

科学版研究生教学丛书

常微分方程定性及稳定性方法

马知恩 周义仓 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是为应用数学专业的硕士生和高年级本科生所编写的一本教材. 主要包括定性理论、稳定性理论和分支理论三个部分. 内容着眼于应用的需要, 取材精练, 注意概念实质的揭示、定理思路的阐述、应用方法的介绍和实际例子的分析, 并配合内容引入了计算机软件. 章后附有习题.

本书可作为理工科专业研究生的教材和高年级本科生的选修课教材, 也可供相关的科学技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程定性方法与稳定性方法/马知恩, 周义仓编著. —北京: 科学出版社, 2001. 8

(科学版研究生教学丛书)

ISBN 7-03-009541-3

I. 常… II. ①马…②周… III. 常微分方程—高等学校—教材
IV. O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 039770 号

责任编辑: 林 鹏 陈玉琢 赵 靖/责任校对: 曹锐军

责任印制: 安春生/封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 8 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2005 年 8 月第三次印刷 印张: 20

印数: 6 001—7 500 字数: 328 000

定价: 32.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

前 言

微分方程在实际中有着广泛的应用,凡是与变化率有关的问题几乎都可以用微分方程模型来研究.为了弄清一个实际系统随时间变化的规律,需要讨论微分方程解的性态,通常有三种主要的方法:(1)求出方程的解析解(包括级数形式的解);(2)求方程的数值解;(3)对解的性态进行定性分析.三种方法各有其特点和局限性.在对方程的研究中它们相互补充、相辅相成.本书介绍定性分析的基本理论和方法,也就是不求解微分方程而研究时间趋于无穷时解的渐近性态.其内容包括定性理论、稳定性理论和分支理论三个部分.

定性分析方面国内外已有不少很好的教材和专著,但面对非常微分方程专门化的应用数学专业的硕士生和高级本科生,在当前有限的学时内尚难找到合适的教材.本书正是为适应这一需要而编写的.在编写中我们力求反映以下特色:

1. 从应用的需要出发精选内容

本书在讲清基本概念的基础上,取材着眼于应用中常见的一些方法及其必要的理论基础.将某些繁难的证明略去而突出这些理论和方法的涵义和应用.例如,中心与焦点的判定只讲形式级数法,着重讲清方法的证明思路和使用步骤,未作完整的严格证明;对高阶奇点的第一、二类判定问题仅在解析条件下给出结论;仅给出一些实用的中心流形定理,显示它们的应用而略去其证明等.

2. 加强定性理论、稳定性理论和分支理论三部分的相互渗透

本书在精选内容的基础上仍分章保持着定性理论(包括平面与空间)、稳定性理论和分支理论各自的基本体系,但在内容的叙述和方法的使用方面相互配合、相互渗透.例如,用 Liapunov 函数法帮助判定某些中心或焦点,讲解平面闭轨线族的极限环分支;将旋转向量场纳入分支理论中讲授等.

3. 突出概念的实质和内容思想方法的揭示

本书力求总结作者多年来在研究生和数学系本科生教学中对本门课程讲授的经验体会,揭示概念的实质,分析定理证明和方法应用的思路,期望能有助于提高读者的数学素质和培养读者的创新研究能力.

4. 加强应用

本书专门列了一章微分方程应用举例.在不同领域内挑选了几个实例从建立模型、定性分析到结果的实际意义都进行了较系统地讲解,在其它有关章节中也穿插了一些实例分析.期望能引起读者的应用兴趣,有助于应用意识和

能力的培养.

5. 注意了与计算机使用的结合

本书在基本理论和方法的应用与计算机的数值计算和符号运算功能的有机结合方面进行了一些探索,例如利用计算机显示一些系统的轨线分布图;利用符号运算功能来计算焦点量等.为了使读者更方便地应用 Maple 软件解决微分方程定性、稳定性分析中的问题,我们在相应的地方都给出了 Maple 程序,对这些程序稍加修改,就可以解决更一般的问题.

本书的第一、二、四、五、六章由马知恩执笔,第三、七、八、九章由周义仓执笔,Maple 程序由周义仓调试.全书在内容的编排、叙述和文字符号的处理上被多次讨论并统一协调.限于编者水平,难免有错误与不妥之处,恕望得到广大读者的批评指正.

作 者

2001.2.12

目 录

第一章 基本定理	1
§ 1.1 解的存在惟一性定理	1
§ 1.2 解的延拓	3
§ 1.3 解对初值和参数的连续依赖性和可微性	9
§ 1.4 比较定理	12
习题 1	17
第二章 动力系统的基本知识	19
§ 2.1 自治系统与非自治系统	19
§ 2.2 轨线的极限集合	24
§ 2.3 平面上的极限集	29
§ 2.4 极限集的应用实例	36
习题 2	40
第三章 稳定性理论	41
§ 3.1 稳定性的定义和例子	41
§ 3.2 自治系统零解的稳定性	46
§ 3.3 非自治系统的稳定性	51
§ 3.4 全局稳定性	59
§ 3.5 线性系统及其扰动系统的稳定性	65
§ 3.6 Liapunov 函数的构造	78
§ 3.7 稳定性中的比较方法	92
习题 3	96
第四章 平面系统的奇点	99
§ 4.1 初等奇点	99
§ 4.2 中心与焦点的判定	112
§ 4.3 高阶奇点	128
§ 4.4 旋转数与指数	148
习题 4	153
第五章 极限环	155
§ 5.1 基本概念与极限环的不存在性	155
§ 5.2 极限环的存在性	162

§ 5.3 后继函数与极限环的稳定性	172
§ 5.4 极限环的惟一性	176
习题 5	183
第六章 无穷远奇点与全局结构	185
§ 6.1 无穷远奇点	185
§ 6.2 轨线的全局结构分析举例	196
习题 6	203
第七章 高维系统的奇点分析	204
§ 7.1 线性系统的奇点	204
§ 7.2 稳定流形定理	210
§ 7.3 拓扑等价与 Hartman-Grobman 定理	217
§ 7.4 中心流形定理	223
§ 7.5 临界情况下奇点的稳定性分析	229
习题 7	235
第八章 分支理论	238
§ 8.1 奇点分支	238
§ 8.2 平面上的 Hopf 分支	244
§ 8.3 高维 Hopf 分支	253
§ 8.4 从平面闭轨线族分支周期解的 Liapunov 第二方法	260
§ 8.5 从闭轨线族分支周期解的隐函数定理法	269
§ 8.6 从闭轨线族产生的空间周期解	275
§ 8.7 从奇异闭轨线分支的极限环	280
§ 8.8 周期系统的分支	286
习题 8	292
第九章 微分方程应用举例	294
§ 9.1 非线性振动	294
§ 9.2 传染病模型	296
§ 9.3 三分子反应模型	300
§ 9.4 综合国力的微分方程模型	305
习题 9	308
参考文献	310

第一章 基本定理

本章将介绍常微分方程解的一些基本定理,它们是本书的理论基础.其中有些定理在常微分方程的一般教程中已有论述.这里我们再作复习、补充和提高.

§ 1.1 解的存在惟一性定理

在大部分常微分方程教材中,解的存在惟一性定理是采用逐步逼近的近似解序列方法加以证明的.这种方法有其直观、实用的优点,但步骤复杂.下面我们对一般的向量微分方程,采用较高的观点,给出一个简捷的证明.

定理 1.1(存在惟一性定理) 考虑 Cauchy 问题^①:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

其中 x 为 R^n 中的向量, f 是实变量 t 和 n 维向量 x 的 n 维向量值函数.若 $f(t, x)$ 在开区域 $G \subseteq R \times R^n$ 中满足下列条件:

- 1) f 在 G 内连续,简记为 $f \in C(G)$;
- 2) f 关于 x 满足局部 Lipschitz 条件,即对于点 $P_0(t_0, x^0) \in G$, $\exists$

$$G_0 = \{(t, x) \mid |t - t_0| \leq a, \|x - x^0\| \leq b\} \subset G$$

和依赖于 P_0 点的常数 L_{P_0} ,使得 $\forall (t, x^1), (t, x^2) \in G_0$ 有不等式

$$\|f(t, x^1) - f(t, x^2)\| \leq L_{P_0} \|x^1 - x^2\| \quad (1.1.2)$$

成立,其中 $\|\cdot\|$ 表示欧氏范数.

