非线性动力学中的现代分析方法

陈予恕　唐　云　陆启韶
郑兆昌　徐健学　欧阳怡　编

科　学　出　版　社

2000

内 容 简 介

本书系统地介绍非线性动力学中的复杂行为,重点阐述分叉与浑沌现象的现代分析方法,其中包括奇异性、LS和分析浑沌等方法,以及奇异摄动和随机振动等内容,同时介绍在自然科学和工程领域中的一些重要分叉问题.本书取材广泛,编排得当,并用通俗的语言,深入浅出地介绍这些理论和方法的基础知识,直至最新进展.读者从中不仅可以学到非线性动力学的严谨的数学处理方法,而且可以了解到该方向的实际模型和研究途径,以便较快地深入到非线性的有关课题的研究中去.

读者对象为大学数学系、应用数学系和力学系的大学生、研究生、教师以及从事理、化、生和工程等有关专业的科技工作者.

非线性动力学中的现代分析方法

陈予恕　唐　云　等编

责任编辑　唐云江　吕　虹

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

1992年10月第　一　版　　开本:850×1168　1/32

2000年9月第二次印刷　　印张:10 3/8

印数:2 401—5 400　　字数:271 000

ISBN 7－03－003191－1/O•582

定价:18.00元

前　　言

非线性动力学中复杂性现象的发现及分叉和浑沌理论的建立,被认为是当代基础科学的重大成就之一,它使非线性科学有了可靠的理论保证,并激励着众多的自然科学、工程学和数学工作者深入探索和研究.今天,非线性科学正在促使整个现代知识体系成为新科学,而动力系统、分叉、浑沌和奇异性理论方法的发展也已超越原来数学的界限,广泛应用于振动、自动控制、系统工程、机械工程等部门非线性问题的研究,并且对经典力学、物理学、固体力学、流体力学(为解决湍流问题带来希望)、化学工程、生态学和生物医学,乃至一些社会科学部门的研究和发展都产生深远影响.同时,科学实践的进一步深化反过来又促进非线性动力学数学理论的纵深发展.

分叉理论研究系统由于参数改变而引起的解的结构和稳定性变化过程,连同浑沌、奇异性理论一起,有其深刻的数学背景.为使广大非数学专业的科技工作者能在较短时间内了解并掌握非线性动力学中的这些近代数学方法,同时也为数学工作者能熟悉其应用,我们编写了这本书.

本书主要围绕分叉和浑沌的理论与应用进行介绍、考虑到非线性振动系统在分叉与浑沌理论研究中所起的重要作用,我们也介绍非线性振动理论的内容,包括传统的经典方法(第一章)和随机振动(第六章).

第一章主要介绍非线性振动研究中的摄动法、平均法和多尺度法.第二章是本书的理论基础,介绍非线性分析和动力系统方面的一些基本知识,包括静态和动态分叉理论的基本结果和中心流形定理.第三章介绍奇异性理论方法,重点是单变量分叉问题和具有对称性的分叉理论、并包括范式理论和对称性破缺.第四章介绍

LS(Liapunov-Schmidt)约化方法及对分叉问题的应用,这里重点是非线性参数激励振动系统一次近似的 1/2 亚谐分叉和高次近似分叉,同时介绍 Duffing 方程的简单分叉.第五章介绍浑沌的概念和特征,研究浑沌问题的方法和通向浑沌的道路,并对保守系和耗散系的有关问题分别进行讨论.第六章着重介绍非线性随机振动分析中的 FPK 法,矩闭合法和函数级数法,并同时介绍随机分叉和随机浑沌的研究概况.最后,在第七章介绍分叉理论在自然科学和工程中的应用,其中包括固体力学中杆和薄板的屈曲问题和颤振问题,流体力学中的 Couette-Taylor 流和 Bénard-Rayleigh 对流问题,化学反应器,以及反应扩散系中的 Brusselator 振子和 Belousov-Zhabotinskii 反应问题.

本书是根据全国第五届非线性振动会议的决议组织编写的,在集体讨论基础上由各人分头编写.第一章由郑兆昌编写,第二章由唐云主笔,吕虹协助编写,第三章由唐云编写,第四章由陈予恕编写,第五章由徐健学编写,第六章由欧阳怡编写,第七章由陆启韶编写.最后,在共同互审的基础上,由陈予恕、唐云和吕虹对全书进行了修改和整理.

本书内容涉及非线性动力学近代分析方法的多个方面,各章之间既有联系,又各自独立并各具特点,编写者希望本书能为在我国数学、力学、物理、化工、自动控制、生物医学工程和社会学等领域工作的、对非线性动力学,特别是对分叉和浑沌问题有兴趣的同志提供一些较为系统的参考材料,以促进这些学科的发展.但是,由于编写者的水平所限,编写时间仓促,所取材料很可能挂一漏万,本书的错误和不当之处在所难免,我们诚恳地希望读者给予批评指正.

陈予恕　唐　云

1991 年 5 月

目　　录

第一章　非线性振动的经典理论

非线性振动理论在工程科学中有着广泛的应用,同时,从非线性振动中提出的一些数学模型,如 Duffing 方程,van der Pol 方程和 Mathieu 方程,在非线性动力学理论中占重要地位.

本章介绍具有确定性系数的非线性振动方程周期解的经典方法,重点叙述摄动法、平均法、KBM 法和多尺度法,从这些方法可得出进一步的结果.本章还通过一些著名的实例阐明了非线性振动的特有的动力学行为,其中一些主要概念在研究分叉和浑沌运动时也将被应用.

§1.1　摄　动　法

摄动法又称小参数法.它处理含小参数 ε 的系统,一般当 $\varepsilon=0$ 时可求得解 x_0.于是可把原系统的解展成 ε 的幂级数 $x=x_0+x_1\varepsilon+x_2\varepsilon^2+\cdots$若这个级数当 $\varepsilon\to0$ 时一致收敛,则称正则摄动,否则;称奇异摄动.摄动法的种类繁多,本节介绍最基本的 Poincaré-Lindstedt 方法、进一步的讨论可参看[1].

1.1.1　Poincaré 法

考虑含小参数 ε 的非线性振动系统

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=\varepsilon f(x,\dot{x}) \tag{1.1.1}$$

其中 f 是关于 x 和 $\dot{x}$ 的解析函数.当 $\varepsilon=0$ 时(1.1.1)有解

$$x_0=a\cos(\omega_0t+\varphi) \tag{1.1.2}$$

当 $\varepsilon\neq0$ 时把解写成

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t)\varepsilon^i \equiv x(t;\varepsilon) \tag{1.1.3}$$

将 $x=x(t;\varepsilon)$ 代入(1.1.1),并将 $f=f(x(t;\varepsilon),\dot{x}(t;\varepsilon))$ 在 $\varepsilon=0$ 处展成 ε 的幂级数,比较系数,可求得解 $x(t;\varepsilon)$.

