现代物理基础丛书　　2

物理学家用
微分几何
（第二版）

侯伯元　侯伯宇　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是为物理学家写的一本微分几何，是在1990年版的基础上，进行修订补充，将原版14章扩充到了23章。全书分为三部分：第一部分介绍流形微分几何，是理论物理研究生教学的基本内容，介绍了流形、流形上张量场、仿射联络与曲率以及流形上度规、辛、复、自旋等重要几何结构。第二部分介绍纤维丛几何，介绍了示性类与A-S指标定理，深入分析量子规范理论的大范围拓扑性质、各级拓扑障碍、瞬子、单极、分数荷与超对称等现代物理前沿问题。第三部分介绍非交换几何及其在量子物理中的应用、量子群与q规范理论。

本书适合物理学专业研究生以及从事理论物理的科学工作者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

物理学家用微分几何/侯伯元，侯伯宇著. —2版，—北京：科学出版社，2004

(现代物理基础丛书；2)

ISBN 7-03-013432-X

Ⅰ. 物… Ⅱ. ①侯…②侯… Ⅲ. 微分几何 Ⅳ. 0186.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第047883号

责任编辑：胡 凯 张邦固/责任校对：刘小梅

责任印制：钱玉芬/封面设计：黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1990年8月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2004年8月第 二 版 印张：49 1/2

2005年5月第四次印刷 字数：859 000

印数：4 701—6 700

定价：98.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

《现代物理基础丛书》编委会

前　言

《物理学家用微分几何》出版已过了十多年,这次“新版”是原书的修订补充,将原书 14 章扩充到目前 23 章.全书分三部分:流形微分几何、纤维丛几何、非交换几何.第一部分,流形微分几何,是理论物理研究生教材的基本内容.其中前三章着重介绍流形局域拓扑结构与仿射结构;介绍流形上三种重要的微分算子:外微分、李导数、协变导数,结合各种例子熟悉它们的特性与应用;介绍了关于流形,流形上张量场、微分形式、流形的变换及其可积性,仿射联络与曲率、挠率等基本概念.这三章暂未对流形引入度规.采用摆脱度量限制的可任意进行坐标变换的坐标系,使读者对流形的局域拓扑与仿射结构的实质有更清晰的认识.

第四,五,六三章着重介绍黎曼流形.度规是黎曼流形的基本几何结构.在第四章对流形引入度规,介绍保度规结构的黎曼联络与曲率、及其相关的各种曲率张量、测地线、Jacobi 场与 Jacobi 方程,并初步介绍 Einstein 引力场方程及相关问题.第五章介绍黎曼流形的子流形,用活动标架法对流形曲率张量进行计算与分析.第六章介绍黎曼对称空间,它在理论物理及可积体系中得到广泛的应用.

第七,八,九三章着重介绍对流形的整体拓扑分析:同伦、同调、特别是 de Rham 上同调及谐和形式.第九章介绍 Moise 理论、CW 复形与拓扑障碍分析.这章内容常需更多代数拓扑与现代几何基础,读者在第一次读时可暂略去.

第十,十一,十二三章介绍流形上三种重要的几何结构:辛、复、自旋结构.它们的存在受流形拓扑性质约束.它们在现代理论物理中有重要应用,现仍在发展中.

本书第二部分介绍纤维丛几何,规范场论.其中第十三,十四,十五章介绍纤维丛的拓扑结构,丛上联络与曲率,及显示丛整体拓扑非平庸的示性类.在这三章的分析中,底流形是一般微分流形,可暂未引入度规.在第十六,十七章底流形为具有度规结构的时空流形,这时可对纤维丛引入作用量,可分析场方程、守恒流等动力学体系问题.在这两章中分析讨论了瞬子、单极、超对称单极等经典规范场论中一些基本问题.

第十八至二十一章介绍 Atiyah-Singer 指标定理、族指标定理、带边流形及开无限流形的指标定理,并以量子场论反常拓扑分析为例,深入分析量子规范理论的大范围拓扑性质及各级拓扑障碍的递降继承,分析背景场拓扑性质,分数费米荷及超对称等现代理论物理前沿课题.

本书第三部分:非交换几何导引.非交换几何在量子物理、经典及量子统计、量子引力及弦论等方面得到广泛应用.第二十二章介绍非交换几何在量子物理中应用,重点介绍在量子 Hall 效应的应用.第二十三章介绍量子群与 q 规范理论,它们在量子可积体系中得到广泛应用.这是一个正在发展的领域,这里仅是一初步介绍.

为了便于阅读,在书末为第一部分列有 9 个附录,简单介绍关于拓扑、代数等方面必须掌握的基础知识.书中有部分章节是通常研究生教材未涉及领域,读者在初读时常可略去,仅作为以后科研工作中参考.书末还为第二部分列有四个附录介绍 Clifford 代数,经典李群及 Spin 群的表示,也作为以后深入学习时参考.

关于微分几何的书籍已有很多,例如,书末所列一般参考书目,按作者姓氏编排,以便查询引用.一方面,阅读这些书籍常需较宽的数学基础,对物理学家来说,要想一下掌握似较困难.另一方面,目前所见到有关微分几何书籍最多讲到 A-S 指标定理,对于 A-S 指标定理的推广及其在现代量子场论方面的应用,均很少介绍,有关资料散布在各杂志文献中.本书目的是向物理学工作者介绍现代微分几何的基本概念、方法和结果,以及它们在物理理论中的应用.关于数学术语定义,仅涉及必须的,而未追求全面而包罗万象,并且尽量采用物理学家比较容易接受的直观而又不影响严格性的说法.有些定理的繁琐抽象的证明常代以举例说明,需要深入了解的读者可参阅所引文献及书籍.本书所采用符号尽量与通常的一致,以便参阅其他书籍与文献.希望本书能够向理论物理工作者介绍现代微分几何,使之能应用拓扑与几何方法解决物理学中一些问题.本书对散布在各杂志文献中的资料作了系统整理、分析与介绍.由于作者水平有限,错误与不妥之处难免,欢迎批评指正.

作者

目　　录

第一部分　流形微分几何

第二部分　纤维丛几何、规范场论

第一部分　流形微分几何

本部分共 12 章,属于理论物理研究生的基本教材.按其特性可分为四单元

A. 流形局域微分拓扑结构与仿射结构

第一章　流形　微分流形与微分形式

第二章　流形的变换及其可积性　李变换群及李群流形

第三章　仿射联络流形

这三章的特点是暂未引入度规结构,采用不受度规约束的,可任意进行局域仿射坐标变换的活动标架,研究流形的不变性质.这三章分别介绍了流形上三种最重要的微分算子:外微分算子 d,李导数 L_X,协变微分算子 D.

B. 流形的基本几何结构(一)　黎曼流形与对称空间

第四章　黎曼流形

第五章　欧空间的黎曼子流形　正交活动标架法

第六章　齐性黎曼流形　对称空间

本单元对流形引入度规,使流形具有更丰富的几何结构.利用正交活动标架法分析流形的各种不变量.并于第六章着重分析具有对称变换群的齐性流形与对称空间,它们在理论物理中有广泛应用.