则 Cauchy 问题(1.1.1)在区间 $|t - t_0| \leq h^*$ 上存在惟一的解.其中

$$0 < h^* < \min\left(h, \frac{1}{L_{P_0}}\right), \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right),$$

$$M = \max_{(t, x) \in G_0} \|f(t, x)\|. \quad (1.1.3)$$

证 容易看出,在区间 $|t - t_0| \leq h^*$ 上 Cauchy 问题(1.1.1)等价于积分方程

^① 求微分方程适合给定初始条件的解的问题称为 Cauchy 问题或称初值问题.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau)) d\tau, \quad |t - t_0| \leq h^* \quad (1.1.4)$$

的求解问题. 取 B 为定义在区间 $|t - t_0| \leq h^*$ 上的一切连续函数所构成的空间, D 为定义在区间 $|t - t_0| \leq h^*$ 上且图像包含在 G_0 中的一切连续函数所构成的集合. 现定义在连续函数空间 $C[t_0 - h^*, t_0 + h^*]$ 的映射

$$(T\mathbf{x})(t) = \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau)) d\tau, \quad |t - t_0| \leq h^*. \quad (1.1.5)$$

由于

$$\begin{aligned} \|T\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau))\| d\tau \right| \\ &\leq M |t - t_0| \leq b, \end{aligned}$$

所以, 映射 (1.1.5) 把集合 D 映射到它自身. 要证明积分方程 (1.1.4) 存在惟一的解, 也就是要证明映射 (1.1.5) 存在惟一的不动点: $\mathbf{x}^* = T\mathbf{x}^*$. 下面利用 Banach 空间的压缩映像原理来证明. 设 $\forall \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in D$, 由 (1.1.4) 得

$$\begin{aligned} \|T\mathbf{x}^1 - T\mathbf{x}^2\|_C &= \max_{|t - t_0| \leq h^*} \left\| \int_{t_0}^t [\mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}^1(\tau)) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}^2(\tau))] d\tau \right\| \\ &\leq \max_{|t - t_0| \leq h^*} \left| \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}^1(\tau)) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}^2(\tau))\| d\tau \right|. \end{aligned}$$

上式右端积分号内为欧氏范数. 由 Lipschitz 条件 (1.1.2) 知

$$\begin{aligned} \|T\mathbf{x}^1 - T\mathbf{x}^2\|_C &\leq \max_{|t - t_0| \leq h^*} \left| \int_{t_0}^t L_{P_0} \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\|_C d\tau \right| \\ &\leq L_{P_0} \max_{|t - t_0| \leq h^*} \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\|_C |t - t_0| \\ &\leq L_{P_0} h^* \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\|_C. \end{aligned}$$

由 (1.1.3) 可见, $L_{P_0} h^* < 1$. 因此, 由 (1.1.5) 所定义的映射 T 是一压缩映射. 据压缩映射原理知其存在惟一的不动点. |

注 1 容易看出, 由 (1.1.3) 式所定义的 h 是为了保证映射 T 的像不会超出集合 D , 从而可以使用 Lipschitz 条件和压缩映像原理, 而 h^* 的引入是为了保证映射 T 是压缩的.

注 2 利用逐次逼近近似解序列的方法来证明存在惟一性定理, 所得到解的存在惟一区间是 $|t - t_0| \leq h$. 这里, 由于证明方法的限制, 所获得解的存在惟一区间仅为 $|t - t_0| \leq h^*$, 比上述区间可能更小一些. 下面我们即将看到, 由于解可以延拓, 这一差异是无关紧要的.

注 3 应当指出, 仅有 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 在 G 内连续的条件, 就足以保证解的存在性, 但却不能保证惟一; 关于 $\mathbf{x}$ 的 Lipschitz 条件保证解至多存在一个, 但却不保证其存在性. 有兴趣的读者可参阅文献 [1].

当微分方程的右端依赖于参数 μ 时, Cauchy 问题的提法为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu), (t, x, \mu) \in G \subseteq R \times R^n \times R^m, \\ x(t_0) = x^0, \mu = \mu^0. \end{cases} \quad (1.1.6)$$

若 $f \in C(G)$, 且对给定的 μ^0 , f 适合局部 Lipschitz 条件, 则 Cauchy 问题 (1.1.6) 在 $|t - t_0| \leq h^*$ 上存在惟一的解. 其中 h^* 如 (1.1.3) 所定义.

§ 1.2 解的延拓

在上节中我们知道, Cauchy 问题 (1.1.1) 的解, 至少在 $|t - t_0| \leq h^*$ 上存在. 这一局部性的存在定理大大地限制了解的实用范围和理论研究. 人们自然要问, 对于给定的 Cauchy 问题, 能否确定其解存在惟一的最大区间? 下面将给予肯定回答.

假定定理 1.1 的条件成立, 由定理 1.1 可知, Cauchy 问题 (1.1.1) 的解将在区间 $|t - t_0| \leq h^*$ 上存在惟一. 我们先将解向右延拓, 令 $t_1 = t_0 + h^*$, $x(t_0 + h^*) = x^1$, 易见 $P_1(t_0 + h^*, x(t_0 + h^*)) \in G_0 \subset G$. 由于 P_1 是 G 的内点, 故必存在闭区域

$$G_1 = \{(t, x) \mid |t - t_1| \leq a_1, \\ \|x - x^1\| \leq b_1\} \subset G,$$

使 f 在 G_1 上对 x 满足 Lipschitz 条件. 从而再据定理 1.1, 此方程过点 P_1 的解记作 $x_1(t)$, 它必在区间 $|t - t_1| \leq h_1^*$ 上存在惟一, 其中 h_1^* 可类似于 (1.1.3) 定义. 据解的惟一性可知, 在区间 $[t_1 - h_1^*, t_1]$ 上, 此方程过 P_1 的解 $x_1(t)$ 必与过 P_0 的解 $x_0(t)$ 重合 (见图 1.1).

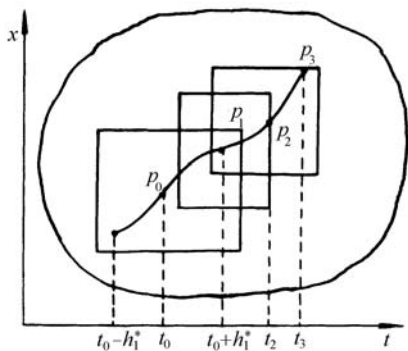


图 1.1

定义

$$x(t) = \begin{cases} x_0(t), & t \in [t_0 - h^*, t_0 + h^*], \\ x_1(t), & t \in [t_1, t_2], t_2 = t_1 + h_1^*, \end{cases}$$

于是 $x(t)$ 就是 Cauchy 问题 (1.1.1) 在区间 $[t_0 - h^*, t_2]$ 上的惟一解.

由于 $P_2(t_2, x(t_2))$ 也是 G 的内点, 故可依上法再向右延拓. 同理, 可将解从点 $(t_0 - h^*, x(t_0 - h^*))$ 向左延拓. 如此继续, 到双方都不能再延拓时为止. 这时所得到的存在区间, 称为解的**最大存在区间**, 具有最大存在区间的解称为**饱和解**. 容易看出, 此最大存在区间必为开区间, 记作 (α, β) . 因为若一方

(例如 $t = \beta$) 为闭, 则解必可从 $t = \beta$ 向右继续延拓. 我们当然希望知道解的两端点 $(\alpha, \mathbf{x}(\alpha)), (\beta, \mathbf{x}(\beta))$ 到底位于何处? 下面的定理回答了这一问题.

定理 1.2 设 $f(t, \mathbf{x})$ 在域 $G \subseteq R \times R^n$ 内连续有界, 且对 $\mathbf{x}$ 满足局部 Lipschitz 条件, 若 Cauchy 问题 (1.1.1) 的解 $\mathbf{x}(t)$ 的最大存在区间为 (α, β) , α, β 为有限数, 则

1) 极限 $\lim_{t \rightarrow \alpha^+} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\alpha+0), \lim_{t \rightarrow \beta^-} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\beta-0)$ 存在;

2) 点 $(\alpha, \mathbf{x}(\alpha+0))$ 与 $(\beta, \mathbf{x}(\beta-0))$ 均在 G 的边界上.

证 1) 由 Cauchy 问题 (1.1.1) 的等价积分方程

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau)) d\tau, \quad \alpha < t < \beta$$

可知^①,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(t_2)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^{t_2} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau)) d\tau \right\| \\ &= \left\| \int_{t_2}^{t_1} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau)) d\tau \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_2}^{t_1} \|\mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau))\| d\tau \right| < M |t_1 - t_2|, \end{aligned}$$

其中 M 为 $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\|$ 的上界.

由于 β 为有限数, 可见, 当 $t_1, t_2 \rightarrow \beta^-$ 时, 有 $\|\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(t_2)\| \rightarrow 0$. 由 Cauchy 收敛准则得知极限 $\mathbf{x}(\beta-0)$ 存在. 同理可证 $\mathbf{x}(\alpha+0)$ 存在.

2) 若 $(\beta, \mathbf{x}(\beta-0))$ 不在 G 的边界上, 必为 G 的内点. 从而可以由 $t = \beta-0$ 向右继续延拓. 与 (α, β) 为解的最大存在区间相矛盾. |

如果我们去掉 f 有界的假设, 则可得如下定理.

定理 1.3 设 $f(t, \mathbf{x}) \in C(G \subseteq R \times R^n)$, 且对 $\mathbf{x}$ 适合局部 Lipschitz 条件, 则 Cauchy 问题 (1.1.1) 的解可延拓到与 G 的边界任意接近 (包括可能趋于无穷).

证 作有界区域 $G_n (n = 1, 2, \dots)$, 使 $(t_0, \mathbf{x}^0) \in G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_n \subset \dots \subset G$, 且 $\overline{G_n} \subset G_{n+1} (n = 1, 2, \dots)$, $G_n \rightarrow G$, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时.

对于闭区域 $\overline{G_1}$, 由于 f 在 $\overline{G_1}$ 上必有界, 利用定理 1.2 可知, Cauchy 问题 (1.1.1) 的解可向右延拓至 $\overline{G_1}$ 的某一边界点 $P_1, P_1 \in G_2$. 对闭区域 $\overline{G_2}$ 利用定理 1.2 可知, 此解可继续由 P_1 向右延拓至 G_2 的某一边界点 P_2 . 仿此类推, 可得到点列 $\{P_n\}, n = 1, 2, \dots$. 由于当 $n \rightarrow +\infty$ 时 $G_n \rightarrow G$, 故 $\{P_n\}$ 必可与 G 的边界任意接近. 同理可讨论向左延拓. |

注 1 $\{P_n\}$ 与边界 ∂G 任意接近, 并不等于 $\{P_n\}$ 可趋向 ∂G 上某一点. 因

^① 今后不另加声明, 所论的范数均指欧氏范数.

