

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

普通物理教程之三

电 磁 学

(第 2 版)

张玉民 戚伯云 编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书为中国科学技术大学编写的“普通物理教程”之三。

本书在着重对电磁学基本概念、基本规律与基本方法进行阐述的基础上,重视内容取材的更新,适当增添一些与电磁学相关的现代科技知识介绍,使学生开阔眼界、扩大知识面。在内容讲述上,力求做到突出重点、层次分明、由浅入深、易于理解。为帮助读者加深对基本概念和规律的理解,书中精选了不少有启发性的例题。结合各章所讲内容,章末均附有一定难度和数量的习题,供学生课后练习和检验对内容的理解程度。

本书可作为综合大学、理工院校及师范院校的普通物理电磁学教材,也可供大专院校、中学物理教师及教学研究者参考。

图书在版编目(CIP)数据

电磁学/张玉民,戚伯云编.—2版.—北京:科学出版社,2007
普通高等教育“十一五”国家级规划教材·普通物理教程之三
ISBN 978-7-03-017997-5

I. 电… II. ①张…②戚… III. 电磁学-高等学校-教材 IV. O441

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 105484 号

责任编辑:张邦固 贾 杨/责任校对:鲁 素

责任印制:张克忠/封面设计:卢秋红

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2000 年 8 月第 一 版 开本:B5 (720×1000)

2007 年 2 月第 二 版 印张:24 1/4

2007 年 2 月第一次印刷 字数:468 000

印数:13 001—18 000

定价:29.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

目 录

第 1 章 真空中的静电场	1
§ 1.1 电荷与库仑定律	1
§ 1.2 电场与电场强度	8
§ 1.3 静电场的高斯定理及其应用	17
§ 1.4 静电场的环路定理与电势	27
§ 1.5 电场对带电系统的作用力	39
习题	43
第 2 章 静电场与物质的相互作用	48
§ 2.1 物质的电性质	48
§ 2.2 静电场中的导体	51
§ 2.3 孤立导体的电容与电容器	63
§ 2.4 静电场中的电介质	68
§ 2.5 带电系统的静电能与电场的能量	90
习题	108
第 3 章 稳恒电流	118
§ 3.1 电流的稳恒条件与欧姆定律	118
§ 3.2 非静电力与电源电动势	125
§ 3.3 复杂电路与基尔霍夫定律	136
习题	140
第 4 章 稳恒磁场	145
§ 4.1 磁现象与安培定律	145
§ 4.2 稳恒磁场与毕奥-萨伐尔定律	153
§ 4.3 稳恒磁场的基本性质	163
§ 4.4 安培力与洛伦兹力	174
* § 4.5 不同参考系中的电磁场	193
习题	207
第 5 章 磁场与物质的相互作用	213
§ 5.1 磁介质的磁化与有磁介质的磁场	213
§ 5.2 有介质磁场的性质与磁介质磁化规律	216
§ 5.3 边界条件与磁路定理	225
§ 5.4 磁场的唯一性定理与几种磁场解讨论	231
§ 5.5 磁荷法	241

习题	250
第 6 章 电磁感应	254
§ 6.1 电磁感应定律	254
§ 6.2 动生电动势与感生电动势	261
§ 6.3 互感与自感	270
§ 6.4 涡电流与趋肤效应	275
§ 6.5 暂态过程	278
§ 6.6 磁能	284
习题	290
第 7 章 交流电	297
§ 7.1 描述简谐交流电的特征量	298
§ 7.2 似稳条件	300
§ 7.3 交流电路中的元件及其性质	302
§ 7.4 交流电路的分析方法	308
§ 7.5 交流电路的电功率	326
§ 7.6 变压器	330
习题	336
第 8 章 电磁场的麦克斯韦方程组和电磁波	339
§ 8.1 实验规律的总结和推广	339
§ 8.2 麦克斯韦方程组和边界条件	344
§ 8.3 电磁波	346
§ 8.4 电磁波的辐射	351
§ 8.5 电磁波谱	354
§ 8.6 电磁场的能量和动量	355
习题	360
附录一 物理常数表	362
附录二 矢量分析中的常用公式	364
习题答案	369

第 1 章 真空中的静电场

§ 1.1 电荷与库仑定律

自然界一切电磁现象都起源于物质具有电荷属性，电现象起源于**电荷**，磁现象起源于**电荷运动**，所以“电荷”概念是电磁学中的第一个重要概念。

一、电荷与电荷守恒定律

人类对电现象的认识开始于**摩擦起电**。早在 2500 多年前，人们发现用琥珀（一种矿物化了的树脂）同毛皮摩擦之后具有吸引轻小物体（如毛发、羽毛等）的性质。后来又发现，除琥珀外，硫磺、水晶、金刚石、橡胶棒、玻璃棒等同毛皮或丝绸摩擦后，都有这种吸引轻小物体的性质。经摩擦后的物体具有吸引轻小物体的性质，就说这物体带了**电**，或者说物体上有了**电荷**。带电荷物体称为**带电体**，带电体上所带电荷的数量称为**电量**。使物体带电称为**起电**，通过摩擦方法使物体带电称为**摩擦起电**。

实验指出：任何两个带电体之间都有相互作用力。经毛皮摩擦过的两根橡胶棒之间有相互排斥力，经丝绸摩擦过的两根玻璃棒之间也有相互排斥力，这表明带同种性质电荷的物体间存在斥力。经毛皮摩擦过的橡胶棒与经丝绸摩擦过的玻璃棒之间的作用力是引力而不是斥力，这表明它们所带电荷的电性不同。大量实验表明，任何带电体同用丝绸摩擦过的玻璃棒之间的作用力不是斥力就是引力，而且同这玻璃棒相排斥的带电体，同用毛皮摩擦过的橡胶棒一定相吸引，同玻璃棒相吸引的带电体，同橡胶棒一定排斥。这表明：自然界的电荷就其电性质而论，只有两种电荷，不是与丝绸摩擦过的玻璃棒上电荷同性质的电荷，就是与毛皮摩擦过的橡胶棒上电荷同性质的电荷。1747 年，美国科学家富兰克林（B. Franklin）把自然界中与丝绸摩擦过的玻璃棒上电荷性质相同的电荷称为**正电荷**，与毛皮摩擦过的橡胶棒上电荷性质相同的电荷称为**负电荷**，这种对自然界两种电荷的命名一直沿用至今。为区分这两种电荷，习惯上把正电荷的电量用正数值表示，负电荷的电量用负数值表示。

以上对电荷的讨论比较笼统，电荷到底是什么？是物质的一种属性，还是不依附于任何物体而独立存在的东西？用近代物理学的观点来看，电荷是一些基本粒子（如电子、质子、 μ^+ 子、 π^+ 介子等）的一种属性，自然界不存在不依附于任何物体的“单独电荷”这种东西。通过摩擦或静电感应方法之所以会使宏观物体显示出带电性质，是由于各种宏观物体都是由原子（或分子）组成的，而原子是由带负

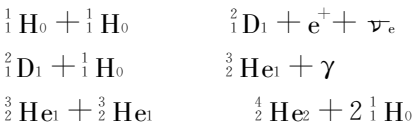
电荷的电子和由带正电荷的质子与不带电荷的中子组成的原子核所构成的。正常原子中，原子核内的质子数与核外电子数相等，而每个质子所带正电荷电量与电子所带负电荷电量的绝对值(用符号 e 表示)相等，所以一个原子内的正、负电荷电量的绝对值相等，对外其正、负电性相消，加之宏观物体内部分子热运动的进一步均匀搅拌，正常的宏观物体对外呈现出不带电的电中性状态。通过摩擦或静电感应，会使宏观物体内部电子转移到另一宏观物体上，或使宏观物体上带负电荷的电子的均匀分布状态遭到破坏，这样有过剩电子的宏观物体(或宏观物体部分区域)对外呈现带负电性质，而缺少电子的宏观物体(或宏观物体部分区域)对外显示出带正电性质。这就是宏观物体带电的情景。