C. 流形整体拓扑结构　同伦、同调、拓扑障碍分析

第七章　流形的同伦群与同调群

第八章　上同调论　de Rham 上同调论　及其他相关伦型不变量

第九章　Morse 理论　CW 复形与拓扑障碍分析

本单元着重介绍通常代数拓扑学内容,介绍它们在微分几何中的应用.前两章从相互对偶的观点分析流形的同伦群及(上)同调群.第九章利用流形上光滑临界点特性分析流形的伦型,分析流形的定向与自旋等结构整体存在的拓扑障碍.这章内容初学者较难掌握,在初次阅读本书时,可暂略过.

D. 流形的基本几何结构(二)　辛结构　复结构　自旋结构

第十章　辛流形　切触流形

第十一章　复流形

第十二章　旋量　自旋流形

流形的度规结构,辛结构,复结构密切相关,常可由其中任两种决定第三种结构.旋量是与它们相关的重要几何结构,并在理论物理中得到广泛应用.

第一章　流形　微分流形与微分形式

在欧氏几何学中，认为两图形相等，是因为可通过欧氏运动（不改变两点间欧氏距离的运动）使两图形完全相重，欧氏运动的集合形成群，欧氏几何学正是研究在欧氏运动下空间图形的不变性质.注意到此点，19 世纪末（1871 年）Klein 对几何学及其分类作如下定义：存在一个集合（称为空间）E 及作用在此集合 E 上的变换群 G，几何是研究在变换群 G 作用下，空间 E 的不变性质.微分几何是研究微分流形在微分同胚变换下的不变性质.微分流形及其上张量场是微分几何的主要研究对象.

§1.1　流形　流形的拓扑结构

物理学中许多问题都要研究连续空间，如运动学和动力学中的普通时空，广义相对论中的弯曲时空，统计物理学中的相空间，规范理论中的内部空间与相应的底空间（普通时空）等，它们的共同特点都是具有确定维数的连续空间，为研究它们，提出流形概念.流形是我们熟悉的点、线、面以及各种高维连续空间概念的推广.可如下定义流形（manifold）：

“n 维流形局域像R^n”，更确切的说，“流形是这样一个 Hausdorff 空间，它的每点有一个含有该点的开集与R^n 的开集同胚”.

上面这句话中有几个数学名词（R^n，开集，同胚，Hausdorff 空间）要简单解释一下：

1）实 n 维线性空间R^n

R^n 是实数域上 n 维线性空间，它的元素 x 叫做向量或点，可用 n 个实数表示

$$x = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \in \mathrm{R}^n, \qquad x^i \in \mathrm{R}$$

实数 x^i（$i=1,2,\cdots,n$）称为向量 x（或称为点 x）的坐标.

在R^n 中两任意向量 x，y 间可定义加法，向量相加仍为向量，$x+y=z\in\mathrm{R}^n$，其坐标为对应坐标相加

$$z^i = x^i + y^i$$

这样定义的加法满足 Abel 群的规则，即有零元，有逆元，可结合，可交换.

在实数 $a\in\mathrm{R}$ 与向量 $x\in\mathrm{R}^n$ 间可定义乘法

$$ax=(ax^1,ax^2,\cdots,ax^n)\in\mathrm{R}^n$$

这样定义的乘法满足结合律：

$$a(bx)=(ab)x$$

并在乘法与加法间满足分配律

$$a(x+y)=ax+ay$$

这样就在R^n中定义了向量加法和向量对实数乘法运算，使R^n成为实数域R上的 n 维向量空间.类似可定义复数域上的 n 维向量空间C^n.总之可如下定义R^n：

定义 1.1　实数域上 n 维线性空间R^n是这样一个空间，其每个元素可用 n 个一定秩序的实数表示，在其元素间定义有加法(满足 Abel 群运算规则)，并定义有元素与实数的乘法(满足结合律与分配律).

2) 开集(open set)与连续映射(continuous mapping)

为了分析空间及其映射的连续性，一般常利用距离函数(度规)来定义.但是我们知道，连续性仅与邻近性有关，改变距离函数的定义(改变空间的度规)不会改变连续性，不会改变无穷点列的极限点等问题，故我们常需摆脱距离函数而研究比度规空间更抽象的拓扑空间，只注意点的邻近性而不注意其距离，可引进开集概念.开集是描述空间拓扑性质的基本概念，其严格表述可参看附录 B，这里我们给开集一个较直观的通常拓扑(usual topology)定义，它是在微分几何中所适用的定义.

定义 1.2　开集 A 是空间 S 的子集合，A 中每点的“邻域”完全在 A 中.

这里“邻域”可用任意距离函数来定义，而上述开集定义应与所选距离函数无关.

例如，实数轴R^1(一维线性空间R^1)上不含端点的开区间(a,b)是开集，但是含有端点的闭区间$[a,b]$不是开集，因为其端点 a，b 的“邻域”并未完全属于此区间$[a,b]$.

在定义 1.2 中的某点“邻域”是指距该点距离小于某给定实数的点的集合，在定义“邻域”时，需借助距离函数，但是我们强调此“邻域”可用任意距离函数来定义，与所选距离函数无关.例如，对R^n中任意两点 x 和 y，可采用下列两种距离函数：

$$d_1(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$d_2(x,y)=\max|x^i-y^i|$$

利用 d_1 定义的“邻域”为圆盘，利用 d_2 定义的“邻域”为正方体，不同距离函数定义的“邻域”形状不同.但是由于任意圆盘内有正方体，任意正方体内有圆盘，故若利用距离函数 d_1 得到 A 为开集，则相对于距离函数 d_2，A 仍为开集.这样定义的开集与“邻域”形状无关，与所选距离函数无关.

流形上连续函数 $f(x)$，即流形 M 到实数域上的连续映射 $f: M\to \mathrm{R}$. 定义连续函数，通常采用大家熟悉的 ε-δ 说法，需要利用距离函数. 对于没有定义距离函数的拓扑空间，可利用“开集”如下定义连续映射：

定义 1.3　流形间映射 $f: M\to N$，如它满足 N 中任意开集的逆像是 M 中的开集，则此映射为连续映射.

与开集定义相关的还可引入闭集，开邻域等概念：

定义 1.4　闭集(closed set)：开集 A 在集合 S 中的补集称为闭集. 闭集包含它的所有极限点.

定义 1.5　开邻域(open neighbourhood)；集合 S 中一点 a 的开邻域 N 是 S 的子集合，它含有点 a 所属的某开集.

3）同胚映射(homeomorphic mapping)与流形的拓扑性质

空间的几何性质常常是指空间在某些变换群作用下的不变性质，且可根据变换群特点对几何学进行分类. 例如非奇异线性变换，使直线仍变为直线，保持空间的仿射性质，研究这种性质的几何学称仿射几何. 其中正交变换还进一步保持图形的欧氏分类，研究在正交变换下不变性质的几何学称欧氏几何学. 现在我们需讨论更广泛的空间，其中已无直线概念，因此应讨论比线性映射更广泛的一些映射. 我们首先想到前面所提到的连续映射，它保持图形各点的邻近性不被破坏. 但是连续映射不能保持流形的维数，例如著名的 Peano 曲线(1890 年)，是一种将一维实轴区间 I 连续地满映射到二维区间 I^2 上的映射 $f: I\to I^2$，映射 f 被定义为映射族 f_n 的极限，$f_n: I\to I^2$，$f=\lim\limits_{n\to\infty} f_n$. 图 1.1(b)，(c)，(d)给出了前三步 $f_1(I)$，$f_2(I)$，$f_3(I)$，而(a)表明第一步 $f_1(I)$的作图方法：连接正方形 I^2 的对角线，将正方形作三角分割，然后再将各相邻三角形中点连接. 类似，很容易推广至第任意 n 步的 $f_n(I)$，在第 n 步后，二维区间 I^2 的所有点都在 $f_n(I)$的 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 的距离内. 于是在 $n\to\infty$的极限下，得连续的满映射 f，它使一维区间 I 映满在二维区间 I^2 上.