为当 $n \rightarrow +\infty$ 时 $\{P_n\}$ 可能极限不存在,而无限振荡着向 ∂G 靠近.在此意义下,定理 1.3 的结论比定理 1.2 弱.

注 2 当 G 为无界区域时, $\{P_n\}$ 可能趋于无穷,特别是有可能使解的存在区间为 $(-\infty, +\infty)$. 而定理 1.2 却限制 α 与 β 只能是有限值.在此意义下,定理 1.3 的结论不能为定理 1.2 所包含.

本书的主要内容是研究微分方程的解的渐近性态,即当时间 t 趋向无穷时解的变化趋势及其特征.因此,对于给定的微分方程,我们首先应该知道,它的解能否对 t 延拓到无穷?或者,在什么条件下才能对 t 延拓到无穷区间?

先考察区域 G 就是全空间 $R \times R^n$ 的情形.如果 $f(t, x)$ 在全空间 $R \times R^n$ 连续且满足局部 Lipschitz 条件,则由定理 1.3 知, Cauchy 问题 (1.1.1) 的解必可以延拓至无穷远.但这并不意味解关于时间 t 可以无限延拓,因为也可能是当 t 趋向有限值时 $\|x(t)\| \rightarrow +\infty$. 不难看出,如果加上解有界这一条件,那么便保证了 t 可无限延拓.然而把假设条件加在未知的解上一般来说是不合适的,或者只有理论上的价值.为保证解的有界性,我们有以下定理.

定理 1.4 设 $f(t, x)$ 在全空间 $R \times R^n$ 连续、有界,且对 x 满足局部 Lipschitz 条件,则 Cauchy 问题 (1.1.1) 解的存在区间为 $(-\infty, +\infty)$.

证 由定理 1.3 可知,解可延拓到与 $R \times R^n$ 的边界任意接近,即可延伸至无穷.故要保证可关于 t 无限延拓只须证明在定理的条件下,其解在任一有限区间上均有界.事实上,由于

$$\|x(t) - x^0\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(\tau, x)\| d\tau \right| \leq M |t - t_0|,$$

这一结论是显然的. |

要求 f 在全空间有界这一条件对上述结论是太强了.为了减弱条件,我们先证明一个著名的引理,它在今后将多次用到.

Gronwall 引理 设一元函数 $g(t)$ 与 $\varphi(t)$ 均在区间 $[t_0, t_1]$ 上连续, $g(t) \geq 0$, 常数 $\lambda \geq 0, r \geq 0$. 若

$$\varphi(t) \leq \lambda + \int_{t_0}^t [g(\tau)\varphi(\tau) + r] d\tau, \quad (1.2.1)$$

则

$$\varphi(t) \leq (\lambda + rT) \exp\left(\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau\right), \quad t_0 \leq t \leq t_1, T = t_1 - t_0. \quad (1.2.2)$$

证 这一引理实际上是对积分不等式 (1.2.1) 的求解.我们希望把积分不等式 (1.2.1) 化为相对应的微分不等式来研究.但是,若对不等式的两端求导,不等号不一定能保持.我们通过等式来过渡.为此令

$$\dot{\phi}(t) = \lambda + \int_{t_0}^t [g(\tau)\varphi(\tau) + r] d\tau. \quad (1.2.3)$$

两端对 t 求导得

$$\dot{\phi}(t) = g(t)\varphi(t) + r. \quad (1.2.4)$$

由 (1.2.1) 可见

$$\varphi(t) \leq \phi(t),$$

代入 (1.2.4) 式得

$$\dot{\phi}(t) - g(t)\phi(t) \leq r.$$

两端乘以积分因子 $\exp\left(-\int_{t_0}^t g(\tau)d\tau\right)$, 得

$$\exp\left(-\int_{t_0}^t g(\tau)d\tau\right) [\dot{\phi}(t) - g(t)\phi(t)] \leq r \exp\left(-\int_{t_0}^t g(\tau)d\tau\right) \leq r,$$

即

$$\frac{d}{dt} \left(\phi \exp\left(\int_{t_0}^t g(\tau)d\tau\right) \right) \leq r.$$

两端分别由 t_0 到 t 积分得

$$\phi(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t g(\tau)d\tau\right) - \phi(t_0) \leq r(t - t_0) \leq rT.$$

由 (1.2.3) 式可见 $\lambda = \phi(t_0)$, 从而有

$$\varphi(t) \leq \phi(t) \leq (\lambda + rT) \exp\left(\int_{t_0}^t g(\tau)d\tau\right). \quad \blacksquare$$

定理 1.5 设 $f(t, \mathbf{x})$ 在全空间 $R \times R^n$ 连续, 对 $\mathbf{x}$ 满足局部 Lipschitz 条件, 且

$$\|f(t, \mathbf{x})\| \leq N \|\mathbf{x}\|, \quad N \text{ 为一正常数},$$

则 $\forall (t_0, \mathbf{x}^0) \in R \times R^n$, Cauchy 问题 (1.1.1) 的解的存在区间均为 $(-\infty, +\infty)$.

证 仿照定理 1.4, 我们只须证明在任一有限区间上, Cauchy 问题 (1.1.1) 的解都是有界的. 假设存在有限数 $b > t_0$, 使得解 $\mathbf{x}(t)$ 在 $[t_0, b)$ 上无界. 当 $t \in [t_0, b)$ 时, 有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\| &\leq \|\mathbf{x}^0\| + \int_{t_0}^t \|f(\tau, \mathbf{x}(\tau))\| d\tau \\ &\leq \|\mathbf{x}^0\| + \int_{t_0}^t N \|\mathbf{x}(\tau)\| d\tau. \end{aligned}$$

应用 Gronwall 引理, 注意到此时 $r = 0$, 使得

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}^0\| \exp\left(\int_{t_0}^t N d\tau\right) = \|\mathbf{x}^0\| e^{N(t-t_0)} \leq \|\mathbf{x}^0\| e^{N(b-t_0)}.$$

与 $\mathbf{x}(t)$ 在 $[t_0, b)$ 上无界矛盾. 所以解向右对 t 可延拓至 $+\infty$, 同理可证向左延拓至 $-\infty$. |

如果 f 的定义域不是全空间而是 $G = R \times D, D \subset R^n$, 那么定理 1.4 和 1.5 均不能保证解关于 t 可无限延拓, 因为解有可能在有限时刻到达 D 的边界. 这时我们有以下定理.

定理 1.6 设 $f(t, \mathbf{x})$ 在域 $G = R \times D, D \subseteq R^n$ 内连续, 有界且满足局部 Lipschitz 条件. 若 Cauchy 问题 (1.1.1) 的解的几何长度无限, 则此解的存在区间必为 $(-\infty, +\infty)$.

证 设 $S(t)$ 是解所表示的曲线的弧长函数, $S(t_0) = 0$. 由弧微分公式可知

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \dot{x}_i^2(t)} dt = \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| dt \\ &= \|f(t, \mathbf{x}(t))\| dt \leq M dt, \end{aligned}$$

其中 M 是 $\|f(t, \mathbf{x})\|$ 的上界. 两端分别从 t_0 到 $t (t > t_0)$ 积分得

$$S(t) \leq M(t - t_0).$$

由于 $S(t)$ 无限, 所以必有 $t \rightarrow +\infty$. 同理可证 $t \rightarrow -\infty$. |

如前所述, 这里把几何长度无限的条件加在未知函数 $\mathbf{x}(t)$ 上只有其理论上的价值. 但在定理 2.2 中我们即将看到, 由此我们可以得出一个十分有用的重要结论.

例 1 考察 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + x^2, & -\infty < x < +\infty, \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

的解的最大存在区间.

解 此解可直接解得

$$x = \tan t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

我们看到, 虽然 $f(x) = 1 + x^2$ 在全空间 R 连续, 但所给 Cauchy 问题的解并不能对 t 无限延拓, 而其最大存在区间为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. 显见, $f(x) = 1 + x^2$ 在 R 并非有界. |

例 2 考察 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{1 + x^2}, & |x| < +\infty, \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

的解的最大存在区间.

解 直接求解得

$$x = \operatorname{sh} t, \quad |t| < +\infty.$$

这里 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ 在全空间 R 仍是无界的, 但所给 Cauchy 问题的解的存在区间却是 $(-\infty, +\infty)$. 可见上述定理的条件只是充分的. |

例 3 考察 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dot{x} = x, & |x| \leq 1, \\ x(t_0) = x_0 > 0 \end{cases}$$

的解的最大存在区间.

解 求解得

$$x = x_0 e^{t-t_0}.$$

由于 $f(x)$ 仅在 $|x| \leq 1$ 上定义, 所以有

$$|x_0| e^{t-t_0} \leq 1.$$

从而

$$-\infty < t < t_0 - \ln |x_0|.$$

我们看到, 虽然 $f(x) = x$ 在其定义域 $|x| \leq 1$ 上连续有界, 但由于此定义域不是全空间 R , 故未能保证解向右无限延拓. |

例 4 证明方程

$$\frac{dx}{dt} = t^2 + x^2 \quad (1.2.5)$$

的任一解的存在区间都是有限的.

证 方程 (1.2.5) 虽然形式简单, 但它的解却无法用初等函数表出. 容易看出, 对于 $\forall p_0(t_0, x_0) \in R \times R$, (1.2.5) 过 p_0 的解均存在惟一, 而且均可伸延至无穷. 但这并不意味着解关于 t 可以无限延拓. 事实上可以证明它的存在区间有限.