例 1.1.1 考虑 Duffing 方程

$$\ddot{x}+x=-\varepsilon x^3 \tag{1.1.4}$$

初始条件为 $x(0)=a_0$, $\dot{x}(0)=0$.把(1.1.3)代入(1.1.4)得一系列待解的线性初值问题

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^0: \ddot{x}_0+x_0=0, && x_0(0)=a_0, \dot{x}(0)=0\\
&\varepsilon^1: \ddot{x}_1+x_1=-x_0^3, && x_1(0)=0, \dot{x}_1(0)=0\\
&\varepsilon^2: \ddot{x}_1+x_2=-3x_1x_0^2, && x_2(0)=0, \dot{x}_2(0)=0
\end{aligned}$$

……

解这一组方程,可得到精确到 $O(\varepsilon^i)$ 的渐近解

$$x=a_0\cos t+\varepsilon a_0^3\left[-\frac{3t}{8}\sin t+\frac{1}{32}(\cos 3t-\cos t)\right]+O(\varepsilon^2) \tag{1.1.5}$$

(1.1.4)的解本应是周期函数.但在渐近解(1.1.5)的 ε 阶项中含有随 t 增加的项 $t\sin t$,称为永年项.显然这种解只适用于 $t=O(\varepsilon^0)$ 的短时间范围,为消除永年项,Lindstedt 作了改进.

1.1.2 Poincaré-Lindstedt 法

考虑到系统(1.1.1)的振动频率 ω 通常不是常数.本方法是引入新变量 τ,作变换

$$\tau=\omega t \tag{1.1.6}$$

来求对 τ 的周期解.将 ω 和 x 展开为小参数 ε 的幂级数

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots \tag{1.1.7}$$

$$x = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \cdots \tag{1.1.8}$$

其中 $x(\tau)$ 为周期函数，ω_i 为待定常数.注意到 $\dot{x} = \omega\dfrac{dx}{d\tau} = \omega x'$，$\ddot{x} = \omega^2\dfrac{d^2x}{d\tau^2} = \omega^2 x''$，利用变换关系(1.1.6)及以上 ω 和 x 的展开式，代入方程(1.1.1)后，可得 $x_i(\tau)$ 所满足的各阶方程

$$\varepsilon^0: \frac{d^2x_0}{d\tau^2} + x_0 = 0 \tag{1.1.9a}$$

$$\varepsilon: \left(\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1\right)\omega_0^2 = f_0 - 2\omega_0\omega_1\frac{d^2x_0}{d\tau} \tag{1.1.9b}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^2: \left(\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + x_2\right)\omega_0^2 = {} & x_1\frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{dx_1}{d\tau}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial x'} + \omega_1\frac{\partial f_0}{\partial \omega} \\ & -(2\omega_0\omega_2 + \omega_1^2)\frac{d^2x_0}{d\tau^2} - 2\omega_0\omega_1\frac{d^2x_1}{d\tau^2}\end{aligned} \tag{1.1.9c}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^3: \left(\frac{d^2x_3}{d\tau^3} + x_3\right)\omega_0^2 = {} & x_2\frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{dx_2}{d\tau}\frac{\partial f_0}{\partial x'} + \omega_2\frac{\partial f_0}{\partial \omega} \\ & + \frac{1}{2!}\left[x_1^2\frac{\partial^2 f_0}{\partial x} + \left(\frac{dx_1}{d\tau}\right)^2\frac{\partial^2 f_0}{\partial x'^2} + \omega_1^2\frac{\partial^2 f_0}{\partial \omega^2} + 2x_1\frac{dx_1}{d\tau}\frac{\partial^2 f_0}{\partial x\partial x'}\right. \\ & \left. + 2x_1\omega_1\frac{\partial^2 f_0}{\partial x\partial \omega} + 2\omega_1\frac{dx_1}{d\tau}\frac{\partial^2 f_0}{\partial x'\partial \omega}\right] - 2(\omega_0\omega_3 + \omega_1\omega_2) \\ & \cdot\frac{d^2x_0}{d\tau^2} - (2\omega_0\omega_2 + \omega_1^2)\frac{d^2x_1}{d\tau^2} - 2\omega_0\omega_1\frac{d^2x_2}{d\tau^2}\end{aligned} \tag{1.1.9d}$$

……

上列方程组中，f_0，$\dfrac{\partial f_0}{\partial x}$，… 等为函数 f 及其导数在原点(x_0，

x_0')的取值，且可依次求解 $x_i(\tau)$. 由于 $x_i(\tau)$ 是以 2π 为周期的周期函数，即满足

$$x_i(\tau + 2\pi) = x_i(\tau)$$

这一附加条件可以决定各阶频率修正值 ω_i，即可适当选择 ω_i，从而消除永年项得到周期解.

例 1.1.2 仍以 Duffing 方程(1.1.4)为例，由(1.1.9)，各阶方程组为

$$\begin{aligned}
&x_0'' + x_0 = 0 \\
&x_1'' + x_1 = -3x_0^3 - 2\omega_1 x_0'' \\
&x_2'' + x_2 = -3x_0^2 x_1 - (2\omega_2 + \omega_1^2) x_0'' - 2\omega_1 x_1'' \\
&x_3'' + x_3 = -3(x_0^2 x_2 + x_0 x_1^2 - 2(\omega_3 + \omega_1\omega_2) x_0'' \\
&\qquad\qquad - (\omega_1^2 + 2\omega_2) x_1'' - 2\omega_1 x_2'' \\
&\qquad\qquad \cdots\cdots
\end{aligned}$$

于是求得

$$x_0 = a\cos(\omega t + \varphi) = a\cos(\tau + \varphi) \tag{1.1.10}$$

我们在(1.1.10)中引入两个常数 a, φ，由初值决定，为方便计取 $\varphi = 0$. 依次可求得各阶渐近解 x_i；并利用消除永年项条件，可求得频率修正值 ω_i：

$$x_1 = \frac{1}{32}a^3\cos 3\tau,\ \omega_1 = \frac{3}{8}a^2$$

$$x_2 = \frac{1}{1\ 024}a^5(-21\cos 3\tau + \cos 5\tau)$$

$$\omega_2 = -\frac{15}{256}a^4$$

$$x_3 = \frac{1}{4\,096 \times 8} a^7 (417\cos 3\tau - 43\cos 5\tau + \cos 7\tau), \omega_3 = \frac{123}{4\,096 \times 2} a^6$$

……

这样就得到了一致有效的近似解及频率的近似值

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + O(\varepsilon^4)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \varepsilon^3 \omega_3 + O(\varepsilon^4)$$

上面结果表明,非线性振动周期解中有高次谐波存在,其振动频率与振幅有关.

§1.2 平　均　法

各种平均法的思想都源于求解二阶线性非齐次常微分方程特解的常数变易方法.下面,从最简单的平均法讲起.

1.2.1 KB 法

对于非线性自治系统

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) \tag{1.2.1}$$

根据常数变易的思想[5,6],Krylov(Крылов) 和 Bogoliubov (Боголюбов) 把解写成

$$x = a(t)\cos\psi(t)$$

$$\psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t) \tag{1.2.2a}$$

即非线性方程(1.2.1)的解仍具有线性方程解的形式,只是振幅 a 和相位 φ 都不再是常数,而是时间的函数.(1.2.2) 中出现的 ψ 叫全相位,它由式(a) 决定.(1.2.1) 和(1.2.2) 中有三个待求函数:

$x(t)$，$a(t)$ 和 $\psi(t)$．为寻求一个补充方程，对(1.2.2)求导

$$\dot{x}=\dot{a}\cos\psi-a\dot{\varphi}\sin\psi-a\omega_0\sin\psi \tag{1.2.2b}$$

若近似地取非线性振动速度具有线性方程时速度的形式，即

$$\dot{x}=-a\omega_0\sin\psi \tag{1.2.2c}$$

则由式(b)可得补充方程

$$\dot{a}\cos\psi-a\dot{\varphi}\sin\psi=0 \tag{1.2.2d}$$

将 $x,\dot{x},\ddot{x}$ 代入(1.2.1)，得

$$-\dot{a}\omega_0\sin\psi-a\omega_0\dot{\varphi}\cos\psi=\varepsilon f(a\cos\psi-a\omega_0\sin\psi) \tag{1.2.2e}$$