注意上述映射并非 1－1 对应，而只是使二维区间 I^2 上所有点均在像 $f(I)$的邻域内. 上例说明，连续满映射不能保持流形的维数. 为了保持流形维数，应对连续映射给以进一步的限制.

另一方面，我们知道 1－1 对应是区别集合的标志. 但是 1－1 对应也不能保持空间维数，如 Cartan 的例子，可使 2 维开区间

$$I^2=\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \mid 0<x,y<1\}$$

的点(x,y)与一维开区间

$$I=(0,1)=\{z\in \mathrm{R}\mid 0<z<1\}$$

的点 z 间建立 1－1 对应，即按十进位无限小数表示 x 与 y(因为 $x,y\in(0,1)$)

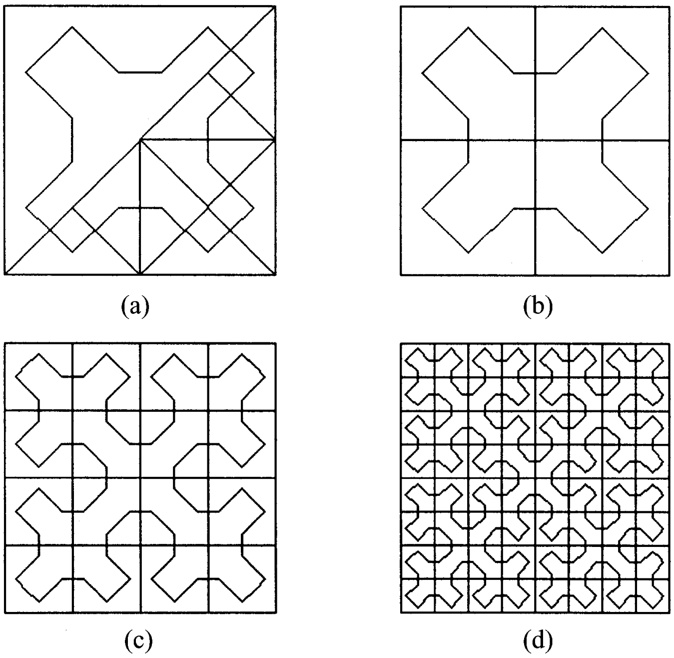

图 1.1
(a)Peano 曲线作图法示意，
(b),(c),(d)Peano 曲线 $f_n(I)$的前三步

$$x = 0.\, x^1 x^2 \cdots$$
$$y = 0.\, y^1 y^2 \cdots$$

由上两数可作小数

$$z = 0.\, x^1 y^1 x^2 y^2 \cdots$$

显然 $z \in (0,1)$，于是建立了由二维区间 I^2 1—1 对应于一维区间 I 上的映射.注意这时是 1—1 对应，但不是连续映射.

将上两者结合，可得到保持流形维数的同胚映射：

定义 1.6　同胚映射为 1—1 对应的连续满映射，且其逆映射也是连续的.

连续映射保持流形各点的邻近性，当进一步要求流形中任两不同点仍映射为不同点，且不会产生新的点，即同胚变换.可将流形的同胚变换想像成流形用橡皮做成，可任意拉伸、弯曲，但不允许撕裂(一分为二)，也不允许把不同点粘在一起(二合为一).

在同胚映射下保持不变的性质为拓扑性质，如开集、收敛序列、紧致性、分离性、连通性等都是拓扑性质，请参看附录 B 的简单介绍.

4) Hausdorff 空间与流形的可分性(separation)

定义 1.7　Hausdorff 空间是这样一个空间，其中任意两不同点 a 与 b 间，均有不相交的开邻域.即存在开集 U_α 与 U_β

$$a \in U_\alpha, \quad b \in U_\beta$$

而 $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$.

在流形定义中强调流形是一个 Hausdorff 空间,就强调了流形的可分性,使连接任意两点的连线可无限再分.描述流形的可分性有许多种不同的说法,而定义 1.7 的叙述是可分性公理中较强的一个,也是微分几何中最常用的一个.

具有通常拓扑的实数域是 Hausdorff 空间.Hausdorff 空间的点都是闭集.

在我们简单介绍了以上几个常用的数学名词后,让我们再强调复述一下流形的定义:

定义 1.8　实(复)n 维流形是这样一个 Hausdorff 空间,它的每点有开邻域与 R^n(C^n)的开集同胚.

下面举些简单例子说明流形的概念.

例 1.1　圆 S^1 是一维流形.

例 1.2　图 1.2 中所画的一些一维图形都不是流形,因为在结点处开邻域不与 R^1 的开集同胚.

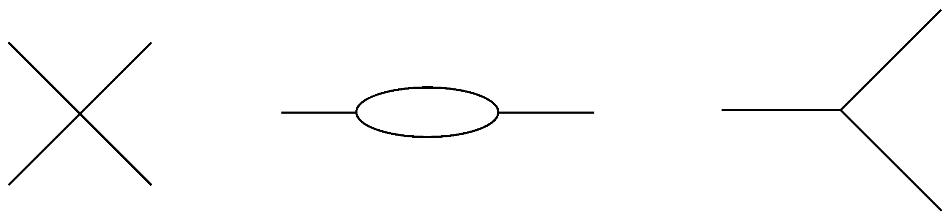

图 1.2　不是一维流形的图形举例

例 1.3　三维欧氏空间 E^3 中单位球面 S^2 是一个二维流形.

例 1.4　E^3 中锥面

$$M = \{(x, y, z) \in E^3 \mid x^2 - y^2 - z^2 = 0\}$$

不是流形,因为在原点邻域不与 R^2 同胚.如再进一步限制为 $x \geqslant 0$,即为半个锥面

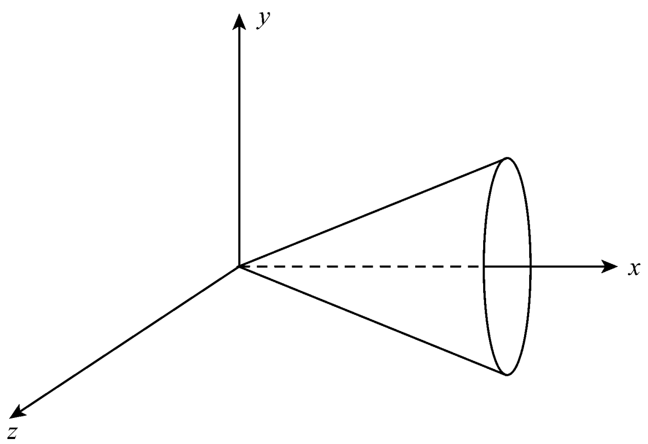

图 1.3　E^3 中半锥面

$$M_0=\{(x,y,z)\in E^3 \mid x^2-y^2-z^2=0, 且\ x\geqslant 0\}$$

为二维流形.下节我们将进一步分析流形的微分结构,说明半锥不是光滑流形(不是可微流形),因其原点处非光滑.