设 $x = x(t)$ 是 (1.2.5) 适合初始条件 $x(t_0) = x_0$ 的解. 令其右方的最大存在区间为 $[t_0, b)$. 若 $b < 0$, 则存在区间显然有限. 若 $b > 0$, 取 t_1 适合 $0 < t_1 < b$, 则在 $[t_1, b)$ 上有

$$\frac{dx(t)}{dt} \geq t_1^2 + x^2(t)$$

或

$$\frac{dx}{t_1^2 + x^2} \geq dt, \quad t_1 \leq t < b,$$

两端从 t_1 到 t 积分得

$$\frac{1}{t_1} \left[\arctan \frac{x(t)}{t_1} - \arctan \frac{x(t_1)}{t_1} \right] \geq t - t_1.$$

由此可知

$$0 \leq t - t_1 \leq \frac{\pi}{t_1}, \quad t_1 \leq t < b.$$

因此,解的右方最大存在区间有限.

同理可证左方最大存在区间也是有限的.

§ 1.3 解对初值和参数的连续依赖性和可微性

微分方程和初始条件是对客观实际问题的抽象描述.在抽象过程中,无论是初值、参数或微分方程本身都难免出现微小的误差,我们当然希望对于所建立的微分方程,当上述误差很小时,其解的改变也很小.否则,所求的解就将失去应用价值.这就是本节所研究问题的重要意义.

定理 1.7(解对初值的连续依赖性) 设 $f(t, \mathbf{x})$ 在域 $G \subseteq R \times R^n$ 内连续,满足局部 Lipschitz 条件, $(t_0, \mathbf{x}^0) \in G$. 并设有界闭区间 $[a, b]$ 为 Cauchy 问题(1.1.1)的解的一个存在区间,则其解 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}^0)$ 在区间 $[a, b]$ 上是初值 $(t_0, \mathbf{x}^0)$ 的连续函数.

证 为了证明的需要,首先我们来构造一个解曲线段: $C\{\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}^0) | a \leq t \leq b\}$ 的邻域 $U \subset G$, 使得 $\forall (t, \mathbf{x}^1), (t, \mathbf{x}^2) \in U$, f 对 $\mathbf{x}$ 的 Lipschitz 条件满足且有共同的 Lipschitz 常数 L . 事实上,对于曲线段 C 上任一点 P_i 必存在一 $n+1$ 维空间的球形邻域 $U_i (U_i \subset G)$, 使在 U_i 内 f 对 $\mathbf{x}$ 的局部 Lipschitz 条件成立,其 Lipschitz 常数记作 L_{P_i} . 由于 C 是一有界闭集,由有限覆盖定理可知,存在有限个球形邻域 $U_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 将曲线段 C 覆盖. 取 $D = \bigcup_{i=1}^m U_i$, 且 $L = \max_{1 \leq i \leq m} L_{P_i}$, 容易看出 $\bar{D} \subset G$ 且 $\forall (t, \mathbf{x}^1), (t, \mathbf{x}^2) \in D$, Lipschitz 条件

$$\|f(t, \mathbf{x}^1) - f(t, \mathbf{x}^2)\| \leq L \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\| \quad (1.3.1)$$

成立. 设 D 的边界集合与集合 C 的距离为 d , 显然以 C 上每点为中心, d 为半径的所有 $n+1$ 维开球形域全体的并构成的区域 $D_0 \subseteq D$ (图 1.2).

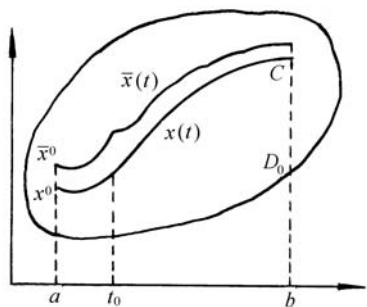


图 1.2

现在我们来证明解对初值的连续性. 设过初始点 $(t_0, \mathbf{x}^0)$ 与 $(t_0, \bar{\mathbf{x}}^0)$ 的解分别为 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}^0)$ 与 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(t; t_0, \bar{\mathbf{x}}^0)$, 即要证 $\forall \varepsilon > 0$ (不妨设 $\varepsilon < d$), $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ 使得只要 $|t_0 - \bar{t}_0| < \delta$, $\|\mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}^0\| < \delta$ 解 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(t; t_0, \bar{\mathbf{x}}^0)$ 必在区间 $[a, b]$ 上存在, 而且有

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}^0) - \bar{\mathbf{x}}(t; t_0, \bar{\mathbf{x}}^0)\| < \varepsilon \quad (1.3.2)$$

成立. 易见两个解 $\mathbf{x}$ 与 $\bar{\mathbf{x}}$ 都位于区域 D_0 时有

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \| \\ &= \| (\mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}^0) + \int_{t_0}^t [f(\tau, \mathbf{x}(\tau; t_0, \mathbf{x}^0)) - f(\tau, \bar{\mathbf{x}}(\tau; t_0, \bar{\mathbf{x}}^0))] d\tau \\ &\quad - \int_{t_0}^t f(\tau, \bar{\mathbf{x}}(\tau; t_0, \bar{\mathbf{x}}^0)) d\tau \| \\ &\leq \| \mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}^0 \| + \int_{t_0}^t L \| \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \| d\tau + M |t_0 - \bar{t}_0| \\ &\leq \delta(1+M) + \int_{t_0}^t L \| \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \| d\tau, \quad t \geq t_0. \end{aligned}$$

其中 $M \geq \| f(t, \mathbf{x}(t; t_0, \bar{\mathbf{x}}^0)) \|$, $t \in [t_0, \bar{t}_0]$ (或 $[\bar{t}_0, t_0]$), $T = |t_0 - \bar{t}_0|$. 据 Gronwall 引理可得

$$\| \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \| \leq \delta(1+M) \exp\left(\int_{t_0}^t L d\tau\right) \leq \delta(1+M) e^{L(b-a)}, \quad (1.3.3)$$

由 (1.3.2) 式不难看出, 只要选取

$$\delta < \frac{\epsilon}{2(1+M)} e^{-L(b-a)}, \quad (1.3.4)$$

则当 $|t_0 - \bar{t}_0| < \delta$, $\| \mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}^0 \| < \delta$ 时, 过初始点 $(t_0, \bar{\mathbf{x}}^0)$ 的解 $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(t; t_0, \bar{\mathbf{x}}^0)$ 必满足不等式 $\| \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \| < \frac{\epsilon}{2} < \frac{d}{2}$. 由此立即可知, 解 $\bar{\mathbf{x}}$ 也必在 $[a, b]$ 上存在. 因为如果 $\bar{\mathbf{x}}$ 仅在区间 $[\bar{a}, \bar{b}]$ 上存在, $\bar{a} > a, \bar{b} < b$, 则在区间 $[\bar{a}, \bar{b}]$ 上重复 (1.3.3) 式导出的过程可得 $\| \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \| < \frac{d}{2}, \bar{a} \leq t \leq \bar{b}$, 从而可知解曲线 $\mathbf{x}(t; t_0, \bar{\mathbf{x}}^0)$ 上的点 $(\bar{a}, \mathbf{x}(\bar{a}; t_0, \bar{\mathbf{x}}^0))$ 与 $(\bar{b}, \mathbf{x}(\bar{b}; t_0, \bar{\mathbf{x}}^0))$ 均必位于 D_0 内部, 所以还可以进一步延拓.

于是, 当 (1.3.4) 成立时, 即有 (1.3.2) 在区间 $[a, b]$ 上成立. |

注 应当强调指出, 解对初值的连续性仅对有限区间才能成立. 读者不难看到有限区间 $[a, b]$ 在证明中的重要作用. 如果在无限区间内研究相应的问题, 需要另加条件. 这是本书第三章稳定性所讨论的主题.

定理 1.8 (解对方程右端函数的连续依赖性) 设 $f(t, \mathbf{x})$ 满足定理 1.7 的条件, 则在区间 $[a, b]$ 上, Cauchy 问题 (1.1.1) 的解将随方程的右端函数 $f(t, \mathbf{x})$ 而连续变化.

证 考察 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}) + \mathbf{g}(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \end{cases}$$

其中 f 与 $\mathbf{g}$ 在 $G \subseteq R \times R^n$ 连续, 且均满足局部 Lipschitz 条件. $\mathbf{g}$ 是方程右端扰动所产生的项, $\| \mathbf{g} \| < \delta \ll 1, (t, \mathbf{x}) \in G$. 设此两 Cauchy 问题的解分别为

$\mathbf{x}(t)$ 与 $\bar{\mathbf{x}}(t)$, 它们均在区间 $[a, b] \subset G$ 内存在^①. $\forall \epsilon > 0$, 我们来求 $\delta(\epsilon) > 0$ 使得只要 $\|g\| < \delta$ 便有 $\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| < \epsilon$ 成立. 事实上, 利用两 Cauchy 问题所对应的积分方程, 可得^② ($t > t_0$)

$$\begin{aligned}\|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| &= \left\| \int_{t_0}^t [\mathbf{f}(\tau, \bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x})] d\tau + \int_{t_0}^t [\mathbf{g}(\tau, \bar{\mathbf{x}})] d\tau \right\| \\ &\leq L \int_{t_0}^t \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| d\tau + \delta(t - t_0) \\ &\leq L \int_{t_0}^t \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| d\tau + \delta(b - a).\end{aligned}$$

应用 Gronwall 引理得

$$\|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| \leq \delta(b - a)e^{L(t-t_0)} \leq \delta(b - a)e^{L(b-a)}.$$

可见, 只要选取

$$\delta < \frac{\epsilon}{b-a} e^{-L(b-a)},$$

则当 $\|g\| < \delta$ 时便有 $\|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| < \epsilon$. |

定理 1.9 (解对参数的连续依赖性) 考察 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mu), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0. \end{cases} \quad (1.3.5)$$

若 $\mathbf{f}$ 关于 $t, \mathbf{x}, \mu$ 在域 $G \subseteq R \times R^n \times R^m$ 内连续, 对 $\mathbf{x}$ 满足局部 Lipschitz 条件, 并设对于给定的 μ^0 , (1.3.5) 的解在闭区间 $[a, b]$ 存在. 则对使 $\|\mu - \mu^0\| \ll 1$ 的 μ , (1.3.5) 的解仍在 $[a, b]$ 上存在, 而且对 μ 连续.