联立(d)和(e)，可解出：

$$\begin{cases}\dot{a}=-\dfrac{\varepsilon}{\omega_0}\sin\psi f(a\cos\psi,-a\omega_0\sin\psi)\\[2ex]\dot{\varphi}=-\dfrac{\varepsilon}{a\omega_0}\cos\psi f(a\cos\psi,-a\omega_0\sin\psi)\end{cases} \tag{1.2.3}$$

从(1.2.1)到(1.2.3)，相当于作了一种变量变换，把 $x,\dot{x}$ 换成了 a,φ．这种变换的物理意义是：拟简谐系统的振动仍以简谐振动的形式表示，但其振动的振幅和频率都随时间变化．而振幅 $a(t)$，相位 $\varphi(t)$ 的变化比函数 $x(t)$ 的变化要缓慢，表现为 $\dot{a},\dot{\varphi}$ 都是 $O(\varepsilon)$ 的量级．换言之，振幅、相位是时间的慢变函数．这是式(1.2.3)反映出的第一个特点．第二个特点是式(1.2.3)右端函数都是全相位 ψ 的周期函数．可是，由于非线性，对式(1.2.3)精确求解仍十分困难，只能求近似解．

KB 法的求解简述如下：由于式(1.2.3)右端函数是 ψ 的周期函数，可将其展开成Fourier级数；又由于 $a(t)$，$\varphi(t)$ 均缓慢变化，所以在第一次近似时可略去级数展式中的谐波项，仅取常数项．于是得到第一次近似的求解方程．

$$\dot{a}=-\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi}\sin\psi f(a\cos\psi,-a\omega_0\sin\psi)\,d\psi \tag{1.2.4}$$

$$\dot{\psi} = \omega_0 - \frac{\varepsilon}{2\pi a\omega_0}\int_0^{2\pi} \cos\psi f(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi)\,d\psi$$

注意到其中第二个式子已经用到式(a),由 $\dot{\varphi}$ 换为 $\dot{\psi}$.(1.2.4) 右端的积分项就是式(1.2.3) 右端函数在一个周期 $T = 2\pi$ 内对时间的平均值.由于 a,φ 在时间为一个周期的量级内变化很小,所以计算右端平均值时可看做常量.于是易由上式积分求出 $a(t)$,$\psi(t)$.

例 1.2.1 用 KB 法求解 Duffing 方程(1.1.4)

$$\ddot{x} + x = -\varepsilon x^3 \ (\omega_0 = 1)$$

设 $x = a\cos\psi$,因为 $f(x, \dot{x}) = -x^3$,代入(1.2.4)

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi} -(\sin\psi a^3\cos^3\psi)\,d\psi = 0$$

$$\dot{\psi} = \omega_0 - \frac{\varepsilon}{2\pi a\omega_0}\int_0^{2\pi} -a^3\cos^4\psi\,d\psi = 1 + \varepsilon\frac{3}{8}a^2$$

积分上式

$$a = a_0$$

$$\psi = \left(1 + \varepsilon\frac{3}{8}a_0^2\right)t + \varphi_0$$

a_0,φ_0 由初始条件决定.于是原方程近似解为

$$x = a_0\cos(\omega t + \varphi_0)$$

其中频率

$$\omega = 1 + \varepsilon\frac{3}{8}a_0^2$$

可见,由于非线性项影响,系统频率不再像线性系统那样是一常量,而是在一阶近似内有一个修正,且频率修正项与振幅或者说与初始条件有关.

1.2.2　平均法

为提高解的精度,现介绍平均法,这是一种求高阶近似的 **KB** 方法.仍从式(1.2.3)出发,并用 $\dot{\psi}$ 取代 $\dot{\varphi}$,为

$$\begin{aligned}\dot{a} &= -\frac{\varepsilon}{\omega_0}\sin\psi f(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi)\\ \dot{\psi} &= \omega_0 - \frac{\varepsilon}{a\omega_0}\cos\psi f(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi)\end{aligned} \tag{1.2.5}$$

为提高精度,求解式(1.2.5)时引入近似恒等变换

$$a = b + \varepsilon a_1(b,\theta) + \varepsilon^2 a_2(b,\theta) + \cdots \tag{1.2.6a}$$

$$\psi = \theta + \varepsilon\psi_1(b,\theta) + \varepsilon^2\psi_2(b,\theta) + \cdots \tag{1.2.6b}$$

(1.2.6)表明:由于 a,φ 慢变,因而可看成平稳变化项 b,θ 与各阶微小振动项的叠加.当 $\varepsilon=0$ 时,(a,ψ) 与 (b,θ) 恒等,当 $\varepsilon\neq0$ 且很小时,该式非常接近于恒等变换.(1.2.6)中各 a_i,ψ_i($i=1,2,\cdots$)皆是 θ 的以 2π 为周期的函数,并要求新变量 b,θ 对时间的导数满足

$$\begin{aligned}\dot{b} &= \varepsilon B_1(b) + \varepsilon^2 B_2(b) + \cdots\\ \dot{\theta} &= \omega_0 + \varepsilon\phi_1(b) + \varepsilon^2\phi_2(b) + \cdots\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

于是,求式(1.2.5)的解 a,ψ 就是要决定函数 $a_i(b,\theta)$ 和 $\psi_i(b,\theta)$ 并选择 b,θ 使得当由式(1.2.7)所求得的 b,θ 代入解(1.2.6)时,解能满足方程(1.2.5).把(1.2.6)对 t 求导并利用(1.2.7)式得

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \dot{b}\left(1 + \varepsilon\frac{\partial a_1}{\partial b} + \varepsilon^2\frac{\partial a_2}{\partial b} + \cdots\right) + \dot{\theta}\left(\varepsilon\frac{\partial a_1}{\partial\theta} + \varepsilon^2\frac{\partial a_2}{\partial\theta} + \cdots\right)\\ &= \varepsilon\left(\omega_0\frac{\partial a_1}{\partial\theta} + B_1\right) + \varepsilon^2\left(\omega_0\frac{\partial a_2}{\partial\theta} + B_2 + B_1\frac{\partial a_1}{\partial b} + \phi_1\frac{\partial a_1}{\partial\theta}\right)\end{aligned}$$

$$+\varepsilon^3\left(B_3+\omega_0\frac{\partial a_3}{\partial\theta}+B_1\frac{\partial a_2}{\partial b}+\phi_1\frac{\partial a_2}{\partial\theta}+B_2\frac{\partial a_1}{\partial b}+\phi_2\frac{\partial a_1}{\partial\theta}\right)+\cdots$$

$$\dot{\psi}=\dot{b}\left(\varepsilon\frac{\partial\psi_1}{\partial b}+\varepsilon^2\frac{\partial\psi_2}{\partial b}+\cdots\right)+\dot{\theta}\left(1+\varepsilon\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}+\varepsilon^2\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta}+\cdots\right)$$

$$=\omega_0+\varepsilon\left(\omega_0\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}+\phi_1\right)+\varepsilon^2\left(\omega_0\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta}+\phi_2+B_1\frac{\partial\psi_1}{\partial b}+\phi_1\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\right)$$

$$+\varepsilon^3\left(\omega_0\frac{\partial\psi_3}{\partial\theta}+\phi_3+B_1\frac{\partial\psi_2}{\partial b}+\phi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta}+B_2\frac{\partial\psi_1}{\partial b}+\phi_2\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\right)+\cdots$$