§1.2　微分流形　流形的微分结构

为了对流形上函数及流形上张量场进行微分运算,常可对流形引进坐标系,可利用流形 M 上的开集对$\mathbb{R}^n$ 的开集的同胚映射来对流形 M 引入局部坐标系.由流形的定义知流形局域像$\mathbb{R}^n$,流形中任一点都有含该点的开集 U 与$\mathbb{R}^n$ 的一个开集 V 同胚,令 φ 为相应的同胚映射

$$\varphi: U\to V=\varphi(U)$$

流形 M 上点 $p\in U$,其像 $\varphi(p)$在$\mathbb{R}^n$ 中的坐标$(x_1, x_2,\cdots, x_n)$就叫做 p 点的坐标,这样利用对$\mathbb{R}^n$ 上开集 V 的同胚映射 φ,可对流形 M 上开集 U 内各点建立坐标系.(U,φ)称为流形 M 上的局部坐标系,或简称坐标卡(chart).

流形的局域可用坐标刻划,同时又可随时变换坐标,我们在下面讨论中,一方面要利用坐标系这个工具,同时又要不受坐标系的束缚,虽然有时明显地写出坐标表达式,但是更通常的是写出在坐标变换下不变的形式.流形的某一局部坐标系本身没有几何意义,而我们主要研究与坐标变换无关的一些不变量.

过去对空间建立坐标系时,常利用空间的度量性质.而我们在建立局部坐标系时,利用了同胚映射,可完全不受度量的约束,可研究流形在同胚变换下的不变性质.爱因斯坦从发表狭义相对论(1908 年)到发表广义相讨论(1915 年)花了七年时间,他说:“为什么建立广义相对论又用了七年时间呢? 主要原因是,要摆脱坐标必须有直接度量意义这个旧概念是不容易的.”本书从开始就采用不受度规限制的,可任意进行坐标变换的坐标系,何时引入度量,使流形成为黎曼流形,我们要特别声明.在本书前三章分析没有定义度规的微分流形的性质.

n 维流形一方面局域像$\mathbb{R}^n$,另方面,一般不能将整个流形 M 与$\mathbb{R}^n$ 的开集同胚.例如,二维球面 S^2 最少需用两个开集覆盖.若整个流形 M 需用若干个开集$\{U_\alpha\}$所覆盖,

$$\bigcup_\alpha U_\alpha=M$$

开集族$\{U_\alpha\}$称为流形的开覆盖.而所有坐标卡的集合

$$\mathscr{A}=\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$$

称为流形 M 的坐标卡集(atlas).若开集$\{U_\alpha\}$中两个开集 U_α 与 U_β 间有交,$U_\alpha\cap$

$U_\beta \neq \varnothing$,如图 1.4 所示,则相应两个坐标卡集(U_α,φ_α)与(U_β,φ_β)间还应满足相容条件.φ_α 与 φ_β 将交叠区 $U_\alpha \cap U_\beta$ 同胚映射到$\mathbb{R}^n$ 的两个非空开集,这两个开集间映射相当于流形上坐标变换:

$$f = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$
$$x^i \mapsto y^i = f^i(x)$$

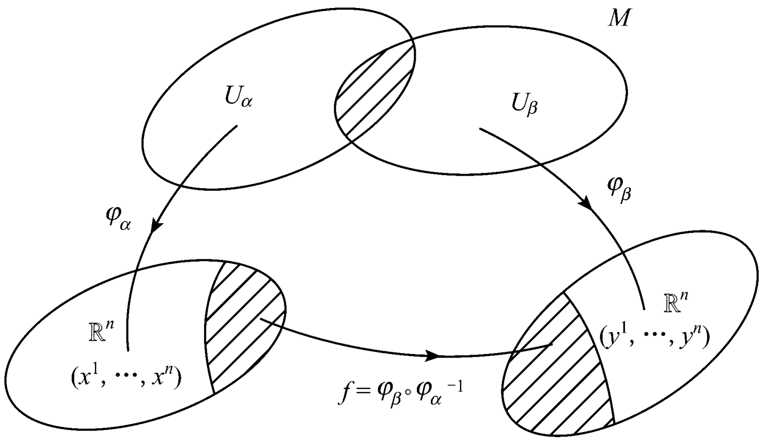

图 1.4 流形 M 的两个有交叠的坐标卡

$f^i(x)$是$\mathbb{R}^n$ 空间开集上的 n 个实连续函数.为了能在流形上建立分析运算,要求上述坐标变换是可微的.如要求上述 n 个实函数具有 k 阶连续偏导数,即映射 f 属于 C^k 类,则称这两坐标卡为 C^k 相容.

下面我们介绍流形的微分结构(differentiable structure)这一重要概念.流形的微分结构表明流形开覆盖中各开集是如何粘接在一起的,表明了流形整体的平滑程度,可如下定义:

定义 1.9 当流形 M 上坐标卡集$\mathscr{A}=\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$,还满足下面三条件,则称其为流形 M 的 C^k 微分结构(或称为完备的 C^k 相容坐标卡集):

1) $\{U_\alpha\}$为流形 M 的开覆盖;

2) $\mathscr{A}$中任意两个坐标卡都是 C^k 相容;

3) $\mathscr{A}$为具备上两特性的最大坐标卡集,如坐标卡(U,φ)与$\mathscr{A}$中所有卡 C^k 相容,则(U,φ)$\in\mathscr{A}$.$\mathscr{A}$中仅满足前两条件的集合,称为 C^k 微分结构的一个基,或称为 C^k 坐标卡集.

流形 M 有两个坐标卡集$\mathscr{A}=\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$与$\mathscr{A}'=\{U_\beta, \varphi_\beta\}$,如其并集$\{(U_\alpha, U_\beta; \varphi_\alpha, \varphi_\beta)\}$仍为 C^k 坐标卡集,则称这两个坐标卡集等价.每一 C^k 相容坐标卡集包含在一个惟一的完备的 C^k 相容坐标卡集中,所以在构造微分结构时,只要指出它的一个 C^k 相容坐标卡集就可以了.

具有 C^k 微分结构的拓扑流形 M,即具有 C^k 坐标卡集等价类的流形,称为 C^k 流形.当流形 M 上给定了一个 C^∞ 微分结构,则称流形 M 为光滑流形,或称微分

流形(differentiable manifold).

当流形 M 上给定一个 C^{∞} 微分结构,即各映射 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 为实解析函数,它们在流形上各点均可展开为收敛的 Taylor 级数,则称 M 为实解析流形(real analytic manifold).

在上述定义中,将实数域R^n 都换为复数域C^n,当各映射 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 为复解析函数(全纯函数)时,则流形 M 称为复解析流形,或简称复流形(complex manifold).