证 此定理的结论可以直接由定理 1.8 得出. 为此, 将 (1.3.5) 中的方程改写为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mu^0) + [\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mu) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mu^0)].$$

记

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mu) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mu) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mu^0),$$

由于 $\mathbf{f}$ 关于 μ 连续, 故当 $\|\mu - \mu^0\| \ll 1$ 时 $\|\mathbf{g}\| \ll 1$, 再应用定理 1.8 便得解对 μ 连续的结论. |

关于解对初值和参数的可微性, 在本书中用得不多, 我们仅列出结论, 其证明可参阅文献[2, 3].

定理 1.10 (解对初值和参数的可微性) 设 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mu)$ 对 t 是 $r-1$ 次连续可微, 对 $\mathbf{x}$ 和 μ 是 r 次连续可微, 则 Cauchy 问题 (1.3.5) 的解 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}^0, \mu)$ 对 $t, t_0, \mathbf{x}^0, \mu$ 而言是 r 次连续可微的.

① 严格说来, $\mathbf{x}(t)$ 的存在区间 $[a, b]$ 是假设, 仿照定理 1.7 的证明可知, 只要 $\|\mathbf{g}\| \ll 1, \bar{\mathbf{x}}(t)$ 也必在 $[a, b]$ 存在.

② 与定理 1.7 同理, 可得到共同的 Lipschitz 常数 L .

定理 1.11(解对初值和参数的解析性) 设 $f(t, x, \mu)$ 在域 $G\{ |t - t_0| < a, \|x - x^0\| < b, \|\mu - \mu^0\| < c\}$ 是 t, x, μ 的解析函数, 则 Cauchy 问题(1.3.5)的解 $x = x(t, t_0, x^0, \mu)$ 也是 t, t_0, x^0, μ 的解析函数.

§ 1.4 比较定理

在研究一阶微分方程解的性态时, 一种颇为有用的方法是把给定的方程与另一个更容易研究的一阶方程作比较, 由后者解的性态去推断前者的解的某些性态. 下面定理为这种比较的方法提供了理论基础.

定理 1.12(第一比较定理) 设有 Cauchy 问题

$$(E_1) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (E_2) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = F(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

其中数量值函数 f 与 F 均在域 $G \subseteq R \times R$ 内连续且对 y 满足局部 Lipschitz 条件, $(x_0, y_0) \in G$. 并设 (E_1) 与 (E_2) 的解均在区间 (a, b) 内存在, 分别记为

$$y = y(x) \quad \text{与} \quad y = Y(x).$$

若

$$f(x, y) < F(x, y), \quad \forall (x, y) \in G, \quad (1.4.1)$$

则

$$y(x) < Y(x), \quad x_0 < x < b, \quad (1.4.2)$$

$$y(x) > Y(x), \quad a < x < x_0. \quad (1.4.3)$$

此定理的结论从几何上看是十分明显的. 不等式(1.4.1)表示在 G 内任一点处 (E_1) 所确定的线素场(方位场)的斜率始终比 (E_2) 所确定的斜率小. 自然, (E_1) 的解曲线在右行时就不可能穿过 (E_2) 的解曲线而跑到上面去, 否则在两解曲线的交点处的斜率将与线素场所确定的斜率矛盾. 下面的分析证明不过是上述几何直观的严格表述, 仅以右行解为例.

证 令

$$\varphi(x) = Y(x) - y(x), \quad x_0 < x < b.$$

由于 $y(x)$ 与 $Y(x)$ 分别是 (E_1) 与 (E_2) 的解, 于是有

$$\varphi'(x) = F(x, Y(x)) - f(x, y(x)), \quad (1.4.4)$$

而且

$$\varphi'(x_0) = F(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) > 0,$$

$$\varphi(x_0) = Y(x_0) - y(x_0) = 0.$$

所以, $\exists \delta > 0$, 使得

$$\varphi(x) > 0, \quad x_0 < x < x_0 + \delta. \quad (1.4.5)$$

以下证明不等式(1.4.5)将在区间 (x_0, b) 内成立. 假设不然, 即至少有一

点 $\beta > x_0, \beta < b$, 使 $\varphi(\beta) = 0$. 现在在 (x_0, b) 内第一次使 $\varphi(x) = 0$ 的 x 值记作 x_1 , 即

$$x_1 = \min\{x \mid \varphi(x) = 0, x_0 < x < b\}$$

从而有

$$\varphi(x_1) = 0,$$

即

$$\begin{aligned} Y(x_1) &= y(x_1) \triangleq y_1, \\ \varphi(x) &> 0, \quad x_0 < x < x_1. \end{aligned}$$

于是必有

$$\varphi'(x_1) \leq 0. \quad (1.4.6)$$

另一方面, 由 (1.4.4) 与定理条件可知

$$\begin{aligned} \varphi'(x_1) &= F(x_1, Y(x_1)) - f(x_1, y(x_1)) \\ &= F(x_1, y_1) - f(x_1, y_1) > 0, \end{aligned}$$

这与 (1.4.6) 式矛盾. 定理得证. I

注 1 定理 1.12 表明, 当条件 (1.4.1) 成立时, (E_1) 与 (E_2) 过同一初值的解可以比较大小. 当从初值出发右行时, 方程右端大的解始终位于上方; 左行时始终位于下方 (图 1.3).

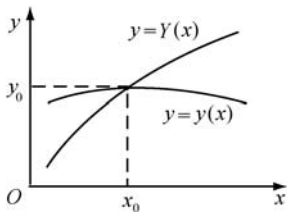


图 1.3

注 2 如果考虑 Cauchy 问题

$$\begin{aligned} (E'_1) \quad & \begin{cases} \frac{dx}{dy} = g(x, y), \\ x(y_0) = x_0, \end{cases} \\ (E'_2) \quad & \begin{cases} \frac{dx}{dy} = G(x, y), \\ x(y_0) = x_0, \end{cases} \end{aligned}$$

则定理的相应结论表明, 过同一初值, 方程右端大的解上行时始终位于右端较小的方程的解的右方; 下行时始终位于左方 (图 1.4).

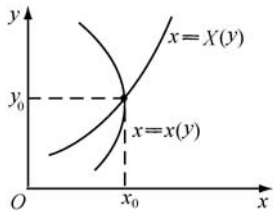


图 1.4

即当 $g(x, y) < G(x, y), \forall (x, y) \in \text{域 } G$ 时, 有

$$x(y) < X(y), \quad y_0 < y < d, \quad (1.4.7)$$

$$x(y) > X(y), \quad c < y < y_0, \quad (1.4.8)$$

其中 $x(y)$ 与 $X(y)$ 分别为 (E'_1) 与 (E'_2) 的解, (c, d) 是它们的共同存在的区间.

定理 1.13 (第二比较定理) 设有 Cauchy 问题

$$(E_1) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (E_2) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = F(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

其中 f 与 F 均在域 $G \subseteq R \times R$ 内连续, 满足局部 Lipschitz 条件, $(x_0, y_0) \in G$, 并设 (E_1) 与 (E_2) 的解均在闭区间 $[a, b]$ 上存在, 分别记作

$$y = y(x) \quad \text{与} \quad y = Y(x), \quad a \leq x \leq b.$$

若

$$f(x, y) \leq F(x, y), \quad \forall (x, y) \in G, \quad (1.4.9)$$

则

$$y(x) \leq Y(x), \quad x_0 \leq x \leq b, \quad (1.4.10)$$

$$y(x) \geq Y(x), \quad a \leq x \leq x_0. \quad (1.4.11)$$

证 仅证 (1.4.10), (1.4.11) 可同样证明. 构造辅助方程

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = F(x, y) + \varepsilon, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (1.4.12)$$

其中 ε 为一正常数. 易见当 $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ 足够小时, 仍有 $(F + \varepsilon) \in C(G)$, 由解对右端函数连续性的定理 1.8 可知, 当 $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ 时, Cauchy 问题 (1.4.12) 的解 $y = Y_\varepsilon(x)$ 也将在闭区间 $[a, b]$ 上存在, 且在此区间上关于 ε 连续变化. 显然, 当 $\varepsilon > 0$ 时

$$f(x, y) < F(x, y) + \varepsilon, \quad \forall (x, y) \in G,$$

由第一比较定理可知

$$y(x) < Y_\varepsilon(x), \quad x_0 < x < b, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

$$y(x) \leq Y_\varepsilon(x), \quad x_0 \leq x \leq b, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

从而令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 便得 (1.4.10) 式. |

注 1 与通常的第二比较定理相比, 我们所得的结论要弱一些. 实际上, 可以证明, 只要 f 与 $F \in C(G)$, 满足局部 Lipschitz 条件, 当不等式 (1.4.9) 成立时, 在 $(E_1), (E_2)$ 的解共同存在的区间内 (α, β) 内, 仍成立不等式

$$y(x) \leq Y_\varepsilon(x), \quad x_0 \leq x < \beta,$$

$$y(x) \geq Y(x), \quad \alpha < x \leq x_0.$$

其证明略去, 有兴趣的读者可参阅文献 [2].