上面已讲到，电荷是带电基本粒子的一种属性。实验上又发现所有带电基本粒子的电荷电量都是电子电荷电量绝对值 e 的正、负整数倍。而 e 的精确值实验测得为

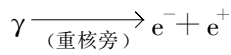
$$e = 1.6021892(46) \times 10^{-19} \text{ C}$$

所以自然界任何宏观带电体所带电荷电量的最小变化量为 e ，即带电体电量的改变是一份一份地增加或减小，每一份的电量值为 e ，这称为**电荷的量子化**。电量 e 对宏观电磁测量仪器来说是太小了，以至于 e 电量对宏观测量带来的影响无法察觉，所以在以研究宏观电磁现象规律为其内容的经典电磁学中，一般不考虑电荷的量子化，任何宏观带电体的电量变化量 Δq 宏观上仍可看做是连续变化的随意小量。

大量实验事实表明：对于任何一个没有净电量出入其边界面的物质系统（称为**电孤立系统**），不管系统内的物质如何运动或变化，系统内正、负电荷电量的代数和，即系统的总电量将保持不变。这是一条自然界的普遍规律，称为**电荷守恒定律**。对于摩擦起电来说，摩擦前的玻璃棒和丝绸可看做一个电孤立系统，系统的总电量为零，摩擦后，玻璃棒上带的正电荷电量 q 一定等于丝绸上带的负电荷电量 $-q$ ，系统总的电量仍等于零。如果以玻璃棒作为我们的研究系统，在同丝绸接触摩擦时，这不是一个电孤立系统，摩擦过程中玻璃棒里的部分电子将带着负电荷通过其表面（边界面）跑到丝绸上，或者说通过玻璃棒的边界面有正电荷从丝绸流到了玻璃棒上，摩擦前后玻璃棒上电量的改变量就等于摩擦过程中从玻璃棒表面流进的正电荷电量。因此，电荷守恒定律也可以这样叙述：一个系统内电荷总电量的改变量等于通过其边界流入的净电荷电量。电荷守恒定律的这种表述其数学表达式，我们将在第 3 章中给出。电荷守恒定律不管在宏观领域还是在微观领域都是成立的。譬如在核反应、核衰变、核聚变乃至基本粒子的产生、湮没过程中，都是成立的。下面是太阳上核聚变反应的一种可能链式反应过程：



其中，每一步反应都遵守电荷守恒定律。高能光子在重核作用下产生正、负电子的过程



也满足电荷守恒定律。

最后需指出，大量事实表明，带电体所带电荷的电量与带电体的运动速度无关。带电体相对于不同的参考系，其运动速度是不同的，但其电荷电量是相同的，这与物体的质量随其速度变化而改变不同，称之为电荷的相对论不变性。

二、库仑定律

任何两个带电体之间都有相互作用力。两个静止带电体间的相互作用力，一般与两带电体所带的电量、两带电体的形状、大小、电荷在它们上面的分布情况以及它们之间的相对距离都有关系。实验发现，随着两带电体之间的距离增大，它们之间的作用力受它们的大小、形状及电荷分布情况的影响会减小。当两个带电体之间的距离远远大于它们本身的线度时，它们之间的相互作用力受它们的大小、形状及电荷分布情况的影响可以忽略，在这种情况下，两个带电体可以简化为两个具有一定电荷电量的空间点。这种具有一定电量而可以忽略其体积大小、形状及其电荷分布情况对所讨论问题的影响的带电体，称为点电荷。“点电荷”与力学中的“质点”一样，是抽象化了的理想模型，借助这种模型，可以把很小的带电体所带电量与其空间位置这两个因素在所讨论的问题中突出出来进行研究，而把带电体的大小、形状及其上的电荷分布等次要因素忽略掉，从而使问题得以简化，待主要因素对问题的影响关系搞清楚之后，再去研究那些次要因素对问题的影响就方便多了。这种借理想模型使问题简化的方法，是物理学中研究问题的一种重要方法，也是“抓主要矛盾”这一原则的具体运用。

直到 18 世纪中叶，人们对电磁现象的研究基本还处于定性的观察摸索阶段。1785 年，法国物理学家库仑(C. A. Coulomb, 1736~1806)利用他自己设计的库仑扭秤研究了两个可视为点电荷的静止带电体之间的相互作用力，并发表了著名的库仑定律，从此电磁学的研究才进入了定量的实验研究阶段。

库仑定律用文字表述为：真空中两个静止点电荷之间的作用力与它们所带电荷的电量乘积成正比，与它们之间的距离平方成反比，作用力的方向沿它们之间的连线，同性电荷为斥力，异性电荷为引力。如果用 q_1 、 q_2 分别表示两个点电荷的电量， $\mathbf{r}_{12} = r_{12} \hat{\mathbf{r}}_{12}$ 表示从点电荷 q_1 到点电荷 q_2 的距离矢量（ r_{12} 为 q_1 与 q_2 之间的距离， $\hat{\mathbf{r}}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}$ 为从 q_1 指向 q_2 方向的单位矢量）， $\mathbf{r}_{21} = r_{21} \hat{\mathbf{r}}_{21}$ 表示从点电荷 q_2 到点电荷 q_1 的距离矢量（ $r_{21} = r_{12}$ ，仍为 q_1 与 q_2 之间的距离； $\hat{\mathbf{r}}_{21} = \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}} = -\hat{\mathbf{r}}_{12}$ ，

为从 q_2 指向 q_1 方向的单位矢量), 则按库仑定律, 点电荷 q_1 作用于点电荷 q_2 的静电力 $\mathbf{f}_{12}$ 和点电荷 q_2 作用于点电荷 q_1 的作用力 $\mathbf{f}_{21}$ 分别为

$$\mathbf{f}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \tag{1.1.1}$$

$$\mathbf{f}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \hat{\mathbf{r}}_{21} \tag{1.1.1'}$$

显然, $\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21}$, 两静止电荷间的静电力满足牛顿第三定律.

(1.1.1) 式和 (1.1.1') 式是库仑定律的数学表达式, 它们一方面表明两静止点电荷间的静电力 (也叫库仑力) 与它们的电量 q_1, q_2 的乘积成正比, 与其距离 $r_{12} = r_{21}$ 的平方成反比, 作用力的方向沿其连线; 另一方面也表明了两点电荷所带电荷同性 (即 q_1, q_2 同为正值或同为负值) 时, $\mathbf{f}_{12}$ 和 $\mathbf{f}_{21}$ 指向它们相互远离的方向, 即为斥力, 所带电荷异性 (即 q_1, q_2 一个取正值一个取负值) 时, $\mathbf{f}_{12}$ 和 $\mathbf{f}_{21}$ 指向它们相互趋近的方向, 即为引力如图 1.1 所示.

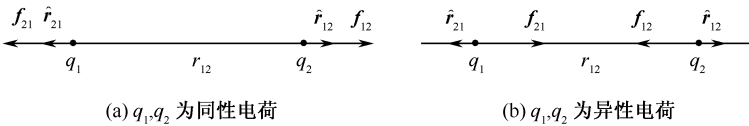


图 1.1 两点电荷 $q_1 - q_2$ 间的相互作用力

库仑定律数学表达式中的比例系数 k 的数值与单位, 取决于公式中各物理量的单位选择, 而各量单位的选择取决于所采用的单位制. 本书采用 MKSA 单位制, 即国际单位制 (SI) 中的电磁单位部分. 在这种单位制中, 取长度、质量、时间和电流为基本量, 其他电磁学中的物理量为导出量. 基本量的单位分别规定为米 (m)、千克 (kg)、秒 (s) 和安培 (A), 导出量的单位由导出量与基本量之间的基本关系式导出来. 如电量 q 与基本量电流 I 和时间 t 有关系 $q = It$, 在 MKSA 单位制中, 电量 q 的单位就是安培·秒 ($A \cdot s$), 并命名为库伦 (C), 即 $1 A \cdot s = 1 C$. 由于库仑定律的数学表达式中, 电量单位为库伦 (C)、距离单位为米 (m)、力的单位为牛顿 (N), 式中所有物理量的单位均已确定, 在这种情况下, 公式中的比例系数 k 的数值和单位就不能随便设定了, 只能由实验来确定.