对微分流形,可分析其上函数的可微性.如图 1.5 所示,设 f 为定义在流形 M 上的实函数,即

$$f: M \to \mathrm{R}$$
$$M \ni p \mapsto f(p) \in \mathrm{R}$$

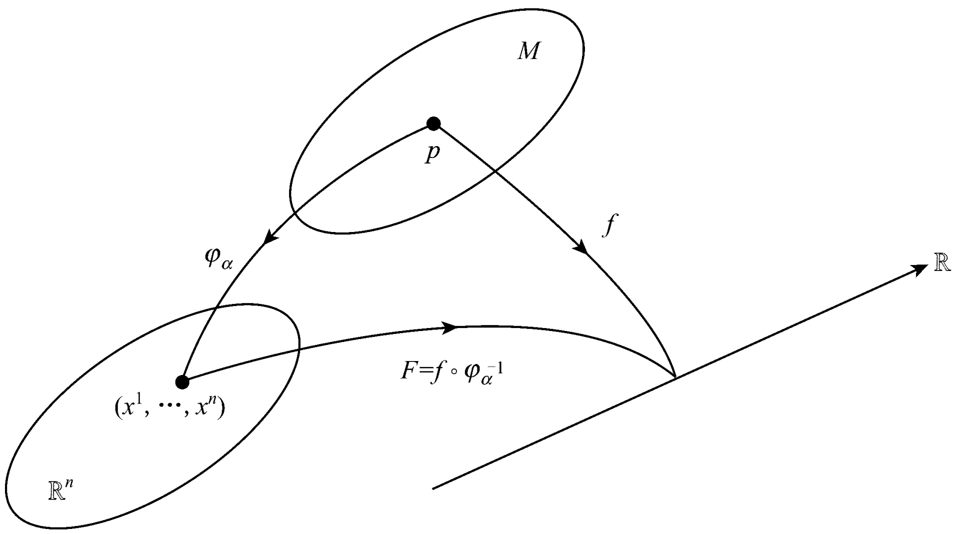

图 1.5　流形上的函数 $f(p)$

再设$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$为含有 p 点的一个容许坐标卡,则 $F = f\circ \varphi_\alpha^{-1}$ 为定义在R^n 开集上的实函数.

函数 f 在 p 点称为可微的,如果函数 F 在 $x = \varphi_\alpha(p)$点为可微.可以证明函数 f 的可微性与允许坐标卡的选取无关.例如,若有另一个含有 p 点的坐标卡(U_β, φ_β),则因为

$$f\circ \varphi_\beta^{-1} = (f\circ \varphi_\alpha^{-1})\circ(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})$$

由于 $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ 属 C^{∞} 类(为光滑的),故 $f\circ \varphi_\alpha^{-1}$ 与 $f\circ \varphi_\beta^{-1}$ 在相应点都是可微的.

类似我们也可分析微分流形间连续映射的可微性.例如,设 f 为从 m 维微分流形 M 到 n 维微分流形 N 上的连续映射(见图 1.6)

$$f: M \to N$$

$$p \mapsto q = f(p)$$

在 M 与 N 的坐标卡集中,存在含 p 的(U, φ)与含 $q = f(p)$的(V, ψ),则函数

$$F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : x \mapsto y = F(x)$$

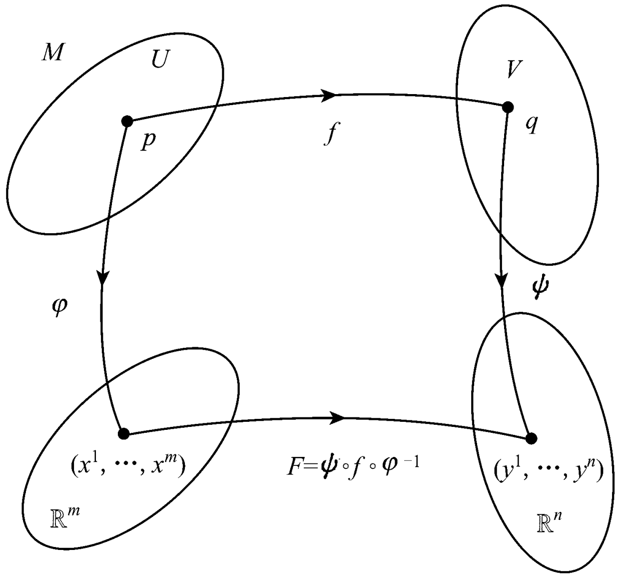

图 1.6 流形间的映射 f 及其诱导映射 F

$F(x)$的可微性决定了映射 f 的可微性.以后为简单起见,我们将常常不区别 f 与 F, p 点及其坐标 x, q 点与其坐标 y,而认为 $q = f(p)$与 $y = F(x)$有相同含义.

当流形 M 与 N 具相同维数,且映射 f 为同胚映射时,如进一步要求此同胚映射可微,则称为微分同胚(diffeomorphism),两流形微分同胚必同胚,但是两个同胚的流形不一定微分同胚.

拓扑是研究连续性的最自然的数学结构,所有拓扑空间可按是否同胚分为不同等价类,而流形的微分结构是研究可微性的最自然的数学结构,同胚的流形按其是否微分同胚又可进一步分类,属于不同微分同胚等价类的流形具有不同的微分结构,即同胚流形可能有不同的微分结构,例如 Milnor 在 1956 年曾指出,七维球 S^7 除典型的R^8 中单位球面的微分结构外,还可以有另一种微分结构:Milnor 怪球 Σ^7,两者同胚,但不是微分同胚,微分结构不同.数学家还曾证明,低维($d \leqslant 3$)拓扑流形有惟一微分结构,但是高维拓扑流形(包括R^4)常可存在多种微分结构.在同胚的拓扑流形上可存在不等价的微分结构,所以可以说微分结构有独立于拓扑结构的意义.对于一个可微流形,如何确定其上的微分结构,是微分几何中最重要最困难的问题之一.

下面举几个微分流形的例子:

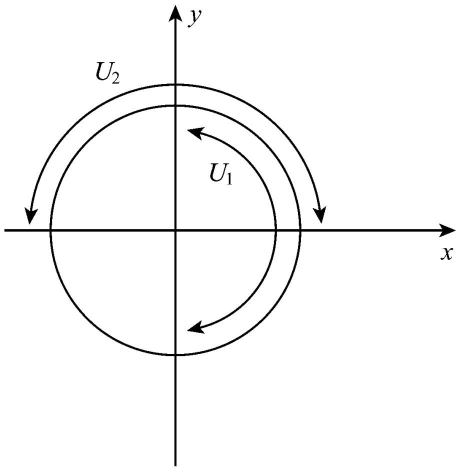

图 1.7　一维圆 S^1

例 1.5　一维圆 S^1(图 1.7)

可表示为二维平面 E^2 中单位圆

$$S^1 = \{(x, y) \in E^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

S^1 可取如下四个坐标卡来复盖:

$$U_1 = \{p \in S^1 \mid x > 0\},\ \varphi_1(p) = y$$

$$U_2 = \{p \in S^1 \mid y > 0\},\ \varphi_2(p) = x$$

$$U_3 = \{p \in S^1 \mid x < 0\},\ \varphi_3(p) = y$$

$$U_4 = \{p \in S^1 \mid y < 0\},\ \varphi_4(p) = x$$

以上四个开集$\{U_i\}(i=1,\cdots,4)$构成 S^1 的一个开复盖.下面分析相应坐标卡集$\{(U_i, \varphi_i)\}(i=1,\cdots,4)$的相容结构.

在 U_1 和 U_2 的交叠区,转换函数

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$x = \sqrt{1 - y^2}$$

它们都是光滑可微函数,是 C^∞ 相容.类似可证其余坐标卡相互都是 C^∞ 相容.所以 S^1 是一维光滑流形.

