]$$

其中 $\Gamma(x)$ 为 Gamma 函数. 若 $T \sim W(m, \eta)$, 则可靠度函数

$$R(t) = \exp \left[- \left(\frac{t}{\eta} \right)^m \right], \quad t \geq 0 \quad (1.3.9)$$

由式(1.3.9)不难得到可靠度为 r 的可靠寿命 $t_r = \eta \left(\ln \frac{1}{r} \right)^{\frac{1}{m}}$.

失效率函数为

$$\lambda(t) = \frac{m}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{m-1} \quad (1.3.10)$$

不同形状参数 m 所对应的失效率函数的曲线如图 1.5 所示. 从图 1.4 和 1.5 可以看出, 形状参数 m 对 Weibull 分布有很大影响.

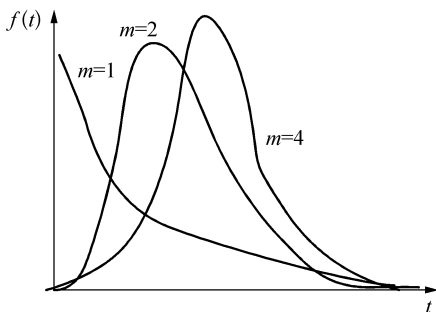


图 1.4 Weibull 分布的密度函数

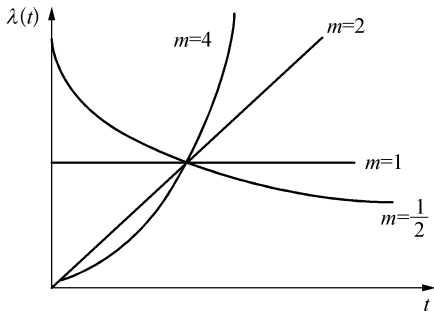


图 1.5 Weibull 分布的失效率曲线