把上两式代入(1.2.5)左端,把 $\sin\psi$,$\cos\psi$ 和 $f(a,\psi)$ 的展开式代入(1.2.5)右端,并利用(1.2.6a)求出

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\varepsilon\frac{a_1}{b^2}-\varepsilon^2\left(\frac{a_2}{b^2}-\frac{a_1^2}{b^3}\right)+\cdots$$

再把它代入(1.2.5)中的第二个式子.由于方程左右 ε 同阶幂系数相等,得下列 a_i,ψ_i 的各阶求解方程.

$$\varepsilon:\qquad \omega_0\frac{\partial a_1}{\partial\theta}+B_1=-\frac{1}{\omega_0}\sin\theta f(b,\theta)$$

$$\omega_0\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}+\phi_1=-\frac{1}{\omega_0 b}\cos\theta f(b,\theta)\tag{1.2.8a}$$

$$\varepsilon^2:\qquad \omega_0\frac{\partial a_2}{\partial\theta}+B_2=-B_1\frac{\partial a_1}{\partial b}-\phi_1\frac{\partial a_1}{\partial\theta}$$

$$-\frac{1}{\omega_0}\left[\psi_1\cos\theta f(b,\theta)+\sin\theta\left(\frac{\partial f(b,\theta)}{\partial b}a_1+\frac{\partial f(b,\theta)}{\partial\theta}\psi_1\right)\right]\tag{1.2.8b}$$

$$\omega_0\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta}+\phi_2=-B_1\frac{\partial\psi_1}{\partial b}-\phi_1\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}+\frac{a_1}{b^2\omega_0}f(b,\theta)\cos\theta+$$

$$\frac{1}{b\omega_0}\psi_1\sin\theta f(b,\theta)-\frac{1}{b\omega_0}\cos\theta\cdot\left(\frac{\partial f(b,\theta)}{\partial b}a_1+\frac{\partial f(b,\theta)}{\partial\theta}\psi_1\right)$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^3:\ \omega_0 \frac{\partial a_3}{\partial \theta} + B_3 = & - B_1 \frac{\partial a_2}{\partial b} - B_2 \frac{\partial a_1}{\partial b} - \phi_1 \frac{\partial a_2}{\partial \theta} - \phi_2 \frac{\partial a_1}{\partial \theta} \\
& - \frac{1}{\omega_0}\left[\psi_2 \cos\theta f(b,\theta) + \sin\theta \left(\frac{\partial f(b,\theta)}{\partial b} a_2 + \frac{\partial f(b,\theta)}{\partial \theta} \psi_2 \right) \right. \\
& + \psi_1 \cos\theta \left(\frac{\partial f(a,\theta)}{\partial b} a_1 + \frac{\partial f(b,\theta)}{\partial \theta} \psi_1 \right) + \frac{1}{2} \sin\theta \left(\frac{\partial^2 f(b,\theta)}{\partial b^2} a_1^2 \right. \\
& \left. \left. + 2 \frac{\partial^2 f(b,\theta)}{\partial b \partial \theta} a_1 \psi_1 + \frac{\partial^2 f(b,\theta)}{\partial \theta^2} \psi_1^2 \right) \right] + \frac{1}{2\omega_0} \psi_1^2 f(b,\theta) \sin\theta
\end{aligned}
\tag{1.2.8 c}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_0 \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} + \phi_3 = & - B_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial b} - B_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial b} - \phi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} - \phi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} + \frac{1}{b\omega_0} \\
& \cdot \left[\psi_2 \sin\theta f(b,\theta) - \cos\theta \left(\frac{\partial f(b,\theta)}{\partial b} a_2 + \frac{\partial f(b,\theta)}{\partial \theta} \psi_2 \right) + \psi_1 \sin\theta \right. \\
& \cdot \left(\frac{\partial f(b,\theta)}{\partial b} a_1 + \frac{\partial f(b,\theta)}{\partial \theta} \psi_1 \right) \\
& \left. - \frac{1}{2} \cos\theta \left(\frac{\partial^2 f(b,\theta)}{\partial b^2} a_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f(b,\theta)}{\partial b \partial \theta} a_1 \psi_1 + \frac{\partial^2 f(b,\theta)}{\partial \theta^2} \psi_1^2 \right) \right] \\
& + \left(\frac{a_2}{b^2} - \frac{a_1^2}{b^3} + \frac{\psi_1^2}{2b} \right) \frac{1}{\omega_0} \cos\theta f(b,0) \\
& + \left(\frac{a_1}{b^2 \omega_0} \right) \left[\cos\theta \left(\frac{\partial f(b,\theta)}{\partial b} a_1 + \frac{\partial f(b,\theta)}{\partial \theta} \psi_1 \right) - \sin\theta \psi_1 f(b,\theta) \right]
\end{aligned}
$$

方程右端函数均为已知或已由前级方程求出,因此可把右端函数分为长周期项 $F^{(l)}$ 和短周期项 $F^{(s)}$,其各级递推的方程记为

$$
\varepsilon^n: \qquad \omega_0 \frac{\partial a_n}{\partial \theta} + B_n = F_n^{(l)} + F_n^{(s)}
$$

$$
\omega_0 \frac{\partial \psi_n}{\partial \theta} + \phi_n = G_n^{(l)} + G_n^{(s)}
$$

可以选择 B_n , ϕ_n 仅等于长周期项,即

$$B_n = F_n^{(l)}, \ \phi_n = G_n^{(l)}$$

而余下部分为

$$\omega_0 \frac{\partial a_n}{\partial \theta} = F_n^{(s)}, \ \omega_0 \frac{\partial \psi_n}{\partial \theta} = G_n^{(s)}$$

以上四个方程可依次求出(1.2.6) 和(1.2.7) 中的四个待定函数 B_n , ϕ_n , a_n 和 ψ_n .

例 1.2.2 用平均法解 Duffing 方程(1.1.4),

$$\ddot{x} + x = -\varepsilon x^3 \quad (\omega_0 = 1)$$

解 $f(b, \theta) = -b^3 \cos^3 \theta$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = -3b^2 \cos^3 \theta, \ \frac{\partial f}{\partial \theta} = 3b^3 \cos^2 \theta \sin \theta$$

代入(1.2.8a),得方程 $O(\varepsilon)$

$$\frac{\partial a_1}{\partial \theta} + B_1 = b^3 \cos^3 \theta \sin \theta$$

$$= \frac{1}{8} b^3 (2\sin 2\theta + \sin 4\theta) \qquad (1.2.9a)$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} + \phi_1 = b^2 \cos^4 \theta$$

$$= \frac{1}{8} b^2 (3 + 4\cos 2\theta + \cos 4\theta) \qquad (1.2.9b)$$

使(a),(b) 中长周期项分别与 B_1 , ϕ_1 相等,可得

$$B_1 = 0, \ \phi_1 = \frac{3}{8} b^2$$

由(a),(b) 余下的项,积分可解得 a_1 , ψ_1

$$a_1 = \frac{-1}{8} b^3 \left(\cos 2\theta + \frac{1}{4} \cos 4\theta \right)$$

$$\psi_1 = \frac{1}{8} b^2 \left(2\sin 2\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta \right)$$