例 1.6　二维球面 S^2(图 1.8)

$$S^2 = \{(x, y, z) \in E^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

可如下取球极坐标来表达 S^2 上 P 点的坐标:

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\theta$$

作极射投影,在赤道平面上投射点 Q 的坐标

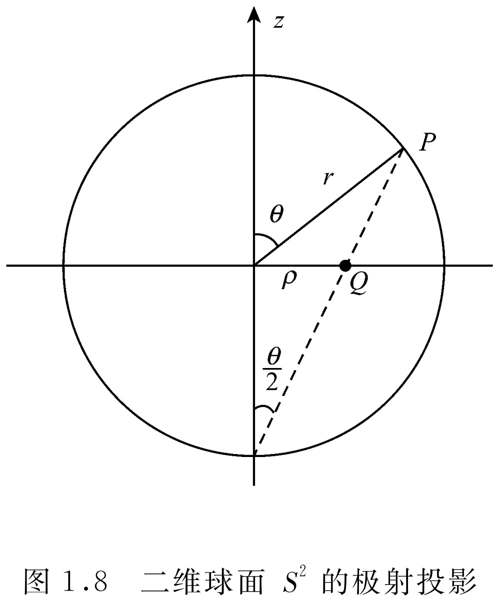

图 1.8　二维球面 S^2 的极射投影

$$x_1 = \rho\cos\phi = \frac{x}{(1+z)}$$

$$x_2 = \rho\sin\phi = \frac{y}{(1+z)}$$

其中 $\rho = r\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = r\,\frac{\sin\theta}{(1+\cos\theta)}$,可取如下两坐标卡组成 S^2 的坐标卡集$\{(U_\pm, \varphi_\pm)\}$:

$$U_+ = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \neq -1\};\quad \varphi_+ :(x, y, z) \to \left(\frac{x}{(1+z)}, \frac{y}{(1+z)}\right)$$

$$U_-=\{(x,y,z)\in S^2 \mid z\neq 1\};\qquad \varphi_-:(x,y,z)\to\left(\frac{x}{(1-z)},\frac{y}{(1-z)}\right)$$

而以上同胚映射 $\varphi_\pm$ 的逆映射是

$$\varphi_+^{-1}:\mathrm{R}^2\to U_+,\qquad \varphi_+^{-1}(x_1,x_2)=\left(\frac{2x_1}{1+\rho^2},\frac{2x_2}{1+\rho^2},\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\right)$$

$$\varphi_-^{-1}:\mathrm{R}^2\to U_-,\qquad \varphi_-^{-1}(x_1,x_2)=\left(\frac{2x_1}{1+\rho^2},\frac{2x_2}{1+\rho^2},\frac{\rho^2-1}{1+\rho^2}\right)$$

在交叠区，$\varphi_+(U_+\cap U_-)=\varphi_-(U_+\cap U_-)=\mathrm{R}^2-\{0\}$，两坐标卡间的坐标变换

$$\varphi_-\circ\varphi_+^{-1}(x_1,x_2)=\varphi_+\circ\varphi_-^{-1}(x_1,x_2)=\left(\frac{x_1}{\rho^2},\frac{x_2}{\rho^2}\right)$$

是无穷阶可微的，即它们是 C^∞ 相容的，故 S^2 为二维光滑流形.

将 n 维球面 S^n 看作R^{n+1}中单位球面，类似上述步骤，可采用球极投射. 进而可证 S^n 为 n 维光滑流形，这样得到的 S^n 的微分结构称为 S^n 上的标准微分结构(standard differential structure on the n-sphere S^n).

例 1.7 李群流形 $G=\{g\}$

每群元 g 是一点，整个李群 G 为流形，可用群的定义表示中的实参数来表示李群流形的点坐标.

有些简单的群流形可与一些简单拓扑流形微分同胚. 例如

一维紧致 Abel 群 $U(1)=\{e^{i\theta},\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$，即幺模复数乘法群，与 S^1 流形微分同胚，$U(1)\simeq S^1$.

SU(2)群，其群元 g 的基本表示(二维忠实表示)是 2×2 幺正矩阵 $g^\dagger=g^{-1}$，$\det g=1$，可表示为

$$g=\begin{pmatrix} a & b\\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^1+\mathrm{i}x^2 & x^3+\mathrm{i}x^4\\ -x^3+\mathrm{i}x^4 & x^1-\mathrm{i}x^2\end{pmatrix}$$

满足

$$\det g=|a|^2+|b|^2=\sum_{i=1}^{4}(x^i)^2=1$$

SU(2)群流形是三参数群，相当于四维欧空间中单位球面 S^3，即 SU(2)≅S^3.

例 1.8 n 维实射影空间$\mathrm{R}P^n$.

$\mathrm{R}P^n$ 为R^{n+1}空间中通过原点的直线集合，每直线为一点，所有通过原点的直线集合形成 n 维流形. 即如点

$$(x^0,x^1,\cdots,x^n)\sim(ax^0,ax^1,\cdots,ax^n),\qquad \forall\, a\in\mathrm{R}-\{0\}$$

即当 $x\in\mathrm{R}^{n+1}-\{0\}$，$a$ 为任意非零实数，可将 ax 看成与 x 相互等价 $x\sim ax$，可把 x 的～等价类记作

$$[x] = [x^0, x^1, \cdots, x^n]$$

每等价类看成RP^n 中一点，$\{x^i\}_{(i=0,\cdots,n)}$称为$[x]$的齐次坐标.

由于通过$\mathbf{R}^{n+1}$原点的每根直线交 S^n 球面于两点，故RP^n 也相当于将 S^n 球面上各对顶点看成一点所形成流形，即

$$\mathrm{R}P^n \simeq (\mathrm{R}^{n+1} - \{0\})/(\mathrm{R} - \{0\}) \simeq S^n / Z_2$$

例如

$$\mathrm{R}P^3 \simeq (\mathrm{R}^4 - \{0\})/(\mathrm{R} - \{0\}) \simeq S^3 / Z_2 \simeq \mathrm{SU}(2)/Z_2 \simeq \mathrm{SO}(3)$$

其中 $Z_2 \simeq S^0$ 为由两元素组成的群.以上分析表明在 S^n 与RP^n 间存在自然覆盖映射 φ：

$$\varphi: S^n \to \mathrm{R}P^n,$$

映射 φ 为 C^∞ 映射，且局域具有 C^∞ 逆映射，故由 S^n 的 C^∞ 微分结构可诱导出RP^n 的 C^∞ 微分结构，RP^n 为 n 维微分流形.

例 1.9　复 n 维射影空间CP^n；

CP^n 为C^{n+1}空间中通过原点的复直线集合.即在C^{n+1}空间中建立等价关系 $z \sim cz$

$$(z^0, z^1, \cdots, z^n) \sim (cz^0, cz^1, \cdots, cz^n), \qquad \forall c \in \mathrm{C} - \{0\}$$

可把 z 的等价类记作

$$[z] = [z^0, z^1, \cdots, z^n]$$

每等价类$[z]$看成CP^n 中一点，CP^n 为复 n 维(实 $2n$ 维)微分流形.