注 2 若考察 Cauchy 问题 (E'_1) 与 (E'_2) . 则当

$$g(x, y) \leq G(x, y), \quad \forall (x, y) \in \text{域 } G$$

时, 有

$$x(y) \leq X(y), \quad y_0 \leq y < d,$$

$$x(y) \geq X(y), \quad c < y \leq y_0.$$

例 1 设有方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \mu(x^2 - 1)y, \quad \mu \text{ 为正常数,} \end{cases}$$

试证它的积分曲线从 y 的负半轴上任一点 A 出发左行时必与 x 负半轴相交.

证 考察确定其积分曲线的方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x - \mu(x^2 - 1)y}{y} \triangleq f(x, y). \quad (1.4.13)$$

容易看出, $f(x, y)$ 在域 $G\{(x, y) | -\infty < x < +\infty, y < 0\}$ 上连续, 满足局部 Lipschitz 条件. 它的水平等倾线

$$L: Q(x, y) \triangleq -x - \mu(x^2 - 1)y = 0$$

由三支曲线组成, 记作 $L_i (i=1, 2, 3)$, 如图 1.5 所示.

在 L_1 与 L_2 之间 $Q < 0$, 在 L_1 与 L_3 之间 $Q > 0$. 取 $\forall y_0 < 0$, 考察方程 (1.4.13), 过 $A(0, y_0)$ 点左行的解曲线 $y = y(x)$, 分三步来证明结论.

(1) 应用比较定理证明 $y = y(x)$ 必与曲线 L_1 相交. 容易看出, 在下半平面 L_1 与 L_2 之间, 由 (1.4.13) 所确定的斜率为正, 故由 A 点出发左行的解曲线 $\Gamma: y = y(x)$ 将向左下方行走. 方程 (1.4.13) 是无法求得解析解的. 如果我们能找到一个容易求解的微分方程, 它从 A 点出发的解曲线 $\bar{y} = \bar{y}(x)$ 左行时将与 L_1 相交, 而又能保证在其交之前 $y = y(x)$ 始终位于 $\bar{y} = \bar{y}(x)$ 的上方, 也就保证了 $y = y(x)$ 也必与 L_1 相交. 若要应用比较定理, 必须使比较方程在上述区域内不比 $f(x, y)$ 小. 为此, 把 (1.4.13) 中右端

$$f(x, y) = -\frac{x}{y} - \mu(x^2 - 1) \quad (1.4.14)$$

中的第一项去掉, 则显然在第三象限有

$$\bar{f}(x, y) = -\mu(x^2 - 1) \geq f(x, y),$$

而且方程

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = -\mu(x^2 - 1)$$

容易求解. 直接积分可得它过点 $(0, y_0)$ 的解为

$$\bar{y}(x) = \mu x - \frac{1}{3} \mu x^3 + y_0.$$

容易求得此解与 $x = -1$ 的交点为 $\bar{B}(-1, y_1)$, $y_1 = -\frac{2}{3} \mu - y_0$. 从而也必与 L_1 相交. 由第二比较定理知 (1.4.13) 的解曲线也必与 L_1 相交于 A' .

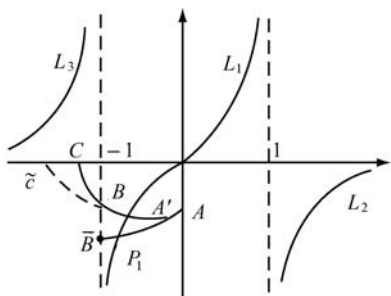


图 1.5

(2) 证明方程(1.4.13)过点 A' 左行的解曲线或者与 $x = -1$ 相交;或者在 $-1 < x < 0$ 内与 x 负半轴相交. 易见当 $y < 0$ 时, 在 L_1 的左方有 $f(x, y) < 0$, 故由 A' 出发的左行解曲线 $y = y(x)$ 必向左上方行走. 从而它或者在 $-1 < x < 0$ 间与 x 负半轴相交, 命题得证; 否则必与 $x = -1$ 相交于 $\bar{B}$ 点上方的某一点 $B(-1, y_2), y_2 < 0$.

(3) 证明方程(1.4.13)过 B 点的左行解曲线必与 x 负半轴相交. 为此需寻找比较方程使其右端不比 $f(x, y)$ 小, 而其解曲线又能与 x 负半轴相交. 在(1.4.14)式中将 $f(x, y)$ 的第二项去掉, 考察方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \triangleq \widetilde{f}(x, y), \quad (1.4.15)$$

显然, 在 $x < -1$, 有

$$\widetilde{f}(x, y) \geq f(x, y),$$

而方程(1.4.15)过 B 点的解曲线极易获得为

$$x^2 + y^2 = 1 + y_2^2.$$

它显然与 x 负半轴交于点 $\widetilde{C}(-\sqrt{1+y_2^2}, 0)$. 据第二比较定理可知方程(1.4.13)过 B 点解曲线也必与 x 负半轴相交于 $\widetilde{C}$ 的右方. 命题得证. $\blacksquare$

应当指出, 比较定理仅适用于两个一阶微分方程式之间的比较. 对于上述例题中所给出的方程组, 我们是化为确定其积分曲线的一阶方程式才能应用比较定理. 对于两个方程组而言, 一般说来, 是难以进行比较的. 但是对下述特殊型的方程组, 也成立相应的比较定理.

定义 (拟单调系统) 设有微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (1.4.16)$$

其中 $f \in C(G \subseteq R \times R^n, R^n)$. 若 $\forall (t, x) \in G, f$ 的 Jacobi 矩阵的所有非对角元素均非负, 即

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x) \geq 0, \quad i \neq j, i, j = 1, \dots, n,$$

其中 f_i 与 x_j 分别为 f 与 x 的分量. 则称方程(1.4.16)为一拟单调系统. 向量值函数 $f(t, x)$ 称为拟单调向量值函数.

记

$$R_+^n = \{x \in R^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\},$$

$$R_+^n = \{x \in R^n \mid x_i > 0, i = 1, \dots, n\}.$$

设 $x, y \in R_+^n$. 若 $x - y \in R_+^n$ 则记作 $y \leq x$ 并称在 x 与 y 之间建立了一种偏序; 若 $x - y \in R_+^n$ 且 $x \neq y$, 则记作 $y < x$.

定理 1.14 设有 Cauchy 问题

$$(C_1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), \\ x(0) = x^1; \end{cases} \quad (C_2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = g(x), \\ x(0) = x^2, \end{cases}$$

其中 $f, g \in C^1(\overset{\circ}{R}_+^n, R^n)$. 若存在一拟单调向量值函数 $\varphi(x) \in C^1(\overset{\circ}{R}_+^n, R^n)$, 使不等式

$$f(x) \leq \varphi(x), \quad g(x) \geq \varphi(x)$$

对一切 $x(t) \in C^1(R_+, \overset{\circ}{R}_+^n)$ 成立; 且

$$x^1 \leq x^2.$$

设 (C_1) 与 (C_2) 的解分别为

$$x = x^{(1)}(t), \quad x = x^{(2)}(t), \quad t \in R_+.$$

则必有

$$x^{(1)}(t) \leq x^{(2)}(t), \quad t \in R_+.$$

令 $f(x) \equiv g(x)$, 则可得下述推论

推论 若

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad f \in C^1(\overset{\circ}{R}_+^n, R^n)$$

为一拟单调系统, 设其适合初始条件 $x(0) = x^1$ 与 $x(0) = x^2$ 的解分别为 $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), t \in R_+$. 若 $x^1 \leq x^2$, 则必有

$$x^{(1)}(t) \leq x^{(2)}(t), \quad t \in R_+.$$

定理的证明从略.

例如下述著名的 Volterra 方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(r_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(r_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2), \end{cases} \quad (x_1, x_2) \in R_+^2,$$

$r_i, a_{ij} (i, j = 1, 2)$ 为常数, 当 $a_{12} \cdot a_{21} > 0$ 时就可以看作一拟单调系统. 事实上, 当 $a_{12} > 0, a_{21} > 0$ 时, 方程组右端 Jacobi 矩阵的非对角元素 $a_{12}x_1, a_{21}x_2$ 均非负; 当 $a_{12} < 0, a_{21} < 0$ 时, 只须作时间变换 $t = -\tau$, 使其可化为拟单调系统. 这时, 当两组初始值存在偏序时, 过初值的两组解也存在着相同的偏序.

习 题 1

1. 设有

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x^0, \quad (t_0, x^0) \in G \subseteq R \times R^n.$$

试证: 若 $f \in C^1(G)$, 则在 (t_0, x^0) 的邻域内, 此 Cauchy 问题的解存在惟一.

2. 试讨论下列方程解的存在区间

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad (2) \quad \frac{dy}{dx} = y(y-1).$$

3. 设有一阶微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = (t-x)e^{tx^2}.$$

试证:过任一点 $(t_0, x_0) \in R^2$ 的右行解的存在区间均为 $[t_0, +\infty)$.

4. 设有一阶方程 $\frac{dx}{dt} = f(x)$, 若 $f \in C(-\infty, +\infty)$, 且当 $x \neq 0$ 时有 $xf(x) < 0$. 求证过 $\forall (t_0, x_0) \in R^2$, Cauchy 问题的右行解均在 $[t_0, +\infty)$ 上存在, 且有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.

5. 若 $f(t, \mathbf{x})$ 在全空间 $R \times R^n$ 上连续且对 $\mathbf{x}$ 满足局部 Lipschitz 条件且

$$\|f(t, \mathbf{x})\| \leq L(r), \quad r = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T,$$

其中 $L(r) > 0, r > 0$, 且

$$\int_a^{+\infty} \frac{dr}{L(r)} = +\infty, \quad a > 0.$$

试证:对 $\forall (t_0, x^0) \in R \times R^n$, Cauchy 问题的解均可对 t 无限延拓.