将 a_1 ,ψ_1 ,β_1 ,ϕ_1 代入(1.3.8),可得 $O(\varepsilon^2)$ 方程

$$\frac{\partial a_2}{\partial \theta} + B_2 = -\frac{1}{512} b^5 (82\sin 2\theta + 16\sin 4\theta$$

$$- 18\sin 6\theta - \sin 8\theta) \tag{1.2.9c}$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \phi_2 = -\frac{1}{256} b^4 (15 + 100\cos 2\theta + 2\cos 4\theta$$

$$- 12\cos 6\theta - \cos 8\theta) \tag{1.2.9d}$$

分别取(c),(d) 中右端长周期项与左端 B_2 ,ϕ_2 相等,得

$$B_2 = 0, \quad \phi_2 = -\frac{15}{256} b^4$$

对(c),(d) 中余下的项积分,得

$$a_2 = \frac{6^5}{512} \left(41 \cos 2\theta + 4\cos 4\theta - 3\cos 6\theta - \frac{1}{8} \cos 8\theta \right)$$

$$\psi_2 = -\frac{b^4}{256} \left(50 \sin 2\theta + \frac{1}{2} \sin 4\theta - 2\sin 6\theta - \frac{1}{8} \sin 8\theta \right)$$

所以 Duffing 方程二阶近似解为

$$x = a\cos \psi$$

其中

$$a = b - \frac{\varepsilon}{8} b^3 \left(\cos 2\theta + \frac{1}{4} \cos 4\theta \right) + \frac{\varepsilon^2}{512} b^5 \left(41\cos 2\theta + 4\cos 4\theta \right.$$

$$\left. - 3\cos 6\theta - \frac{1}{8} \cos 2\theta \right) + O(\varepsilon^3)$$

$$\psi = \theta + \frac{\varepsilon}{8} b^2 \left(2\sin 2\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta \right) - \frac{\varepsilon^2}{256} \left(50\sin 2\theta + \frac{1}{2}\sin 4\theta - 2\sin 6\theta - \frac{1}{8}\sin 8\theta \right) + O(\varepsilon^3)$$

将 B_1, B_2, ϕ_1, ϕ_2 代入(1.2.7),积分则得

$$b = b_0$$

$$\theta = \left(1 - \frac{3\varepsilon}{8} b^2 - \frac{15\varepsilon^2}{256} b^4 \right) t + \theta_0$$

b_0, θ_0 皆由初始条件决定,其中,频率

$$\omega_0 = 1 + \frac{3\varepsilon}{8} b^2 - \frac{15\varepsilon^2}{256} b^4 + O(\varepsilon^3)$$

由此可知,由于非线性刚度影响,系统自由振动周期解中有高次谐波出现.振动频率与振幅有关或者说与初始条件有关.这些是非线性系统自由振动与线性系统自由振动的重要的不同之处.

继续计算下去,可得到所需要的任意阶精度的解.

§1.3 KBM 法(渐近法)

这种方法的基本思想是根据弱非线性系统中振动的拟简谐性质来寻求相应的具有渐近性质的级数解. 这个方法是由 Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky(Митропольский,Ю.А.)共同提出的,故称 KBM 方法[5,6].

1.3.1 渐近解的一般形式

设在外周期力作用下,弱非线性系统强迫振动方程可表示为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(\Omega t, x, \dot{x}) \tag{1.3.1}$$

式中 Ω 为外周期力的常数频率.这时,系统是非自治的.

当 $\varepsilon = 0$ 时,系统是线性的,振动是简谐的.当 $\varepsilon \neq 0$ 时,考虑

解除具有主谐波外还有微小的高次谐波项，可设解为

$$x = a\cos\psi + \varepsilon x_1(a, \psi, \Omega t) + \varepsilon^2 x_2(a, \psi, \Omega t) + \cdots \tag{1.3.2a}$$

其中各 $x_i(a, \psi, \Omega t)$ 是两个角度量 $\psi, \Omega t$ 的周期函数，周期为 2π. 对自治系统，变量 $\Omega t \equiv 0$.

考虑到弱非线性项的影响，主谐波的振幅和相位是时间慢变函数，可由下面按 ε 幂级数展开形式的微分方程决定，即

$$\dot{a} = \varepsilon a_1(a) + \varepsilon^2 a_2(a) + \cdots \tag{1.3.2b}$$

$$\dot{\psi} = \omega_0 + \varepsilon\omega_1(a) + \varepsilon^2 \omega_2(a) + \cdots$$

这里 a_i，ω_i 都是主谐波振幅 a 的函数. 需要说明的是这种表示只适用于自治系统和非自治系统强迫振动中的非共振情况. 而对于共振情况这种表示是不够的，因为在共振情况，激振力和强迫振动的相位差 θ 也对振幅和频率都有很大影响，所以 a_{i_1}，ω_i 是 a, θ 的二元函数. 对于共振情况，后面将另行推导.

可见 KBM 法是把解展成三个级数来求，又称三级数法. 求解方程(1.3.1) 的过程，就是要决定函数 $x_i(a, \psi, \Omega t)$ 和选择函数 $a_i(a)$，$\omega_i(a)$（$i = 1, 2, \cdots$），使得由(1.3.2b) 求得的 a 和 ψ 代入(1.3.2a) 后能满足原方程. 为了唯一地确定函数 a_i，ω_i，应保证使 x_i 为 ψ 和 Ωt 的周期函数，还应使 x_i 中不存在 ψ 的一次谐波，以避免永年项出现.

具体过程是把(1.3.2a,b) 所表示的关系式代入(1.3.1) 的左端，同时将(1.3.1) 右端函数按 ε 的幂级数展开，比较两端 ε 同次幂系数，可得一组渐近的线性方程组，于是可依次求解. 为此，由(1.3.2a) 对 t 求导后代入(1.3.1) 左端，并考虑(1.3.2b)，则可得

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi^2}\omega_0^2 + \omega_0^2 x_1 + \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial \psi \partial t} - 2a\omega_0\omega_1\cos\psi\right.$$

$$-2\omega_0 a_1\sin\psi\Big) + \varepsilon^2\Big[\frac{\partial^2 x_2}{\partial\psi^2}\omega_0^2 + \omega_0^2 x_2 + \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 x_2}{\partial\psi\partial t}$$

$$-2a\omega_0\omega_2\cos\psi - 2\omega_0 a_2\sin\psi + \left(a_1\frac{da_1}{da} - a\omega_1^2\right)\cos\psi$$

$$-\left(aa_1\frac{d\omega_1}{da} + 2a_1\omega_1\right)\sin\psi + 2\omega_0 a_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial a\partial\psi} + 2\omega_0\omega_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial\psi^2}$$

$$+2\frac{\partial^2 x_1}{\partial a\partial t}a_1 + 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial\psi\partial t}\omega_1\Big] + \varepsilon^3[\cdots] + \cdots \qquad (1.3.3a)$$