下面我们以最低维的CP^1 为例作更仔细地分析，CP^1 空间中各点齐次坐标为

$$[z] = [z^1, z^2] = [cz^1, cz^2] \qquad (z^1, z^2 \text{ 不全为零})$$

CP^1 可用两个开集覆盖：

U_1 为 $z^1 \neq 0$ 的区域，可选非齐次坐标

$$\zeta = \frac{z^2}{z^1} = u + \mathrm{i}v$$

U_2 为 $z^2 \neq 0$ 的区域，可选非齐次坐标

$$\zeta' = \frac{z^1}{z^2}$$

在交叠区(z^1 与 z^2 都非零).

$$\zeta' = \frac{1}{\zeta} = \frac{u}{u^2 + v^2} - \mathrm{i}\frac{v}{u^2 + v^2}, \qquad u, v \text{ 不全为零}$$

相容条件即 U_1 与 U_2 间映射

$$f: U_1 \to U_2$$

$$\zeta \to f(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$$

$$(u, v) \to \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{-v}{u^2 + v^2}\right)$$

为复解析映射,故$\mathbb{C}P^1$ 为复解析流形.如令

$$u = \frac{x}{1+z}, \quad v = \frac{y}{1+z}$$

则

$$\frac{u}{u^2 + v^2} = \frac{x}{1-z}, \quad \frac{-v}{u^2 + v^2} = \frac{-y}{1-z}$$

与例 2 比较知$\mathbb{C}P^1$ 与 S^2 有相同的微分结构,即二者微分同胚,$\mathbb{C}P^1 \simeq S^3/U(1) \simeq S^2$.

$\mathbb{C}P^n$ 为$\mathbb{C}^{n+1}$空间通过原点的复线丛,它可以看作是$\mathbb{C}^{n+1}$空间中球面 S^{2n+1} 上的点,还可差 $U(1)$相因子$\{Z^k\} \sim \{e^{i\alpha} Z^k\}$,故

$$\mathbb{C}P^n \simeq S^{2n+1}/U(1) \simeq \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}P^{n-1}$$

$$\mathbb{C}P^1 \simeq S^3/U(1) \simeq S^2 \simeq \mathbb{C}^1 \cup \{\infty\}$$

例 1.10 乘积流形

两微分流形的乘积流形 $M \times N$ 仍为微分流形.设$\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$与$\{V_\beta, \psi_\beta\}$分别为 M, N 的坐标卡集,对乘积流形 $M \times N$,存在光滑的自然投影

$$\Pi_1: M \times N \to M$$

$$\Pi_2: M \times N \to N$$

于是$\{U_\alpha \times V_\beta: \varphi_\alpha \circ \Pi_1 + \psi_\beta \circ \Pi_2\}$为 $M \times N$ 流形上的坐标卡集,由它们决定了乘积流形的微分结构.例如

$$\text{圆柱面} = S^1 \times \mathbb{R}$$

$$\text{二维环面}\, T^2 = S^1 \times S^1$$

§1.3 切空间与切向量场

前两节分析了微分流形的特点,流形 M 是局域像$\mathbb{R}^n$ 的拓扑空间,并且是可微的,可以利用分析工具来研究流形.分析的一个重要方法就是分析对象的无穷小部分,常可使问题线性化而便于研究.例如:

函数在一点附近的性质可用其导数表示.

李群在恒等元附近的局域性质可用李代数表示.

曲线在一点附近的性质可用该点切线表示.

同理,对于一个微分流形 M,在每点附近的性质可用线性空间(切空间)来逼近.切空间是由切向量组成,我们首先来研究如何定义在流形 M 中 p 点沿某确定方向上的切向量,此切向量应可实质地定义,而与坐标系的选取无关,即与该点邻域坐标卡(U,φ)的选取无关.

一般线性空间$\mathbb{R}^n$ 中的向量,可用连接空间两点间的有向直线表示.对于微分流形,已无直线概念,不能用这种方法表示向量.如何将切向量概念推广到流形上?

微分流形上可定义光滑实函数,它们的定义与坐标系的选取无关.流形上可微函数之和(可逐点求和)仍为可微函数,可微函数与实数乘,以及可微函数乘可微函数(可逐点相乘)仍为可微函数,故流形 M 上可微函数集合为实数域上的代数 $\mathscr{F}(M)$.我们可首先研究流形 M 在 p 点邻域的可微函数集合,记为 $\mathscr{F}_p(M)$.可利用作用在 $\mathscr{F}_p(M)$上的线性微分算子来定义流形 M 上过点 p 的切向量.它是$\mathbb{R}^n$ 中向量的自然推广.为说明此点,我们先来研究作用在$\mathbb{R}^n$ 空间函数 f 上的线性微分算子.

在$\mathbb{R}^n$ 空间,点 x 沿方向 Δx 位移,设位移向量 Δx 为小量,可对函数 $f(x)$作 Taylor 展开

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) &= f(x)+\sum_{i=1}^{n}(\Delta x)^i \frac{\partial}{\partial x^i}f+\text{高阶小量} \\ &\equiv f(x)+\delta f+\text{高阶小量} \end{aligned}$$

这里我们注意,线性空间$\mathbb{R}^n$ 中点 x 又可称为向量 x,当选定坐标系后,此向量可用 n 个分量$\{x^i\}$(均为实数)来表示,点 x 的分量 x^i 与坐标选取有关,而向量 x 本身与坐标选取无关.同样,位移向量 Δx 为过 x 点的向量,本身与坐标选取无关,而其分量$(\Delta x)^i$ 则依赖坐标选取,我们将它与$\partial_i \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^i}$结合,可得到作用于函数 f 上的方向导数 δ

$$\delta = \sum_{i=1}^{n}(\Delta x)^i \partial_i$$

δ 是作用在函数 f 上的线性微分算子,是沿位移向量 Δx 方向的方向导数.δ 本身与坐标系的选取无关,它可以表示为沿坐标线方向的方向导数$\{\partial_i\}$的线性组合,展开系数$(\Delta x)^i$ 可看作方向导数 δ 的坐标分量,它们恰为位移向量 Δx 的分量.我们可利用方向导数 δ 来表示过 x 点的位移向量 Δx.

对微分流形 M,可类似定义过每点沿一确定方向的切向量.首先在流形 M 上作一条通过 p 点的光滑曲线 $x(t)$.利用此曲线 $x(t)$来选出过 p 点的一个确定方向.光滑曲线 $x(t)$相当于实轴上线段$(-\varepsilon,\varepsilon)$(用参数 t 标志)到流形 M 上的可微映射

$$x:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$$
$$t\mapsto x(t)\in M$$

可选 $t=0$ 点对应于 p 点；$x(0)=p$.对于流形 M 上任一可微函数 $f\in\mathscr{F}_p(M)$，将此函数限制在光滑曲线 $x(t)$上，得参数 t 的可微函数 $f(x(t))$，此函数在 p 点沿曲线改变速度可表示为

$$X_p f=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x(t))\Big|_{t=0}$$

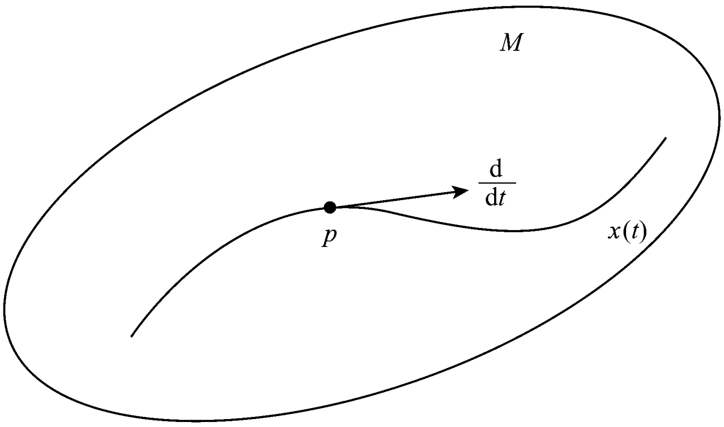

图 1.9　利用曲线 $x(t)$选出过 p 点确定方向

可将作用在流形任意函数上的线性微分算子 $X=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$定义为切于曲线 $x(t)$的切向量，如此定义的切向量是R^n 上方向导数在流形上的推广.