在 MKSA 单位制中, 通常用另一个实验测定的常量 ϵ_0 来代替 k , ϵ_0 与 k 的关系是

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

常量 ϵ_0 称为真空介电常量, 目前实验上测得 ϵ_0 的最精确值为

$$\epsilon_0 = 8.854187818(71) \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$$

一般计算中 ϵ_0 取近似值

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$$

相应地,比例系数 k 的值取

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$$

值得注意的是, k 和 ϵ_0 都不是一个单纯的数值,它们都有单位和量纲.在 MKSA 单位制中,一个物理量的量纲是通过它与 4 个基本量长度(L)、质量(M)、时间(T)和电流(I)的基本关系式来确定的.如电量 q 与电流、时间的基本关系式为 $q = It$,电量 q 的量纲就是 $[q] = \text{IT}$. ϵ_0 的量纲由库仑定律给出,为

$$[\epsilon_0] = \frac{[q^2]}{[f][r^2]} = \text{L}^{-3} \text{M}^{-1} \text{T}^4 \text{I}^2$$

用 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ 代替比例系数 k 后,库仑定律的数学表达式为

$$f_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \hat{r}_{12} \tag{1.1.2}$$

$$f_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{21}^2} \hat{r}_{21} \tag{1.1.2'}$$

库仑定律是电学中的基本定律,是整个静电学的基础.正因为如此,从它被发现至今虽已经历漫长的 200 多年时间,人们对它依然十分关注.关注的焦点是两个点电荷之间的作用力与其距离平方成反比的精确程度和适用范围.早在库仑定律发现之前,1773 年英国物理学家卡文迪许(H. Cavendish)就通过实验研究过点电荷间的作用力与其距离平方成反比的关系(详见第 2 章),而且根据他所使用仪器的精度,他发现这个力 $f \propto \frac{1}{r^{2+\delta}}$,其中 $\delta \leq 0.02$.可惜卡文迪许的工作当时未能发表,直到 1879 年才由英国著名物理学家麦克斯韦(J. C. Maxwell, 1831~1879)整理公诸于世,而且麦克斯韦更精确地重复了卡文迪许的实验,得出 $\delta \leq 5 \times 10^{-5}$. 1936 年,普里姆顿(S. J. Plimpton)和洛顿(W. E. Lawton)采用灵敏静电计重做此实验,得出 $\delta \leq 2 \times 10^{-9}$. 1971 年,威廉斯(E. R. Williams)等人的实验证实 $\delta \leq (2.7 \pm 3.1) \times 10^{-16}$.总之,越来越精确的实验证实,库仑力的平方反比律是正确的.

至于库仑力的平方反比律的适用范围问题,也是人们所关注的课题.库仑力的平方反比律是库仑从两个小带电体相距几十厘米的距离范围的实验中总结出来的,如果电荷间的距离远小于几十厘米,譬如说小至 10^{-8} cm ,甚至更小,或者说距离远大于几十厘米,譬如说几千米,平方反比律还适用吗?从带 e 电量的质子和带 $-e$ 电量的电子组成的氢原子发出的氢原子光谱推论看,电子、质子相距 10^{-8} cm 的尺度,它们之间的库仑力仍满足平方反比律关系.1911 年,卢瑟福(E. Rutherford, 1871~1937)的 α 粒子(带 $2e$ 电荷的氦原子核)散射实验证实, α 粒子同散射

核间距离小至 10^{-12} cm, 它们之间的库仑力仍遵守平方反比律. 高能电子、质子间的散射实验发现, 在 10^{-13} cm 尺度上, 库仑力的平方反比律也基本上是正确的; 小至 10^{-14} cm 时, 实验结果与平方反比律预测的结果已有明显差别. 这种差别到底是因为在这么小的距离范围内电子、质子已不能视为点电荷了, 还是库仑力的平方反比律失效了, 目前还无法下肯定结论. 至于在大距离范围内库仑力的平方反比律的正确性问题, 目前实验验证还不多. 但按电磁场的量子理论分析, 如果在大距离范围内库仑力的平方反比律失效, 组成电磁波的光子将具有非零的静止质量, 这将导致光在真空中的传播速度随波长不同而发生变化的色散现象. 从现代测量真空中光速的实验精确度看, 库仑力的平方反比律至少在千米量级的距离范围内是准确的. 总之, 有充分理由相信, 库仑定律在 10^{-13} cm 至若干千米的广阔范围内是准确可靠的, 以它为基础导出的电磁学结论也是毋庸置疑的.

在讲到库仑定律时, 自然地会联想到万有引力定律. 它们形式上很相似, 都遵守平方反比律. 但这是两类性质不同的力, 一种来源于物质的电荷, 而另一种来源于物质的引力质量. 两种力的强度也相差甚远, 以氢原子的电子、质子之间这两种力的大小作一比较, 即

$$\frac{f_{\text{电}}}{f_{\text{引}}} = \frac{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}}{G m_e m_p} \approx 2.3 \times 10^{39}$$

另外, 带电体间的静电力可以是引力也可以是斥力, 而物体间的万有引力只存在引力. 带电体间的静电力是可以屏蔽的, 而物体间的万有引力是无法屏蔽的.

三、两任意带电体间的静电力

大量实验表明: 两个静止点电荷间的静电力不因其他电荷的存在而改变. 因此, 如果有 $q, q, \dots, q_i, \dots, q_N$ 共 N 个点电荷分别分布在 $r_1, r_2, \dots, r_i, \dots, r_N$ 处组成一个带电系统, 这种系统称为**点电荷组**. 点电荷组中的第 i 个点电荷 q_i 到位于 r_0 的 q_0 点电荷的距离矢量为 $r_{i0} = r_0 - r_i$, 则由库仑定律可以得出, 点电荷组中 N 个点电荷对 q_0 点电荷的静电力为

$$f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_0 q_i}{|r_0 - r_i|^3} (r_0 - r_i) \tag{1.1.3}$$

此式表明: N 个点电荷对另一 q_0 点电荷的静电力, 等于 N 个点电荷中每个点电荷单独存在时对点电荷 q_0 的静电力的矢量和. 这称为静电力的**叠加原理**.

点电荷只是一种理想模型, 实际的带电体都有一定的大小、形状和电荷在带电体上的具体分布情况. 有的带电体的电荷连续地分布于带电体体积内的各个地方, 这称为**体电荷分布的带电体**; 有的电荷连续分布于厚度极薄的一层面上, 称为**面电荷分布的带电体**; 有的电荷连续分布于横截面极小的一条线上, 称为**线电荷分布带电体**.

为了描述体电荷带电体上的电荷(简称**体电荷**)在带电体内分布的情况,可以设想将带电体分割成许许多多体积非常小的小带电体,每个小带电体的体积设想分割得足够小,以至于其内的电荷分布可视为是均匀分布,这样的小带电体称为体电荷带电体的**体电荷元**。设带电体内 $\mathbf{r}$ 处的体电荷元的体积为 ΔV ,所带的电荷电量为 Δq ,则定义

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad (1.1.4)$$

为体电荷分布带电体的**体电荷密度**,它表示带电体内 $\mathbf{r}$ 处单位体积的电量.通过体电荷密度函数 $\rho(\mathbf{r})$ 可以定量地描述体电荷在带电体内各处的分布情况.对于带电体内电荷均匀分布的情况, $\rho(\mathbf{r})$ 在带电体内处处相等,并且 $\rho = \frac{q}{V}$,其中 q, V 分别为带电体的电荷电量和带电体的体积.