$\varepsilon f(x,\dot{x},\Omega t)$ 在 $x_0 = a\cos\psi$，$\dot{x}_0 = -a\omega_0\sin\psi$ 处展开，有

$$\varepsilon f(x,\dot{x},\Omega t) = \varepsilon f(x_0,\dot{x}_0,\Omega t) + \varepsilon^2\Big[\frac{\partial f(x_0,\dot{x}_0,\Omega t)}{\partial x}x_1$$

$$+\frac{\partial f(x_0,\dot{x}_0,\Omega t)}{\partial\dot{x}}\times\left(a_1\cos\psi - a\omega_1\sin\psi + \frac{\partial x_1}{\partial\psi}\omega_0 + \frac{\partial x_1}{\partial t}\right)\Big]$$

$$+O(\varepsilon^3) \qquad (1.3.3b)$$

比较(1.3.3)两式的 ε 的系数，得下列微分方程组：

$$\omega_0^2\frac{\partial^2 x_1}{\partial\psi^2} + \omega_0^2 x_1 = f_0(a,\varphi,\Omega t) + 2a\omega_0\omega_1\cos\psi$$

$$+2\omega_0 a_1\sin\psi + G_1(a,\psi,\Omega t) \qquad (1.3.4a)$$

$$\omega_0^2\frac{\partial^2 x_2}{\partial\psi^2} + \omega_0^2 x_2 = x_1\frac{\partial f(a,\psi,\Omega t)}{\partial x} + \Big(a_1\cos\psi - a\omega_1\sin\psi$$

$$+\frac{\partial x_1}{\partial\psi}\omega_0\Big)\frac{\partial f(a,\psi,\Omega t)}{\partial\dot{x}} + \left(2\omega_1 a_1 + aa_1\frac{d\omega_1}{da}\right)\sin\psi +$$

$$\left(\omega_1^2 a - a_1\frac{da_1}{da}\right)\cos\psi + 2\omega_0 a_2\sin\psi + 2\omega_0\omega_2 a\cos\psi -$$

$$2\omega_0 a_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial a\partial\psi} - 2\omega_0\omega_1\frac{\partial^2 x}{\partial\psi^2} + G_2(a,\psi,\Omega t) \qquad (1.3.4b)$$

……

其中

$$G_1(a,\psi,\Omega t) = -2\omega_0\frac{\partial^2 x_1}{\partial\psi\partial t} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}$$

$$G_2(a,\psi,\Omega t) = -2\omega_0\frac{\partial^2 x_2}{\partial\psi\partial t} - \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \frac{\partial x_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial f(a,\psi,\Omega t)}{\partial\dot{x}}$$

$$-2a_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial a\partial t}-2\omega_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial\psi\partial t}$$

对于自治系统，$G_i(a,\psi,\Omega t)(i=1,2,\cdots)$函数自动为零.依次求解上面各方程,并利用 x_i 是周期解来消除永年项,从而定出各 a_i，ω_i.下面针对具体问题中的 $f(x,\dot{x},\Omega t)$ 求解.

1.3.2 自治系统

对于自治系统，没有明显依赖于时间的外周期力，体现在(1.3.4)中，$\Omega=0$，$G_i(a,\psi,\Omega t)=0$.

例 1.3.1 求 van der Pol 方程 $\ddot{x}+x=\varepsilon(1-x^2)\dot{x}$ 的二阶近似解.

这里 $f(x,\dot{x})=(1-x^2)\dot{x}$.计算

$$f_0(a,\psi)=f(x_0,\dot{x}_0)=(1-x_0^2)\dot{x}_0=a^3\cos^2\psi\sin\psi-a\sin\psi$$

$$\frac{\partial f_0(a,\psi)}{\partial x}=-2x_0\dot{x}_0=2a^2\cos\psi\sin\psi=a^2\sin2\psi$$

$$\frac{\partial f_0(a,\psi)}{\partial\dot{x}}=1-x_0^2=1-a^2\cos^2\psi$$

代入(1.3.4a)得

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial\psi^2}+x_1=\left[2a_1-a\left(1-\frac{a^2}{4}\right)\right]\sin\psi+2\omega_1 a\cos\psi+\frac{1}{4}a^3\sin^3\psi$$

消除永年项得

$$a_1=\frac{1}{2}a\left(1-\frac{a^2}{4}\right)$$

$$\omega_1=0$$

一阶渐近解

$$x_1 = -\frac{a^3}{32}\sin 3\psi$$

代入(1.3.4b)得

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \psi^2} + x_2 = 2a_2\sin\psi + \left[2a\omega_2 - a\frac{da_1}{da} + \left(1 - \frac{3}{4}a^2\right)a_1 + \frac{a^5}{128}\right]\cos\psi + \frac{a^3(a^2+8)}{128}\cos 3\psi + \frac{5}{128}a^5\cos 5\psi$$

同理可得

$$a_2 = 0$$

$$\omega_2 = \frac{a_1}{2a}\left(\frac{da_1}{da} - 1 + \frac{3}{4}a^2\right) - \frac{a^4}{256} = -\frac{1}{8}\left(1 - a^2 + \frac{7}{32}a^4\right)$$

$$x_2 = -\frac{5a^5}{3072}\cos 5\psi - \frac{a^3(a^2+8)}{1024}\cos 3\psi$$

于是原方程的二阶近似解为

$$x = a\cos\psi - \varepsilon\frac{a^3}{32}\sin 3\psi - \varepsilon^2\frac{a^3}{1024}\left[\frac{5}{3}a^2\cos 5\psi + (a^2+8)\cos 3\psi\right] \tag{1.3.5a}$$

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon}{2}a\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)$$

$$\dot{\psi} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{8}\left(1 - a^2 + \frac{7}{32}a^4\right)$$

积分

$$a = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1\right)e^{-\varepsilon t}}} \tag{1.3.5b}$$

$$\psi = \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{16}\right)t - \frac{\varepsilon}{8}\ln|a| + \frac{7\varepsilon}{64}a^2 + \varphi_0 \tag{1.3.5c}$$

a_0, φ_0 由初始条件决定.

由结果(1.3.5b)看到,若初始值 $a_0 = 0$,则无论 t 为何值,都有 $x = 0$,即对应系统静平衡状态;若初始值 $a_0 \neq 0$,则当 $t \to \infty$ 时,$a \to 2$,即系统趋于稳态的周期运动.事实上,偶然扰动不可避免,可令 $a_0 \neq 0$,尽管 a_0 数值很小,a 总将单调增加直到趋近于2.因而这种系统由静止状态受到偶然扰动的激发而自动到达定常振动,这就是自激振动系统.

由式(1.3.5a,b,c)得稳态周期运动近似解为

$$x = 2\cos(\omega t + \varphi_0) - \frac{\varepsilon}{4}\sin 3(\omega t + \varphi_0) + \cdots \quad (1.3.5\mathrm{d})$$

式中 $\omega = 1 - \frac{1}{16}\varepsilon^2 + \cdots$ 是自激振动频率.式(1.3.5d)表明,自激振动中有高次谐波项,仍是拟简谐运动.

1.3.3 非自治系统

当非线性系统(1.3.1)的右端显含 t 时,称为非自治的.由强迫振动理论知,在共振状态响应与外激励间的相位差与系统能量的聚积或散失直接相关,因而这个相位差对振幅、频率的变化有根本影响,但在非共振状态这种影响则极小,所以我们对非共振、共振情况分别讨论.

非线性系统的共振条件显然会比线性系统复杂.在1.3.1节中推导渐近解一般形式时,要对 $\varepsilon f(x, \dot{x}, \Omega t)$ 在 x_0, $\dot{x}_0$ 附近展开,这样,展式中就出现含有 $\sin(n\Omega + m\omega_0)$ 与 $\cos(n\Omega + m\omega_0)$ 的项.这说明在干扰力中将有组合频率为 $n\Omega + m\omega_0$ 的谐波成分.当任何一个组合频率成分接近系统固有频率 ω_0,即 $n\Omega + m\omega_0 \approx \omega_0$ 时就发生共振.故非线性系统共振条件为

$$\Omega \approx \frac{q}{s}\omega_0 \quad (1.3.6)$$

其中 $q = 1 - m$, s 为正或负的互质数($m + n \geqslant 2$).

1. 非共振情况　　这时,干扰力中任何一个分量频率 $n\Omega +$

$m\omega_0$ 都不接近于 ω_0 .1.3.1节中的有关公式仍然适用.仅用具体例子说明处理方法.