6. 设有微分方程

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(t, \mathbf{x}),$$

$f \in C(G \subseteq R \times R^n)$, 试证:若对 $\forall (t_0, x^0) \in G$, Cauchy 问题的解都存在惟一, 则解必对初值连续依赖.

7. 试在定理 1.1 的假设下, 利用 Gronwall 引理直接证明解对初始时刻 t_0 的连续依赖性.

8. 设有一阶 Cauchy 问题

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + (y+1)^2, \quad y(0) = 0.$$

试利用比较定理证明, 若设解的右行饱和区间为 $[0, \beta)$, 则 $\frac{\pi}{4} \leq \beta \leq 1$.

第二章 动力系统的基本知识

自治系统特别是平面自治系统是本书所研究的主要对象.这一章我们在介绍一般自治系统基本性质的基础上,着重讲解平面自治系统极限集的构造.还将通过具体例子介绍使用 Maple 软件包观察解的渐近性态的方法.本章的内容是以后各章的基础,也是动力系统知识入门,其中 Bendixson 环域定理是平面定性理论中最基本的定理之一.

§ 2.1 自治系统与非自治系统

2.1.1 相空间与轨线

设有微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad f \in C(G = I \times D \subseteq R \times R^n, R^n) \quad (2.1.1)$$

或

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad f \in C(D \subseteq R^n, R^n). \quad (2.1.2)$$

若将 x 看作是运动质点 M 在时间 t 的坐标, f 看作是速度向量, 则 (2.1.1) 与 (2.1.2) 就是质点 M 的运动方程. 它们的解 $x = x(t)$ 就是 M 点的运动方程. 标志动点 M 位置的空间 R^n 称为相空间, 空间 $R \times R^n$ 称为增广相空间, 它是解所表示的曲线(简称解曲线) $x = x(t)$ 所在的空间. 解 $x = x(t)$ 在相空间的图形, 即运动的轨迹称为运动的轨线, 或方程的轨线. 轨线也就是把 t 看作是参数, 解 $x = x(t)$ 在相空间的图形, 它显然就是 $R \times R^n$ 内的解曲线在相空间 R^n 的投影. 例如对于方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

易知它适合初始条件 $x(0) = 1, y(0) = 0$ 的解为

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases} \quad (2.1.4)$$

此解曲线在增广相空间 (t, x, y) 是一过 $(0, 1, 0)$ 点的空间螺旋线; 位于相平面 (x, y) 上的相应轨线为中心在坐标原点、半径为 1 的圆, 它显然就是上述空

间螺旋线在相平面 (x, y) 上的投影.在航空演习时飞机在空中留下的一条白线,就是在相空间 (x, y, z) 内飞机运动的轨线.

给定了微分方程(2.1.1)或(2.1.2)就相当于在相空间 R^n 的区域 D 内分别给定了向量场 $f(t, x)$ 或 $f(x)$.但是,这两个向量场确有本质的区别. $f(x)$ 所确定的向量与时间无关仅取决于点 M 的位置,称为定常场或自治场,过域 D 内任一点 x 确定着惟一的方向 $f(x)$,称方程(2.1.2)为自治系统; $f(t, x)$ 所确定的向量场不仅与点 M 的位置有关,而且还与时间 t 有关,称为时变场或非自治场,过 D 内同一点可能有多个(甚至无穷多个)方向,它们将随 t 的不同而不同,称方程(2.1.1)为非自治系统.在解的存在惟一性定理条件满足的前提下,容易看出,对于自治系统(2.1.2),不仅在增广相空间内任意两解曲线不会相交,而且在相空间内其轨线也不可能相交;但是对于非自治系统(2.1.1),尽管在增广相空间内任意两条解的曲线不会相交,但在相空间内它们的轨线却可能相交.这是自治系统与非自治系统最本质的差异.自治系统的这一特征,使我们对它的研究一般放在相空间内进行,把 t 看作参数去研究其轨线的性态.

还应指出,自治系统(2.1.2)的轨线方程可以用解 $x = x(t)$ 表示,但此时应将 t 视为参数,其图形在相空间 R^n 内给出;也可以由 $x = x(t)$ 中消去 t 直接用 x 的分量给出,因而也可以由方程(2.1.2)中先消去 dt ,然后求解得出.所以方程(2.1.2)的轨线方程实际上也就是其积分曲线的方程.例如,对于自治系统(2.1.3)来说,方程组(2.1.4)就是其过 $(1, 0)$ 点的轨线的参数方程;消去 t 所得的方程

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (2.1.5)$$

就是其直角坐标方程,也就是(2.1.3)的积分曲线的方程.它也可以从(2.1.3)先消去 dt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad (2.1.6)$$

再对(2.1.6)求解得到.但是,应当注意,(2.1.3)与(2.1.6)所确定的向量场是有所不同的.前者在 R^n 中给出了一方向场,而后者仅给出了一方位场或线素场.换句话说,在从(2.1.3)中消去 dt 后,使向量场仅保留其方位而失去了指向.所得的轨线(2.1.5)不能表示当 t 增大时动点在轨线上运动的方向,而由参数方程(2.1.4)所表示的轨线,还表明了当 t 增大时动点在轨线上沿逆时针方向运动.

2.1.2 自治系统的基本性质

为了今后叙述方便,先引入几个记法.

考虑自治系统 (2.1.2), 设 f 在 D 内连续且适合局部 Lipschitz 条件^①. (2.1.2) 过初始点 $(t_0, \mathbf{x}^0)$ 的解记为 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}^0)$, 特别是过初始点 $(0, \mathbf{x}^0)$ 的解记为 $\mathbf{x}(t; 0, \mathbf{x}^0)$, 也简记为 $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)$. 解 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}^0)$ 也可记成 $\mathbf{x}(t - t_0; 0, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}(t - t_0, \mathbf{x}^0)$, 或 $\mathbf{x}(t - t_0 + t_1; t_1, \mathbf{x}^0)$.

性质 1 若 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}^0)$ 是自治系统 (2.1.2) 的解, 则 $\mathbf{x}(t + c; t_0, \mathbf{x}^0)$ 也是 (2.1.2) 的解, 它过初值点 $(t_0 - c, \mathbf{x}^0)$, 其中 c 为任一常数.

性质 1 表明将自治系统的任一解曲线沿 t 轴平移后所得到的诸曲线都仍是此自治系统的解曲线, 它们仅是初始值上的差异 (图 2.1).

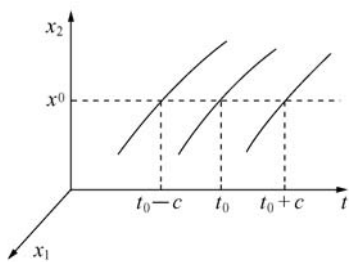


图 2.1

证 只须证明 $\mathbf{x}(t + c; t_0, \mathbf{x}^0)$ 适合系统 (2.1.2), 即

$$\frac{d\mathbf{x}(t + c; t_0, \mathbf{x}^0)}{dt} = f[\mathbf{x}(t + c; t_0, \mathbf{x}^0)]. \quad (2.1.7)$$

由于 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}^0)$ 是 (2.1.2) 的解, 即

$$\frac{d\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}^0)}{dt} = f[\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}^0)].$$

令 $t = \tau + c$, 上式可写成

$$\frac{d\mathbf{x}(\tau + c; t_0, \mathbf{x}^0)}{d(\tau + c)} = f[\mathbf{x}(\tau + c; t_0, \mathbf{x}^0)],$$

但

$$\frac{d\mathbf{x}(\tau + c; t_0, \mathbf{x}^0)}{d(\tau + c)} = \frac{d\mathbf{x}(\tau + c; t_0, \mathbf{x}^0)}{d\tau}.$$

从而 (2.1.7) 式成立, 只不过把 t 换成 τ 而已. |

容易看出, 非自治系统 (2.1.1) 不具备此性质.

性质 2 在相空间内自治系统 (2.1.2) 的任何两条不同的轨线不可能相交.

证 设有系统 (2.1.2) 的两条轨线

$$\Gamma_1: \mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_1, \mathbf{x}^1); \quad \Gamma_2: \mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_2, \mathbf{x}^2),$$

性质 2 的结论相当于若 Γ_1 与 Γ_2 相交于空间内一点 $p(\bar{\mathbf{x}})$, 即若有

$$\mathbf{x}(T_1; t_1, \mathbf{x}^1) = \mathbf{x}(T_2; t_2, \mathbf{x}^2) = \bar{\mathbf{x}}, \quad (2.1.8)$$

如图 2.2, 则必有 $\Gamma_1 \equiv \Gamma_2$.

事实上, 从增广相空间来看, 由于 $\mathbf{x}(t; t_1, \mathbf{x}^1)$ 为自治系统 (2.1.2) 的解,

^① 今后凡讨论微分方程若不特别声明总假设此条件满足.

由性质 1 知 $\mathbf{x}(t - (T_2 - T_1); t_1, \mathbf{x}^1)$ 也是 (2.1.2) 的解. 显然

$$\mathbf{x}(t - (T_2 - T_1); t_1, \mathbf{x}^1) \Big|_{t=T_2} = \mathbf{x}(T_1; t_1, \mathbf{x}^1) = \bar{\mathbf{x}}.$$

即解 $\mathbf{x}(t - (T_2 - T_1); t_1, \mathbf{x}^1)$ 过点 $(T_2, \bar{\mathbf{x}})$; 而由假设 (2.1.8) 式知解 $\mathbf{x}(t; t_2, \mathbf{x}^2)$ 也过点 $(T_2, \bar{\mathbf{x}})$; 据解的惟一性知

$$\mathbf{x}(t - (T_2 - T_1); t_1, \mathbf{x}^1) \equiv \mathbf{x}(t; t_2, \mathbf{x}^2),$$

由于解 $\mathbf{x}(t - (T_2 - T_1); t_1, \mathbf{x}^1)$ 与 $\mathbf{x}(t; t_1, \mathbf{x}^1)$ 有同一轨线 Γ_1 , 所以 $\Gamma_1 \equiv \Gamma_2$.