类似地分析,为了描述面电荷分布带电体上的电荷(简称**面电荷**)在带电面上的分布情况,可设想将带电面分割成许多面积很小、其中电荷可视为均匀分布的**面电荷元**,带电面上 $\mathbf{r}$ 处面电荷元的面积和电量若为 ΔS 和 Δq ,则

$$\sigma(\mathbf{r}) = \frac{\Delta q}{\Delta S} \quad (1.1.5)$$

称为**面电荷密度**,它表示带电面上 $\mathbf{r}$ 处单位面积上的电荷电量.通过面电荷密度函数 $\sigma(\mathbf{r})$ 可以描述面电荷在带电面上各处分布的情况.对于电荷均匀分布的带电面, $\sigma = \frac{q}{S}$,其中 q, S 分别为带电面上的电荷电量和带电面面积.

对于线电荷分布的带电体,可设想将其分割成许多长度很短、其上电荷可视为均匀分布的**线电荷元**,若 Δl 和 Δq 为带电线上 $\mathbf{r}$ 处线电荷元的长度和所带电量,则

$$\lambda(\mathbf{r}) = \frac{\Delta q}{\Delta l} \quad (1.1.6)$$

称为**线电荷密度**,它表示带电线上 $\mathbf{r}$ 处单位长度上分布的电量.通过 $\lambda(\mathbf{r})$ 可以定量描述带电线上各处电荷分布的情况.对于电荷均匀分布的带电体,其线电荷密度 $\lambda = \frac{q}{l}$,其中 q, l 分别为带电线的电荷电量和带电线的长度.

按照任何宏观物体都可以进行宏观上的无限分割的设想,一个体积为 V' 、电量为 q' 的体电荷分布带电体,总可以被看成是由许多体积为宏观上无限小(dV')、且可被视为点电荷的体电荷元组成的.若带电体的体电荷密度为 $\rho(\mathbf{r}')$,则这种可视为点电荷的体电荷元的电量为 $\rho(\mathbf{r}')dV'$.因此,这个连续体电荷分布带电体对位于 $\mathbf{r}_0$ 处的点电荷 q_0 的静电作用力,按(1.1.3)式应为

$$\mathbf{f} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}') dV' \quad (1.1.7)$$

同样,一个带电面面积为 S' 、面电荷密度为 $\sigma(\mathbf{r}')$ 的面电荷对位于 $\mathbf{r}_0$ 处点电荷 q_0 的静电作用力为

$$\mathbf{f} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}') dS' \quad (1.1.8)$$

一个长为 l' 、线电荷密度为 $\lambda(\mathbf{r}')$ 的带电线对位于 $\mathbf{r}_0$ 处点电荷 q 的静电作用力为

$$\mathbf{f} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{l'} \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}') dl' \quad (1.1.9)$$

一个体积为 V' 、体电荷密度为 $\rho(\mathbf{r}')$ 的体电荷带电体,对另外一个体积为 V 、体电荷密度为 $\rho(\mathbf{r})$ 的体电荷带电体的静电作用力,显然等于对后者的每个可视为点电荷的电荷元 $\rho(\mathbf{r})dV$ 的静电作用力的矢量和,利用(1.1.7)式,这个作用力显然为

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' dV \quad (1.1.10)$$

同样,一个面积为 S' 、面电荷密度为 $\sigma(\mathbf{r}')$ 的面电荷对另一个面积为 S 、面电荷密度为 $\sigma(\mathbf{r})$ 的面电荷的静电作用力为

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_S \iiint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dS' dS \quad (1.1.11)$$

一个长度为 l' 、线电荷密度为 $\lambda(\mathbf{r}')$ 的线电荷对另一个长度为 l 、线电荷密度为 $\lambda(\mathbf{r})$ 的线电荷的静电作用力为

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{l'} \int_l \frac{\lambda(\mathbf{r})\lambda(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dl' dl \quad (1.1.12)$$

总之,通过(1.1.10)式、(1.1.11)式和(1.1.12)式,原则上对两个已知电荷分布情况的任意体电荷、面电荷和线电荷间的静电作用力都可以求得。

§ 1.2 电场与电场强度

一、电场

由上述讨论可以知道,两个相距一段距离的带电体之间存在着相互作用的电力,在第4章中还会看到两个相距一段距离的电流之间存在着相互作用的磁力,两个相距一段距离的物体之间存在着万有引力.两个不相接触的物体间怎么会发生相互作用呢?或者说,两个彼此相隔一定空间距离的物体之间的相互作用是怎样传递的呢?关于这个问题,在物理学的发展历史中曾有过两种不同观点的长期争论.一种观点认为:相隔一定距离的两个物体间的相互作用可以直接地、勿需中间媒介地发生,这种作用的传递速度无限大,因此,这种作用无需传递时间和传递过程,称之为**超距作用**.按此观点,两带电体间的电相互作用模式为

电荷 电荷

另一种观点认为:不存在超距作用,相隔一定距离的两带电体(或载流体)之间之所以会发生电(或磁)相互作用,是由于宇宙空间存在着能传递电(磁)相互作用

的“以太”,通过这种看不见、摸不着的“以太”介质同带电体(或载流体)的近距离接触,来传递电荷(或电流)间电(或磁)的相互作用.随着对电磁现象认识的深入,人们发现电和磁之间是相互联系的.当带电系统的电荷分布随时间作周期性变化时,将会有电磁扰动以横波的方式在空间传播,这种波称为**电磁波**.并且发现电磁波的传播速度与光速相同,在真空中的速度为 $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.这种发现导致人们相信光和电磁波是一种东西.如果把电磁波或者说光波看成是“以太”介质振动的传播波,就像声波是空气的振动传播的纵波那样,由于电磁波(光波)是速度很快的横波,则“以太”应是透明、感觉不到其存在的固体,其刚性模量远比钢铁还要硬,这实在是无法想象的东西.1887年,迈克耳孙和莫雷测量“以太风”的实验,完全否定了这种“以太”的存在.

“以太”的被否定和电磁波(光波)在真空中以有限速度 c 的传播,使人们终于认识到,任何带电体的周围空间中都存在着由电荷激发产生的**电场**,而任何载流体的周围空间中都存在着由电流激发产生的**磁场**,电磁波正是这种电、磁场随时间振动变化的传播,而相隔一定距离的两带电体间的电相互作用,实际上是两带电体彼此都在对方电荷产生的电场里而受到的电场作用.自然界并不存在超距作用,从近代物理学的观点看,自然界物质间的4种相互作用,即引力相互作用、电磁相互作用、弱相互作用和强相互作用,都是通过物体周围空间中存在的**场**对对方作用的.任何带电体电荷周围都存在着电场,进入这个电场的带电体电荷都受到这个电场的作用,这就是带电体间电相互作用的图像.这种带电体电荷间的电相互作用模式可表示为

电荷 电场 电荷

需要指出的是,在电荷周围空间引出电场和在电流周围空间引出磁场,并不是为了便于理解电相互作用和磁相互作用,也不是一种处理问题的方法,而是因为电场和磁场都是切切实实的客观存在.随时间振动变化的电磁场(电磁波)甚至会脱离产生它的源(振动变化的电荷系统)而独立存在.所以电场、磁场或电磁波本身就是一种客观存在的物质,是与实体物质不同的一种物质存在形态.

带电体上的电荷分布如果是不随时间变化的静止电荷,其周围空间中的电场分布也是不随时间变化的电场,这种电场称为**静电场**.本章和下一章就先来讨论这种静电场.