例 1.3.2 求在外周期力作用下的 Duffing 方程

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=\varepsilon(F\cos\Omega t-\omega_0^2\beta x^3)$$

非共振时一般解

解 $f(x,\dot{x},\Omega t)=F\cos\Omega t-\omega_0^2\beta x^3$

因为

$$\begin{aligned} f_0(a,\psi,\Omega t) &= F\cos\Omega t-\omega_0^2\beta(a\cos\psi)^3 \\ &= F\cos\Omega t-\frac{1}{4}\omega_0^2\beta a^3(3\cos\psi+\cos 3\psi) \end{aligned}$$

代入(1.3.4a)得

$$\omega_0^2\frac{\partial^2 x_1}{\partial\psi^2}+\omega_0^2 x_1+2\omega_0\frac{\partial^2 x_1}{\partial\psi\partial t}+\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}$$

$$=2\omega_0 a_1\sin\psi-\left(\frac{3}{4}\beta\omega_0^2 a^3-2\omega_0\omega_1 a\right)\cdot\cos\psi+F\cos\Omega t$$

$$-\frac{1}{4}\beta\omega_0^2 a^3\cos 3\psi$$

为保证 x_1 是周期解,不能出现分母转为零的项,$\sin\psi$,$\cos\psi$ 的系数必须为零,即

$$2\omega_0 a_1=0$$

$$\frac{3}{4}\beta\omega_0^2 a^3-2\omega_0\omega_1 a=0$$

得

$$a_1=0$$

$$\omega_1=\frac{3}{8}\beta\omega_0 a^2$$

而

$$x_1 = \frac{F}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cos\Omega t + \frac{1}{32}\beta a^3\cos 3\psi$$

其中 a,ψ,根据(1.3.3)满足

$$\dot{a} = 0$$

$$\dot{\psi} = \omega_0 + \frac{3\varepsilon}{8}\omega_0\beta a^2$$

将上两式积分,得

$$a = a_0$$

$$\psi = \omega t + \varphi_0,\ \omega = \omega_0\left(1 + \frac{3\varepsilon}{8}\beta a_0^2\right)$$

a_0,φ_0 由初始条件决定.于是一次近似解为

$$x = a\cos\psi + \frac{\varepsilon}{32}\beta a^3\cos 3\psi + \frac{\varepsilon F}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cos\Omega t$$

结果表明,在一次近似解中,有频率为 ω 的主谐波及高次谐波的固有振动部分,也含有频率为 Ω 的稳态强迫振动部分.若再继续求二阶近似解,便会出现 $\Omega \pm 2\omega_0$ 的组合频率谐波成分了.

2.共振情况　这时,满足共振条件(1.3.6).由于 q,s 可能取不同的值,通常可分为以下几种情况:

i)主共振.当激振力频率 Ω 接近于频率 ω_0 时,即 $s = 1,q = 1$ 时,$\Omega \doteq \omega_0$.这时通常的共振,或称主共振;

ii)亚谐共振.当激振力频率接近固有频率 ω_0 的整数倍,即 $s = 1,\Omega \doteq q\omega_0$ 时,称为亚谐波共振;

iii)分数共振.当激振力频率 Ω 与固有频率 ω_0 有任意分数关系 $\Omega = \frac{q}{s}\omega_0$ 时的共振称为分数共振.

由于发生共振类别较多,所以在研究共振情况的渐近解时应明确指出是对哪类共振的渐近解.

前面已经指出,1.3.1 节的公式不适于共振情况,下面重新推导适于共振情况的渐近解共振时,有

$$\omega_0 \doteq \frac{s}{q}\Omega$$

写成等式,为

$$\omega_0^2 = \left(\frac{s}{q}\Omega\right)^2 + \varepsilon\sigma$$

式中 $\sigma = O(1)$,这样,方程(1.3.1)可写成

$$\ddot{x} + \left(\frac{s}{q}\Omega\right)^2 x = \varepsilon[f(\Omega t, x, \dot{x}) - x\sigma] \tag{1.3.7a}$$

按 KBM 法的思路,这时所设的三个级数为

$$x = a\cos\psi + \varepsilon x_1(a, \psi, \Omega t) + \varepsilon^2 x_2(a, \psi, \Omega t) + \cdots \tag{1.3.7b}$$

其中 $\psi = \frac{s}{q} + \theta$,$\theta$ 是强迫振动与外激励间的相位差.

$$\dot{a} = \varepsilon a_1(a, \theta) + \varepsilon^2 a_2(a, \theta) + \cdots \tag{1.3.7c}$$

$$\dot{\psi} = \frac{s}{q}\Omega + \varepsilon\omega_1(a, \theta) + \varepsilon^2 \omega_2(a, \theta) + \cdots \tag{1.3.7d}$$

注意到 a_i, ω_i 不仅是 a 的函数,也是相差 θ 的周期为 2π 的函数.将式(1.3.7b),(1.3.7d)改用 a, θ 而不再用 a, ψ 表示,则这三个级数写成

$$\begin{aligned} x = {} & a\cos\left(\frac{s}{q}\Omega t + \theta\right) + \varepsilon x_1\left(a, \frac{s}{q}\Omega t + \theta, \Omega t\right) + \\ & \varepsilon^2 x_2\left(a, \frac{s}{q}\Omega t + \theta, \Omega t\right) + \cdots \end{aligned} \tag{1.3.8a}$$

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon a_1(a, \theta) + \varepsilon^2 a_2(a, \theta) + \cdots \\ \dot{\theta} &= \varepsilon\omega_1(a, \theta) + \varepsilon^2 \omega_2(a, \theta) + \cdots \end{aligned} \tag{1.3.8b}$$

经过和上面类似的演算过程,则得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \left(\frac{s}{q}\Omega\right)^2 x_1 = {} & f(x_0, \dot{x}_0, \Omega t) + 2\frac{s}{q}\Omega a_1 \sin\left(\frac{s}{q}\Omega t + \theta\right) \\ & + 2a\frac{s}{q}\Omega\omega_1 \cos\left(\frac{s}{q}\Omega t + \theta\right) - a\sigma\cos\left(\frac{s}{q}\Omega t + \theta\right) \end{aligned} \tag{1.3.9a}$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2}+\left(\frac{s}{q}\Omega\right)^2 x_2=\frac{\partial f(x_0,\dot{x}_0,\Omega t)}{\partial x_0}x_1+\frac{\partial f(x_0,\dot{x}_0,\Omega t)}{\partial \dot{x}}$$

$$\cdot\left[a_1\cos\left(\frac{s}{q}\Omega t+\theta\right)-a\omega_1\sin\left(\frac{s}{q}\Omega t+\theta\right)+\frac{\partial x_1}{\partial t}\right]-x_1\sigma-2a_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial a\partial t}$$

$$-2\omega_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial\theta\partial t}+\left(2\frac{s}{q}\Omega a_2+a\frac{\partial\omega_1}{\partial a}a_1+a\frac{\partial\omega_1}{\partial\theta}\omega_1+2a_1\omega_1\right)$$

$$\cdot\sin\left(\frac{s}{q}\Omega t+\theta\right)+\left(2a\frac{s}{q}\Omega\omega_2-\frac{\partial a_1}{\partial a}a_1-\frac{\partial a_1}{\partial\theta}\omega_1+a\omega_1^2\right)$$

$$\cdot\cos\left(\frac{s}{q}\Omega t+\theta\right)\tag{1.3.9b}$$

………

式中$\frac{\partial f(x_0,\dot{x}_0,\Omega t)}{\partial x}$，$\frac{\partial f(x_0,\dot{x}_0,\Omega t)}{\partial \dot{x}}$分别代表$\frac{\partial f}{\partial x}$和$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}$在$x_0$，$\dot{x}_0$处的值.式(1.3.9)可依次求解各$x_i$（$i=1,2,\cdots$）为保证$x_i$为周期解消除永年项，仍可令$\cos\left(\frac{s}{q}\Omega t+\theta\right)$，$\sin\left(\frac{s}{q}\Omega t+\theta\right)$的系数为零而确定出$a_i$，$\theta_i$.以下通过具体例子讨论几种重要的共振情况.