在 p 点邻域选局部坐标 $x=(x^1,x^2,\cdots,x^n)$，这时，上式可表示为

$$X_p f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x^i}f\Big|_p \tag{1.1}$$

若我们选过 p 点的曲线沿坐标线 x^j，即 $x^j=t$，则得到沿坐标线 x^j 的切向量$\partial_j=\frac{\partial}{\partial x^j}$，由(1.1)式知，过 p 点沿确定方向的切向量 X_p 为$\{\partial_j\}$的线性组合.集合$\{\partial_j:j=1,2,\cdots,n\}$称为切向量 X_p 的坐标基矢，当选定局域坐标系后，它就被选定. X_p 用$\partial_j|_p$ 展开的系数$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\Big|_p$ 为切向量 X_p 的分量.沿曲线 $x(t)$的无限小位移 Δx 在局域坐标系中的分量为 Δx^i，被 Δt 除仅改变其尺度，不改变其方向，故$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x^j}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}$表明了曲线 $x(t)$的切向量的分量.注意，切向量 $X_p=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}$与坐标系的选取无关，而其分量$\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\Big|_p$ 与坐标系的选取有关.切矢 X_p 对流形上任意函数$f(x(t))$

的作用 $Xf|_p$ 为 f 在 p 点沿曲线 $x(t)$的方向导数.

利用通过点 p 的曲线 $x(t)$,可得到沿此曲线的切向量 X_p,另一方面,当给定在点 p 邻域的线性组合

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \eta^i(x)\partial_i, \quad \eta^i(x) \in \mathscr{F}(M) \tag{1.2}$$

可以证明它必为过 p 点某曲线在 p 点的切向量.例如,可选在 $t=0$ 时通过 p 点的曲线

$$x^i = x^i(p) + \eta^i t \tag{1.3}$$

则在 $t=0$ 点切于此曲线的切向量是

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \eta^i \partial_i$$

过 p 点的所有切向量的集合形成流形 M 在 p 点的切空间 $T_p(M)$,其中可定义向量加法(对应系数相加),及向量与实数的乘法(各系数乘同一实数),且可证明$\{\partial_i: i=1,\cdots,n\}$线性独立.存在下述定理:

定理 1.1　n 维流形 M 在点 p 的切空间 $T_p(M)$为实数域上 n 维线性空间,当选局域坐标系后,基矢组$\{\partial_i: i=1,\cdots,n\}$线性独立且完备.

证明　如认为基矢组$\{\partial_i\}$线性相关,即存在 n 个不全为零的常数 a^i,使

$$\sum_{i=1}^{n} a^i \partial_i = 0$$

将它作用于过点 p 的坐标线 x^j,得

$$\sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = a^j = 0, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

出现了矛盾,故基矢组$\{\partial_i\}$线性独立.

另一方面,过 p 点的任意切向量均可用基矢组$\{\partial_i\}$展开,即这组基矢完备.定理得证. □

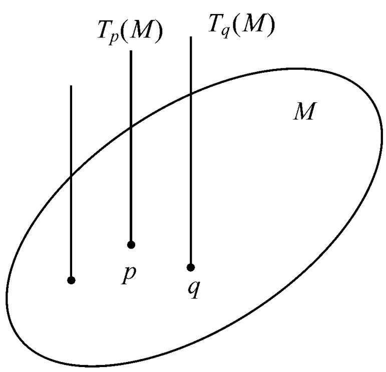

图 1.10　切丛示意图

流形 M 上所有各点切空间的并集

$$T(M) = \bigcup_p T_p(M) \tag{1.4}$$

称为流形 M 的切丛.切丛 $T(M)$是 $2n$ 维流形,局域是直积流形,但整体不一定是.在同一点的切向量可相加,而不同点的切向量无关系.切丛 $T(M)$可用图 1.10 示意表示.

通过流形 M 上每点有一 n 维切空间 $T_p(M)$,可通过该点直线示意表示,在不同点的切空间相互无关,用

相互平行直线表示.在每点 p 处的切空间 $T_p(M)$ 与 n 维线性空间 R^n 同构，$T_p(M)\simeq\mathrm{R}^n$.

在点 p 邻域 U,切丛局域同构于直积流形；

$$T(U)=\bigcup_{p\in U}T_p(M)\simeq U\times\mathrm{R}^n \tag{1.5}$$

但在整个流形 M 上切丛 $T(M)$一般不再是平庸的直积流形.整体拓扑非平庸性正是我们以后要重点分析的.

下面介绍向量场 $X(x)$这一重要概念.向量场 $X(x)$又称为切丛 $T(M)$的一个截面(section),是在流形 M 上每点 p 选出一个切向量 $X_p\in T_p(M)$,当选局域坐标系后,切向量场 $X(x)$可表示为

$$X(x)=\sum_{j=1}^{n}\xi^j(x)\partial_j \tag{1.6}$$

如函数 $\xi^j(x)$连续,可微,则称向量场 $X(x)$连续、可微.

流形 M 上可微向量场$X(x)$可看成是作用在流形上的可微函数集合$\mathscr{F}(M)$上的线性微分算子,具有性质

1）线性

$$X(af+bg)=aXf+bXg\quad(a,b\in\mathrm{R},f,g\in\mathscr{F}(M)) \tag{1.7}$$

2）满足 Leibniz 法则

$$X(fg)=fXg+gXf \tag{1.8}$$

具有上述性质的线性微分算子,可作为流形 M 上可微向量场的定义.为了说明向量场 X 的可微性,只需证明对任意可微函数 $f\in\mathscr{F}(M)$, Xf 仍为 M 上可微函数即可.

令$\mathscr{X}(M)$为 M 上所有可微向量场集合,即切丛截面集合,在其中可定义向量场间加法(如选局域坐标系,为对应系数相加),此加法满足 Abel 群规则.可定义向量场与数乘法(为对应系数与数乘),此乘法满足结合律与分配律.因此向量场集合$\mathscr{X}(M)$形成实数域上无穷维向量空间,进一步可在此集合内部定义李括号乘法运算,即对于$\mathscr{X}(M)$中任意两向量场

$$X=\sum_j\xi^j(x)\partial_j,\qquad Y=\sum_j\eta^j(x)\partial_j$$

可定义它们间李括号运算$[X,Y]$

$$[X,Y]f=X(Yf)-Y(Xf)=\left(\xi^j\frac{\partial\eta^k}{\partial x^j}-\eta^j\frac{\partial\xi^k}{\partial x^j}\right)\partial_k f \tag{1.9}$$

这里采用了重复指标求和的惯例,即(1.9)式右端省略了求和号 $\sum_{jk}$,以后如不加声明,均采用此习惯约定.(1.9)式对流形 M 上任意实函数 $f\in\mathscr{F}(M)$均成立.两线性微分算子相乘的对易子,本来应为二阶微分算子,但是上述运算表明其二阶微