二、电场强度

任何带电体上的电荷都会在其周围空间产生电场.电场的最基本特征是对进入其存在空间的其他电荷产生电作用力.为定量地研究电场,我们引入一个这样的电荷:其电量 q 很小,以便它引入电场后不会导致产生电场的电荷分布发生变化;同时,这个电荷的几何线度很小,以至于可将其视为点电荷,从而通过它能研究电场空间各点的电场性质.这种电荷称为**试探点电荷**.

将试探点电荷置于所研究的电场,设试探点电荷在电场 $\boldsymbol{r}$ 处受的电场力为

F_0 , 则 F_0 应与 q_0 和反映 r 处电场性质的一个矢量 $E(r)$ 有关, 设 $F_0 = q_0 E(r)$, 则

$$E(r) = \frac{F_0(r)}{q_0} \tag{1.2.1}$$

是一个与试探点电荷无关、完全反映 r 处电场本身性质的物理量. 反映电场本身性质的物理量 E 称为电场的**电场强度**, 简称**场强**.

定量描述电场的电场强度 E 是一个矢量. 电场空间的每一点都对应于一个矢量 E , 用来描述该点的电场情况, 因此电场是一个**矢量场**. 电场中 r 处的电场强度 $E(r)$ 的大小等于单位正电荷在该处所受电场力的大小, $E(r)$ 的方向与正电荷在该处所受电场力的方向相同. 对于电荷分布不随时间变化的电荷产生的静电场来说, 其电场强度 E 只是空间位置 r 的函数, 不同位置 r 处的 E , 其大小、方向一般都不相同. 若电场空间各点处 E 的大小、方向都相同, 则这种电场称为**均匀电场**. 均匀电场只是一种特殊的电场.

在 MKSA 单位制中, 电场强度 E 的量纲 $[E]$ 和单位, 从 (1.2.1) 式可以看出为 $[E] = MLT^{-3}I^{-1}$, 单位为牛顿·库仑⁻¹, 简写为 $N \cdot C^{-1}$. 以后会看到, $N \cdot C^{-1}$ 不是电场强度 E 的常用单位, 在 MKSA 单位制中, E 的常用单位是伏特·米⁻¹, 简写为 $V \cdot m^{-1}$.

下面我们来讨论具体电场的电场强度.

首先来讨论点电荷电场的电场强度. 若有一电量为 q 的点电荷, 取其所在位置为坐标系原点 O . 将一试探点电荷 q_0 放置在电场中的位置 r 处, 由库仑定律知道, q_0 所受静电力为

$$F_0(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \hat{r}$$

其中, r 为试探点电荷 q_0 到点电荷 q 的距离, $\hat{r} = \frac{r}{r}$ 为点电荷指向试探点电荷方向的单位矢量. 由电场强度的定义 (1.2.1) 式, 得到点电荷 q 产生的电场的电场强度为

$$E(r) = \frac{F_0(r)}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \tag{1.2.2}$$

此式为点电荷电场在空间的场强分布公式, 式中 q 是点电荷的电量. 若点电荷带的

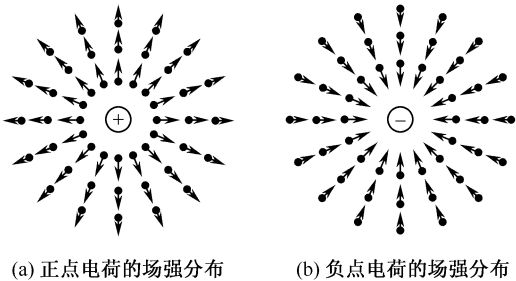


图 1.2 点电荷电场的场强分布

是正电荷,即 $q>0$,则 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 的方向为以 q 为原点的位矢方向如图 1.2(a)所示;若点电荷带负电荷,即 $q<0$,则 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 的方向为以 q 为原点的位矢反方向如图 1.2(b)所示. $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 的大小与点电荷的电量 q 成正比,与到点电荷 q 的距离 r 的平方成反比,电场呈球对称分布.

三、场强叠加原理与任意带电体电场的电场强度

由前面 1.1 节中关于静电力的叠加原理的讨论可知, N 个点电荷 $q_1, q_2, \dots, q_N$ 组成的点电荷组对位于 $\boldsymbol{r}$ 处的一个试探电荷 q_0 的静电力为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{f}_{i,0}(\boldsymbol{r})$$

其中, $\boldsymbol{f}_{i,0}$ 为点电荷组中第 i 个点电荷 q_i 对试探电荷 q_0 的作用力. 根据电场强度的定义, 点电荷组产生的电场在空间 $\boldsymbol{r}$ 处的电场强度为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})}{q_0} = \sum_{i=1}^N \frac{\boldsymbol{f}_{i,0}(\boldsymbol{r})}{q_0} = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r}) \tag{1.2.3}$$

这里, $\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{f}_{i,0}(\boldsymbol{r})}{q_0}$ 为点电荷组中第 i 个点电荷单独存在时产生的电场在 $\boldsymbol{r}$ 处的电场强度. (1.2.3) 式表明: 若干点电荷产生的电场的电场强度, 等于各点电荷单独存在时产生的电场的电场强度的矢量和, 这称为电场的场强叠加原理.

由于任何带电系统都可以分割成许多可视为点电荷的电荷元的集合, 根据点电荷电场的电场强度公式 (1.2.2) 式和场强叠加原理 (1.2.3) 式, 原则上我们可以求出任何带电系统的电场的电场强度. 下面我们分几种情况, 讨论不同带电系统的电场强度.

1. 点电荷组的电场强度

假设有 N 个点电荷 $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_N$ 组成一点电荷组, 点电荷组中 N 个点电荷的空间位置分别为 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_i, \dots, \boldsymbol{r}_N$. 第 i 个点电荷 q_i 产生的电场在 $\boldsymbol{r}$ 处的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^3} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)$$

则根据场强叠加原理, 点电荷组产生的电场在 $\boldsymbol{r}$ 处的电场强度为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^3} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i) \tag{1.2.4}$$

[例 1.2.1] 两个等量异性的点电荷, 其电量分别为 $+q$ 和 $-q$, 彼此相隔一小距离 l , 这样的带电系统称为电偶极子. 求电偶极子中垂面上任意一点 P 的电场强度如图 1.3 所示.

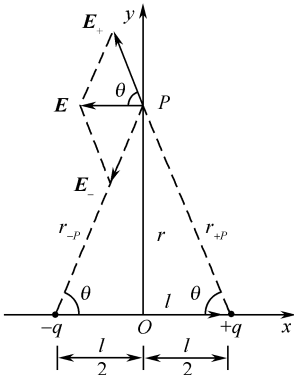


图 1.3 电偶极子的电场

[解] 取电偶极子中点 O 为原点, 由原点 O 向 P 点的方向取作直角坐标系的 y 轴, 由 $-q$ 点电荷向 $+q$ 点电荷的方向取作 x 轴, P 点到原点 O 的距离为 r , P 点到 $-q$ 的距离为 r_- , P 点到 $+q$ 的距离为 r_+ (见图 1.3). 设 x 轴和 y 轴的单位矢量分别 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$. 由图 1.3 可以看出, 点 P , $-q$ 和 $+q$ 的位置矢量分别为 $\mathbf{r} = r\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_- = -\frac{l}{2}\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{r}_+ = \frac{l}{2}\mathbf{i}$. 从 (1.2.4) 式得 P 点的电场强度为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_+) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_-|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_-) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+^3} \left[\left(r\mathbf{j} - \frac{l}{2}\mathbf{i} \right) - \left(r\mathbf{j} + \frac{l}{2}\mathbf{i} \right) \right] \\ &= \frac{-ql\mathbf{i}}{4\pi\epsilon_0 r_+^3} \end{aligned}$$

这里利用了关系

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+| = r_+ = r_- = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_-| = \left(r^2 + \frac{l^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}}$$

设 $\mathbf{l} = l\mathbf{i}$ 为电偶极子从 $-q$ 到 $+q$ 的距离矢量, 且把 $r_+^3 = \left(r^2 + \frac{l^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}}$ 代入上述结果, 则得出 P 点的电场强度为

$$\mathbf{E} = - \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 \left(r^2 + \frac{l^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{i}$$

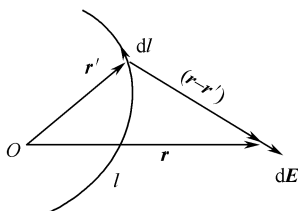
当 $r \gg l$ 时, P 点的电场强度为

$$\mathbf{E} = - \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{i} = - \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1.2.5)$$

这里, $\mathbf{p} = ql$ 是描述电偶极子本身特性的物理量, 叫做电偶极子的电偶极矩.