性质 2 的证明思想从几何上看是十分明显的. 如图 2.2, 假设两不同轨线 Γ_1 和 Γ_2 相交于 $\bar{\mathbf{x}}$, 从增广相空间来看, 它们分别所对应的解曲线 (可能在不同时刻) 必通过 $\bar{\mathbf{x}}$ 点. 由于解关于 t 轴平移后仍为解, 所以必可将其中一解曲线平移使它与另一解曲线于某时刻 T_2 相交于同一点 $(T_2, \bar{\mathbf{x}})$. 由解的惟一性这是不可能的, 除非此两解重合.

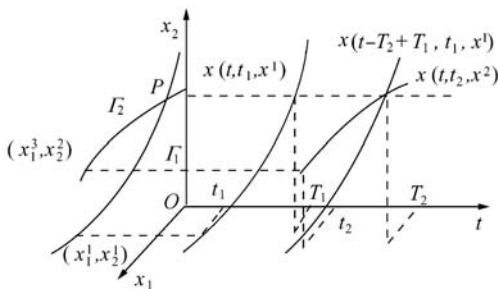


图 2.2

性质 3 设自治系统 (2.1.2) 过 $(0, \mathbf{x}^0)$ 的解为 $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)$, $\mathbf{x}(t_1, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^1$; 过 $(0, \mathbf{x}^1)$ 的解为 $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^1)$, 则

$$\mathbf{x}(t_2, \mathbf{x}(t_1, \mathbf{x}^0)) = \mathbf{x}(t_1 + t_2, \mathbf{x}^0). \quad (2.1.9)$$

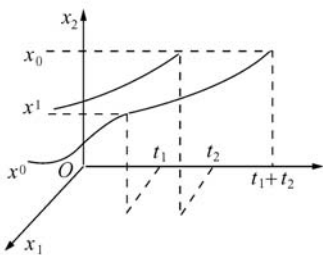


图 2.3

此性质在几何上表明, 对于自治系统 (2.1.2), 如果 $t=0$ 从 $\mathbf{x}^0$ 出发的解在 $t=t_1$ 时刻到达 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^1$, 再由 $t=0$ 从 $\mathbf{x}^1$ 出发的解在 $t=t_2$ 时刻到达 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(t_2, \mathbf{x}^1)$, 那么 $t=0$ 从 $\mathbf{x}^0$ 出发的解经过 $t_1 + t_2$ 时刻后也必到达 $\bar{\mathbf{x}}$ (图 2.3). 通过平移从几何上看结论是十分明显的.

证 我们首先证明

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}(t_1, \mathbf{x}^0)) \equiv \mathbf{x}(t + t_1, \mathbf{x}^0). \quad (2.1.10)$$

由于 $\mathbf{x}(t_1, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^1$, 故等式 (2.1.10) 的左端表示过点 $(0, \mathbf{x}^1)$ 的解.

由于 $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)$ 为 (2.1.2) 的解, 由性质 1 知等式 (2.1.10) 的右端 $\mathbf{x}(t+t_1, \mathbf{x}^0)$ 也是 (2.1.2) 的解. 且 $\mathbf{x}(t+t_1, \mathbf{x}^0) \Big|_{t=0} = \mathbf{x}(t_1, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^1$, 所以它也过点 $(0, \mathbf{x}^1)$. 由解的惟一性知 (2.1.10) 式成立.

最后在 (2.1.10) 式两端同时令 $t = t_2$ 便得 (2.1.9) 式. |

2.1.3 动力系统的概念

如前所述, 自治系统 (2.1.2) 是域 D 内质点运动规律的描述, 它过点 $P \in D$ 的解记作 $\varphi(P, t)$, 是过 P 点的运动的方程, 也称为过点 P 的一个运动, 设它的存在区间为 $(-\infty, +\infty)$ ^①. 固定 P 让 t 变化, $\varphi(P, t)$ 在相空间中表示一条轨线, 在增广相空间中表示一条解曲线. 若固定 t , 则 $\varphi(P, t) \triangleq \varphi_t(P)$ 可以看成是由 R^n 到 R^n 的映射或变换, 它把 $D \subseteq R^n$ 映射成其自身. 再让参数 t 变动, 则 $\varphi_t(P)$ 可看成是 D 内的点沿着其轨线方向流动. 称 $\varphi_t(P)$ ($P \in D, t \in R$) 为系统 (2.1.2) 的流.

对每一 $t \in R$, $\varphi_t(P)$ 是 $D \rightarrow D$ 的变换. 现在考察对一切 $t \in R$, 这些变换的全体所构成的集合

$$\{\varphi(P) \equiv \varphi(P, t) \mid -\infty < t < +\infty\}. \quad (2.1.11)$$

在集合 (2.1.11) 上定义乘法运算

$$\varphi_1(P) \circ \varphi_2(P) = \varphi(\varphi(P, t_1), t_2), \quad (2.1.12)$$

由性质 3 知

$$\varphi_1(P) \circ \varphi_2(P) = \varphi_{1+t_2}(P).$$

容易看出变换集合 (2.1.11) 对上述乘法运算是封闭的, 且适合结合律

$$(\varphi_1(P) \circ \varphi_2(P)) \circ \varphi_3(P) = \varphi_1(P) \circ (\varphi_2(P) \circ \varphi_3(P)).$$

$\varphi_0(P) = P$, 故存在单位元素. 又由于对于任一元素 $\varphi_{-t_0}(P)$ 均存在 $\varphi_0(P)$ 使

$$\varphi_{-t_0}(P) \circ \varphi_0(P) = \varphi_0(P),$$

即存在逆元素. 因而 (2.1.11) 对乘法运算 (2.1.12) 构成一含单参数 t 的群. 又由于交换律

$$\varphi_1(P) \circ \varphi_2(P) = \varphi_2(P) \circ \varphi_1(P)$$

成立, 而且由解对初值的连续性知 $\varphi_t(P)$ 在任一有限区间 $a \leq t \leq b$ 上关于 (t, P) 连续. 所以变换的全体 $\{\varphi_t(P), -\infty < t < +\infty\}$ 构成了一个单参数可交换的连续变换群. 我们称 $\{\varphi_t(P), -\infty < t < +\infty\}$ 为一个动力系统. 我们

^① 下节我们将说明这一假设是合理的.

看到,系统(2.1.2)在域 G 上的流就是一个动力系统,有时我们也把方程(2.1.2)称为动力系统.

§ 2.2 轨线的极限集合

2.2.1 常点与奇点

设有自治系统

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad f \in C(G \subseteq R^n, R^n) \quad (2.2.1)$$

定义2.1(奇点) 若点 $\bar{x} \in G$, 使 $f(\bar{x}) \neq 0$, 则称 $\bar{x}$ 为系统(2.2.1)的常点; 若 $x^* \in G$, 使 $f(x^*) = 0$, 则称 x^* 为(2.2.1)的奇点.

向量场 f 在常点处确定着惟一的方向, 在相空间过一常点有且仅有一条轨线沿此方向通过; 若 x^* 为(2.2.1)的奇点, 由于 $f(x^*) = 0$, 从而 $x = x^*$ 是(2.2.1)的解. 此解不随时间 t 而变化, 在增广相空间中表示一条平行于 t 轴的直线, 它在相空间的投影就是奇点 x^* , 所以奇点是一条特殊的轨线. 从动力学的观点来看, 在奇点 x^* 处运动的速度 $f(x^*) = 0$, 从而质点不运动, 因而奇点也称为系统(2.2.1)的平衡点.

定理2.1 设 x^* 是自治系统(2.2.1)的奇点, 则

- (1) 若 $\lim_{t \rightarrow \beta} x(t, t_0, x^0) = x^*, x^0 \neq x^*$, 则 $\beta = +\infty$ 或 $\beta = -\infty$;
- (2) 若 $\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ (t \rightarrow -\infty)}} x(t, t_0, x^0) = x^*$, 则 $f(x^*) = 0$.

结论(1)表示非奇点的轨线在任何有限时刻不能到达奇点, 而只能在无限时刻趋向奇点, 这时称轨线正向($t \rightarrow +\infty$)进入奇点, 或负向($t \rightarrow -\infty$)进入奇点;

结论(2)表示在无限时刻轨线所进入的点必为奇点.

证 (1) 设 $-\infty < \beta < +\infty$, 由连续性知必有 $x(\beta; t_0, x^0) = x^*$. 这样一来, $x = x(t; t_0, x^0)$ 与 $x = x^*$ 都是过 (β, x^*) 的轨线, 与两轨线的不相交性矛盾.

(2) 由于 $x(t; t_0, x^0)$ 是系统(2.2.1)的解, 故

$$\frac{dx(t; t_0, x^0)}{dt} = f[x(t; t_0, x^0)],$$

两端求极限, 注意到 f 的连续性可得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dx(t; t_0, x^0)}{dt} = \lim_{t \rightarrow +\infty} f[x(t; t_0, x^0)] = f(x^*). \quad (2.2.2)$$

若 $f(x^*) \neq 0$, 则至少存在 f 的一个分量 f_i 使 $f_i(x^*) \neq 0$, 不妨设 $f_i(x^*)$