(1) 主共振

例 1.3.3 有阻尼 Duffing 方程在简谐激励下强迫振动，方程为

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=\varepsilon(F\cos\Omega t-2\zeta\omega_0\dot{x}-\beta\omega_0^2 x^3)$$

式中$\psi=\Omega t+\theta$，将上式代入(1.3.9a)，并利用$\cos\Omega t=\cos(\psi-\theta)=\cos\psi\cos\theta+\sin\psi\sin\theta$，得

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}+\Omega^2 x_1=\left(F\cos\theta-\frac{3}{4}\beta\omega_0^2 a^3+2a\Omega\omega_1-a\sigma\right)\cos\psi$$

$$+(F\sin\theta+2\zeta\omega_0\Omega a+2\Omega a_1)\sin\psi-\frac{1}{4}(\beta\omega_0^2 a^3\cos 3\psi)\tag{1.3.10a}$$

为保证x_1为周期解，必须$\cos\psi$，$\sin\psi$的系数为零

$$F\cos\theta - \frac{3}{4}\beta\omega_0^2 a^3 + 2a\Omega\omega_1 - a\sigma = 0$$

$$F\sin\theta + 2\zeta\omega_0 \Omega a + 2\Omega a_1 = 0$$

得

$$a_1 = \frac{1}{2\Omega}(-2\zeta\omega_0 \Omega a - F\sin\theta)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2\Omega a}\left(\frac{3}{4}\beta\omega_0^2 a^3 + a\sigma - F\cos\theta\right)$$

而由式(1.3.10a)解得

$$x_1 = \frac{1}{32}\beta a^3 \cos 3\psi$$

于是原方程的一次近似解为

$$x = a\cos(\Omega t + \theta) + \frac{1}{32}\varepsilon\beta a^3 \cos 3(\Omega t + \theta) \quad (1.3.10b)$$

式中的 a 和 θ,根据式(1.3.8b)表示为

$$\dot{a} = \frac{1}{2\Omega}(-2\varepsilon\zeta\omega_0 \Omega a - \varepsilon F\sin\theta)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2\Omega a}\left\{\left[\omega_0^2\left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon\beta - a^2\right) - \Omega^2\right]a - \varepsilon F\cos\theta\right\} \quad (1.3.10c)$$

对式(1.3.10c)直接积分求 a,θ,一般有困难.但从物理上看,当 $\dot{a}\neq 0$,$\dot{\theta}\neq 0$ 时,求得的振幅 a,相差 θ 都是时间函数,这时对应的解 x 是瞬态过程解;当 $\dot{a}=0$,$\dot{\theta}=0$ 时,a,θ 都是不变量,对应于定常振动(周期振动).下面,仅考虑周期解的情况,这时式(1.3.10c)变成

$$2\varepsilon\zeta\omega_0 \Omega a + \varepsilon F\sin\theta = 0$$

$$\left[\omega_0^2\left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon\beta a^2\right) - \Omega^2\right]a - \varepsilon F\cos\theta = 0 \quad (1.3.10d)$$

由式(1.3.10d)得

$$a^2\left\{\left[\left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon\beta a^2\right) - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[2\varepsilon\zeta\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)\right]^2\right\} = \left(\frac{\varepsilon F}{\omega_0^2}\right)^2$$

(1.3.10e)

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{-2\varepsilon\zeta\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)}{\left(1+\frac{3}{4}\varepsilon\beta a^2\right)-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2} \tag{1.3.10f}$$

给定 $\varepsilon\beta$, $\varepsilon\zeta$ 和 $\varepsilon F/\omega_0^2$，由式(1.3.10e)可做出 $a-\frac{\Omega}{\omega_0}$ 曲线，即振幅-频率响应曲线，如图 1.3.1 所示．由式(1.3.10f)可做出 $\theta-\frac{\Omega}{\omega_0}$ 曲线，即相位-频率响应曲线，如图 1.3.2 所示．

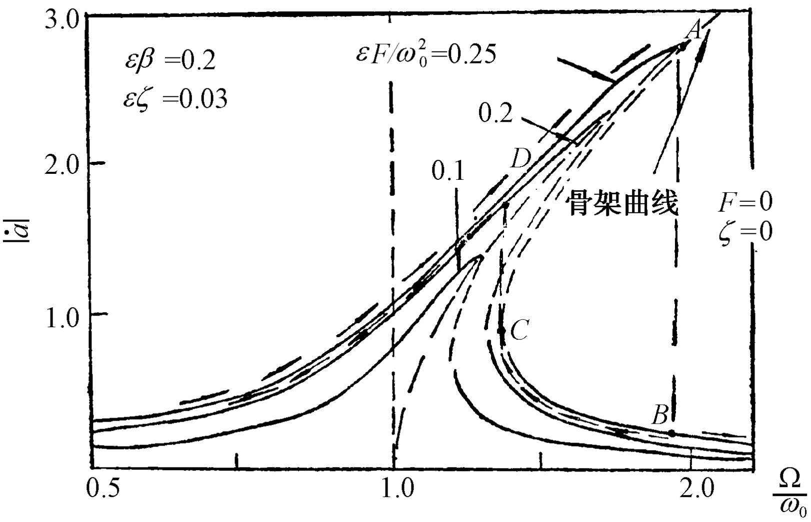

图 1.3.1

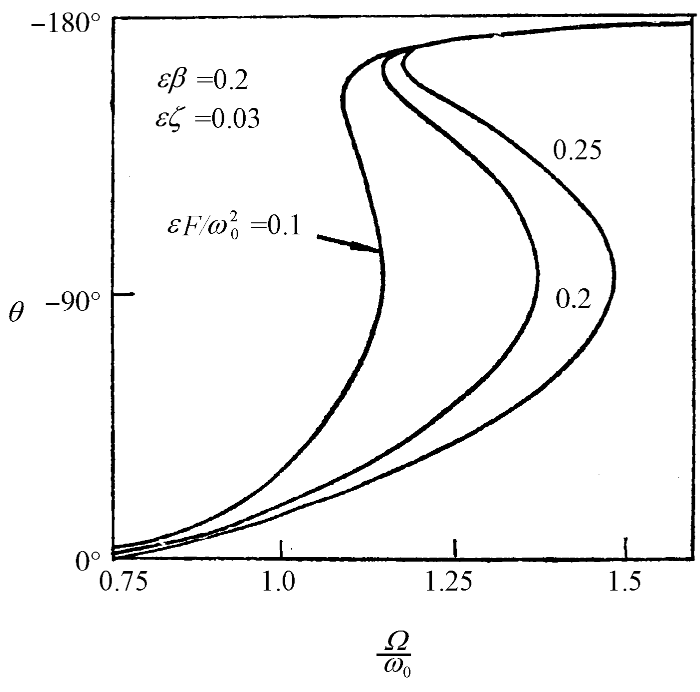

图 1.3.2