2. 线电荷带电体的电场强度

如果我们研究的带电体是横截面极小的线电荷, 可以将其视为是由许多可看成为点电荷的线电荷元所组成的. 如果设线电荷带电体的线电荷密度为 λ , 则线电荷元的电量为 λdl . $\mathbf{r}'$ 处的线电荷元 $\lambda(\mathbf{r}')dl$ 在 $\mathbf{r}$ 处产生的电场场强 $d\mathbf{E}$ 如图 1.4 所示为



$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(\mathbf{r}')dl}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

根据场强叠加原理, 整个线电荷 l 在 $\mathbf{r}$ 处产生的电场场强 $\mathbf{E}$ 为各线电荷元在 $\mathbf{r}$ 处产生的电场场强的矢量和, 即

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda(\mathbf{r}')d\mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.2.6)$$

图 1.4 线电荷的电场

〔例 1.2.2〕 求均匀带电细棒中垂面上任一点 P 的电场强度. 设棒长为 $2l$, 带电总量为 q .

〔解〕 带电细棒上的线电荷密度为 $\lambda = \frac{q}{2l}$.

采用直角坐标系, 原点 O 取在细棒与中垂面的交点上, O 点指向中垂面上 P 点的方向取为 x 轴正方向, 原点 O 沿细棒向上的方向取为 y 轴正方向. 设 P 点到原点的距离为 r , P 点的位置矢径为 $\mathbf{r} = r\mathbf{i}$ 如图 1.5 所示. 在细棒上 y 处取线段元 dy , 其线电荷元的电量为 λdy , 则线电荷元在 P 点产生的电场场强为

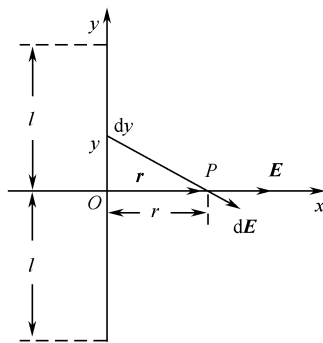


图 1.5 直线段中垂面上的电场

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dy}{|\mathbf{r} - y\mathbf{j}|^3} (\mathbf{r} - y\mathbf{j}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dy}{(y^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} (r\mathbf{i} - y\mathbf{j})$$

于是带电细棒在中垂面上 P 点产生的电场场强为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \int d\mathbf{E} = \frac{\lambda r \mathbf{i}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{dy}{(y^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\lambda \mathbf{j}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{y dy}{(y^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\lambda 2l r \mathbf{i}}{4\pi\epsilon_0 r^2 \sqrt{r^2 + l^2}} = \frac{q r \mathbf{i}}{4\pi\epsilon_0 r^2 \sqrt{r^2 + l^2}} \end{aligned}$$

这里, $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ 分别为 x 轴和 y 轴的单位矢量.

当均匀带电长直细棒为无限长时, 即 $l \rightarrow \infty$ 时, 任何垂直于它的平面均可视为中垂面, 这样无限长均匀带电细棒产生的电场中, 距离细棒为 r 的点 P 处的场强, 可由上式考虑 $l \gg r$ 条件而得到, 为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{2l} \right) \hat{\mathbf{r}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.2.7)$$

其中, λ 为无限长带电细棒的线电荷密度, $\hat{\mathbf{r}}$ 为由棒到场点 P 的矢径的单位矢量. 无限长均匀带电细棒的电场场强 $\mathbf{E}$ 的大小, 与其线电荷密度 λ 成正比, 与场点到棒的距离 r 成反比. $\mathbf{E}$ 的方向沿场点与细棒的垂线, 当 $\lambda > 0$ 时, 沿垂线向外; 当 $\lambda < 0$ 时, 沿垂线指向细棒.

此例题中, 细棒相对其中垂面对称性, 利用系统中的对称性处理静电场问题, 往往可以省去复杂的数学计算. 为此再举一例.

〔例 1.2.3〕 一半径为 R 、无限细且均匀带电的圆环, 环上线电荷密度为 λ . 求过环心而垂直于环面的中轴线上一点 P 的场强如图 1.6 所示.

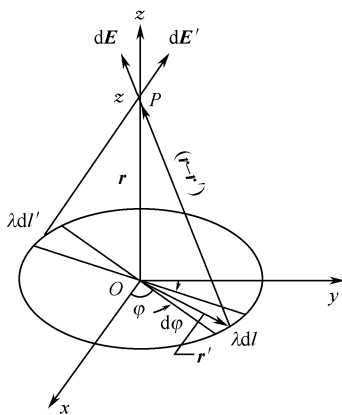


图 1.6 均匀带电圆环的电场

〔解〕 取直角坐标系的原点在圆环中心 O 处,垂直环面的中轴线取做 z 轴,而圆环所在平面作为 xy 坐标平面. P 点在 z 轴上的坐标设为 z ,则 P 点的位矢 $\mathbf{r} = z\mathbf{k}$,其中 $\mathbf{k}$ 是 z 轴的单位矢量.线电荷元 λdl 在 xy 平面上,其位矢 $\mathbf{r}'$ 与 $\mathbf{k}$ 垂直.由于圆环对于中轴线(即 z 轴)具有对称性,所以圆环上每取一线电荷元 λdl ,必有一对应线电荷元 $\lambda dl'$ 如图 1.6 所示,这一对对应线电荷元在 P 点产生的场强 $d\mathbf{E}$ 和 $d\mathbf{E}'$ 在 xOy 平面上的分量互相抵消.故各线电荷元对 P 点的总场强贡献,只有其在 P 点产生的场强 $d\mathbf{E}$ 的 z 分量.由此分析,可得圆环均匀线电荷在中轴线上 P 点的场强为

$$\mathbf{E} = \int (d\mathbf{E} \cdot \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int \frac{\lambda dl}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{k} \right] \mathbf{k}$$

由于 $dl = R \cdot d\varphi$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}$, $(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{k} = z$, 故有

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda R z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{k} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{k} \quad (1.2.8)$$

3. 面电荷带电体的电场强度

如果带电体上的电荷只分布在表面附近极薄的一层表面层内,极薄的表面层厚度对所讨论问题的影响可以忽略,则带电体可视为面电荷带电体.面电荷带电体的电荷分布情况由面电荷密度 σ 描述.求一个带电面上的电荷产生的电场场强时,我们设想把带电面分割成许多宏观上无限小的小面元 dS ,这种带电的小面元叫面电荷元,面电荷元的电量为 σdS ,而且可以把它视为点电荷.带电面上 $\mathbf{r}'$ 处的面电荷元在 $\mathbf{r}$ 处产生的电场场强为

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(\mathbf{r}')dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

根据场强叠加原理,整个带电面上的电荷在 $\mathbf{r}$ 处产生的电场场强,应为各个面电荷元在 $\mathbf{r}$ 处产生的电场场强的矢量和,即

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.2.9)$$

这里, S 为带电面的面积.

对于一般的带电面, (1.2.9) 式的积分是不易积出的;但对于少数有一定对称性的带电面,其产生的电场场强可根据对称性简化式中的积分而求得.

〔例 1.2.4〕 求半径为 R 、面电荷密度为 σ 的均匀带电球面电荷在球面外任一点 P 产生的电场场强.

〔解〕 取球心作为坐标原点 O .求球外任一点 P 处的电场强度时,选 O 点指向 P 点的方向作为 z 轴正方向, P 点在 z 轴上的坐标为 z 如图 1.7 所示.利用带电球面对 z 轴的旋转对称性,可以把带电球面分割成许多相对于 z 轴对称的圆环带,图 1.7 中画出了其中一个圆环带.圆环带的带宽 $R \cdot d\theta$ 非常窄,可近似把圆环带

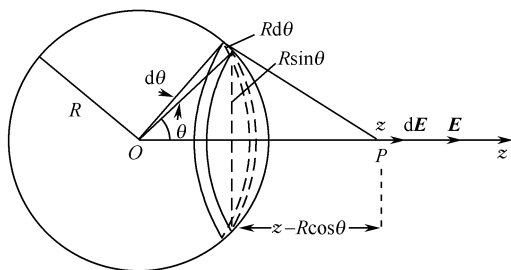


图 1.7 均匀带电球面的电场

看成带电圆环,带电圆环的线电荷密度 $\lambda = \sigma R d\theta$,圆环的半径为 $R \sin \theta$,圆环中心到 P 点的距离为 $z - R \cos \theta$.利用(1.2.8)式,可得带电圆环在 P 点产生的电场场强为

$$dE = \frac{\sigma R d\theta R \sin \theta}{2\epsilon_0} \frac{z - R \cos \theta}{[(z - R \cos \theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} \mathbf{k}$$

这里, $\mathbf{k}$ 为 z 轴的单位矢量.均匀带电球面在球面外 P 点产生的电场场强,根据场强叠加原理,应等于带电球面分割成的每个带电圆环在 P 点产生的电场场强 dE 的矢量和,即

$$\mathbf{E} = \int dE = \int_0^\pi \frac{\sigma R^2 \sin \theta (z - R \cos \theta) d\theta}{2\epsilon_0 [(z - R \cos \theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} \mathbf{k} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 z^2} \mathbf{k}$$

如果把 P 点到球心 O 的距离 z 用 r 表示,且注意 P 点的位置矢径为 $\mathbf{r} = r\mathbf{k}$,并用带电球面上的电荷电量 $q (= 4\pi R^2 \sigma)$ 代替上式中的 σ ,则一个均匀带电球面在球面外 P 点产生的电场场强可表示为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}$$

这表明:均匀带电球面电荷在球面外一点产生的电场场强,等于球面上电荷集中于球心的点电荷在该点产生的电场场强.

用与上面完全一样的方法,可求得均匀带电球面的电荷在球面内任一点 P 处产生的电场场强,请读者自己去讨论(注意,这种情况下 $z < R$).所得结果为球面内任一点 P 处的场强 $\mathbf{E} = 0$,即均匀带电球面电荷在球面内产生的电场场强处处为零.

4. 体电荷带电体的电场强度

对于带电体上的电荷连续地分布于体内的情况,我们通过体电荷密度 $\rho(\mathbf{r}')$ 来具体描述电荷在其体内的分布.讨论这种带电体电荷在空间中产生的电场场强,是设想把带电体分割为许多体积在宏观上可视为无限小的体电荷元,这些体电荷元都被近似当作点电荷.带电体内 $\mathbf{r}'$ 处的体电荷元所带电量为 $\rho(\mathbf{r}') dV'$,它在空间 $\mathbf{r}$ 处产生的电场场强为

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (1.2.10)$$

这里, dV' 为 $\mathbf{r}'$ 处体电荷元的体积. 根据场强叠加原理, 这种体电荷分布的带电体电荷在 $\mathbf{r}$ 处产生的电场场强, 等于它分割成的各个体电荷元在 $\mathbf{r}$ 处产生的电场场强的矢量和, 即

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (1.2.11)$$

这里, 积分空间 V' 为带电体体积所占据的空间.

对于一般体电荷分布的带电体来说, 上式中的积分是不易积出的, 只有少数带电体形状和电荷分布都具有对称性的问题, 才能通过对问题的简化按 (1.2.11) 式积分求出其电场的电场强度.

[例 1.2.5] 求半径为 R 的均匀带电球上的电荷在球外任一点 P 处产生的电场场强. 设均匀带电球的体电荷密度为 ρ .

[解] 取球心为坐标原点 O . 设 P 点的位置矢量为 $\mathbf{r}$, P 点到原点的距离为 r . 为求均匀带电球在球外 P 点的电场场强, 我们设想把带电球分割成许多厚度在宏观上无限薄的同心均匀带电球壳, 如图 1.8 所示, 图中画出了其中一个半径为 r' 、厚度为 dr' 的这种球壳. 由于这些均匀带电球壳的厚度宏观上无限薄, 故这些均匀带电球壳可近似看成均匀带电球面, 其面电荷密度 $\sigma = \rho dr'$. 半径为 r' 、厚度为 dr' 的带电球壳在 P 点产生的电场场强, 由例 1.2.4 给出为

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho 4\pi r'^2 dr'}{r^3} \mathbf{r}$$

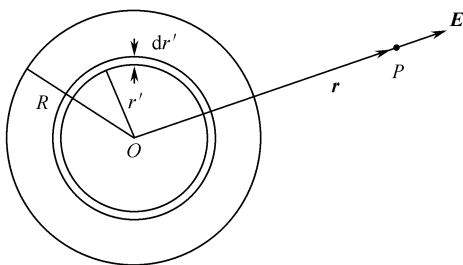


图 1.8 均匀带电球的电场

根据场强叠加原理, 均匀带电球在球外 P 点产生的电场场强, 应等于带电球分割成的每个均匀带电球壳在 P 点产生的电场场强 $d\mathbf{E}$ 的矢量和, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \int d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi \int_0^R r'^2 dr' \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \rho \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \end{aligned}$$

这里, $q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, 是均匀带电球所带电荷的电量. 这个结果告诉我们, 一个均匀带电球在球外任一点 P 处产生的电场场强, 等于带电球上的电荷集中于球心的点电荷在 P 点产生的电场场强.

§ 1.3 静电场的高斯定理及其应用

通过上节的讨论, 我们知道电荷周围空间中存在有电场, 电场是由电场强度矢量 E 来描述的, 即电场是一个**矢量场**. 在本节和下节中, 我们将集中讨论静电场这种矢量场的基本性质.

一、电场线^①与电通量

在力学和流体力学中, 我们曾碰到过重力场和流体速度场(流速场)两种矢量场, 现在我们讨论的静电场和第 4 章中将要讨论的磁场, 也都是矢量场. 也就是说, 这些场都是通过一个矢量物理量来描述的, 场空间的每一点都和场矢量的一个有一定大小和方向的值相对应. 从物理性质上看, 各种矢量场是各不相同的, 但在问题的处理方法和数学表达方式上, 它们却常常是相似的.

在流体力学的流速场讨论中, 为直观地了解流体内各处流速分布的情况, 采用几何描述方法引入了流线、流管等概念; 为反映流速场的性质和规律, 还引入了反映矢量场性质的一个重要物理量——**通量**(在流速场中叫**流量**)的概念. 在不可压缩流体的流速场中, 单位时间从截面 ΔS 很细的流管流出的流体体积 $\Delta\Phi = \boldsymbol{v} \cdot \Delta\boldsymbol{S} = v\Delta S\cos\alpha$ (见图 1.9). 这里, $\Delta\boldsymbol{S} = \Delta S\boldsymbol{n}$ 称为截面面元矢量, ΔS 为面元面积, $\boldsymbol{n}$ 为面元法线方向的单位矢量. $\Delta\Phi$ 称为通过细流管的**流量**, 也可称为场矢量 $\boldsymbol{v}$ 通过面元 ΔS 的**通量**. 通过有限大小截面的**通量** $\Phi = \iint_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}$. 以上描述流速场的几何描述方法同

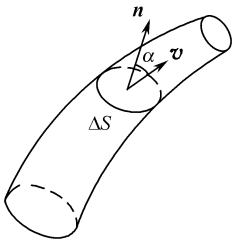


图 1.9 流管的流量

样适用于电场的描述.

为直观、形象地了解电场中电场强度的空间分布情况, 仿照流速场的流线, 我们在电场中引入电场线的概念. 在电场中可以画出一系列曲线, 使这些曲线上每一点的切线方向和该点电场强度的方向一致, 这些曲线称为电场的**电场线**. 如图 1.10 所示是几种带电系统电场的电场线图. 为使电场的电场线不仅能反映出电场强度方向的分布情况, 而且也能反映出电场强度大小的分布情况, 有必要引入电场线密度的概念. 在电场中的任一点, 取一与该点电场强度

^① 又称“电力线”.

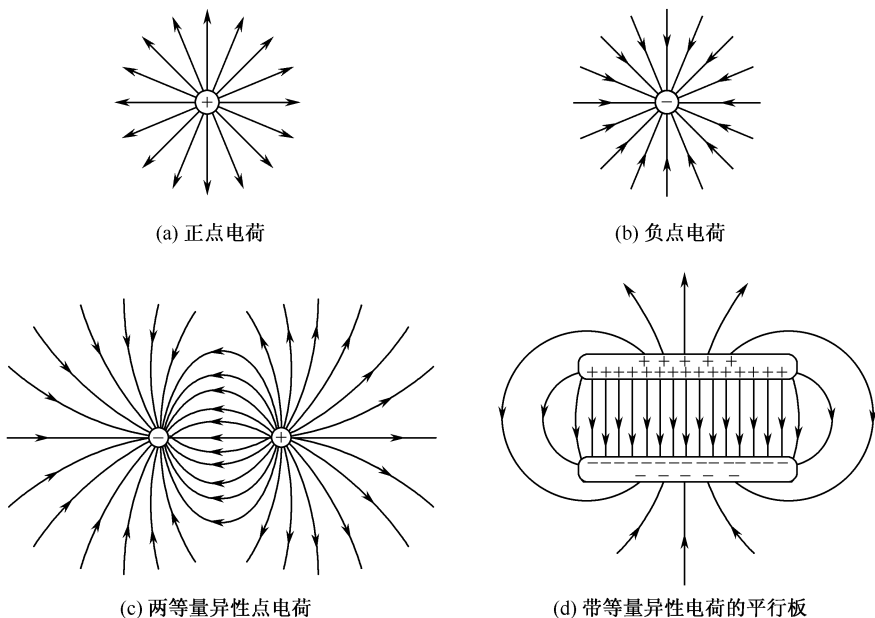


图 1.10 几种电场的电场线图

方向相垂直的小面元 $\Delta S_{\perp}$, 穿过此面元的电场线数设为 ΔN , 则比值 $\frac{\Delta N}{\Delta S_{\perp}}$ 称为该点的 **电场线密度** . 在画电场线图时 , 使电场中任一点的电场线密度等于该点的电场强度值

$$E = \frac{\Delta N}{\Delta S_{\perp}} \quad (1.3.1)$$

这样画得的电场线图既能反映电场强度方向的分布情况 , 又能根据电场线密度的大小反映出电场强度在各处的强弱情况 .

从图 1.10 的各电场线图中可以看出 , 静电场的电场线具有以下性质 :

(1) 静电场的电场线起始于正电荷 , 终止于负电荷 ; 或从无穷远来 , 或到无穷远去 . 电场线不会在没有电荷的地方中断 .

(2) 任何两条电场线不会在没有电荷的地方相交 , 因此由电场线组成管壁的电场线管内的电场线不会穿出 , 管外的电场线也不会穿入 .

(3) 静电场的电场线不会形成闭合曲线 .

性质 (1) 和 (3) 是静电场两条基本性质的反映 . 性质 (2) 是电场各点的场强只有一个方向的要求 .

通过电场的电场线图 , 不仅可以直观、形象地了解整个电场场强的总体分布情况 , 而且也容易看出和理解静电场所具有的最基本性质 . 事实上 , 一般带电系统的电场场强的数学解析表达式是无法给出的 , 人们可以通过模拟实验给出其电场线

分布,从而得以了解电场的电场强度分布情况.

受流速场中引入流量的启迪,研究矢量场的性质需要引入一个通量物理量.对于电场来说,电场强度 $\mathbf{E}$ 通过小面元 ΔS 的电通量定义为:面元 ΔS 处的电场强度 $\mathbf{E}$ 与该面元矢量 $\Delta \mathbf{S} = \Delta S \mathbf{n}$ 的标积.这里, ΔS 为面元面积, $\mathbf{n}$ 为面元法线方向的单位矢量如图 1.11 所示.即

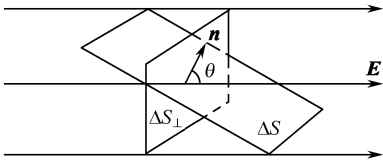


图 1.11 面元的电通量

$$\Delta \Phi_e = \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{S} \tag{1.3.2}$$

对于电场中有限大小的曲面 S 的电通量 Φ_e , 定义为曲面 S 上的每个无限小面元 dS 的电通量 $d\Phi_e = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ 之和, 即

$$\Phi_e = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \tag{1.3.3}$$

这里需要对面元矢量 $d\mathbf{S}$ 的方向作一约定说明, 面元矢量 $d\mathbf{S}$ 的方向约定为面元 dS 的法线指向曲面凸侧一方的方向, 即所谓外法线方向. 对于电场中一个闭合曲面 S 的电通量, 为闭合曲面 S 上每个无限小面元 dS 的电通量之和, 即

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \tag{1.3.3'}$$

积分号中的“ $\oint$ ”符号表示是对闭曲面积分, 积分中的面元矢量 $d\mathbf{S}$ 的方向取外法线方向.

电通量是一个标量. 根据场强叠加原理容易证明, 电通量也满足叠加原理. 设电场由 N 个带电系统的电荷所产生, 各个带电系统电荷的电场分别为 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_N$, 由场强叠加原理, 总电场场强 $\mathbf{E} = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i$, 在电场 $\mathbf{E}$ 中通过任意曲面 S 的电通量为

$$\Phi_e = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \iint_S \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \Phi_{ei} \tag{1.3.4}$$

其中, $\Phi_{ei} = \iint_S \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S}$ 为第 i 个带电系统的电场通过曲面 S 的电通量. (1.3.4) 式表明, 电通量满足叠加原理.

电场中的电通量概念同流速场中的流量相比是比较抽象的, 不容易说出通过小面元 ΔS 的电通量 $\Delta \Phi_e = \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{S}$ 到底代表什么物理意义, 引入电场线后, $\Delta \Phi_e$ 的物理意义就比较形象具体了. 根据 (1.3.1) 式, 我们规定了电场的电场线密度 $\frac{\Delta N}{\Delta S_{\perp}}$ 等于电场强度的大小 E , 从图 1.11 可以看出, 通过面元 ΔS 的电场线数目 ΔN 为

$$\begin{aligned} \Delta N &= E \cdot \Delta S_{\perp} = E \cdot \Delta S \cdot \cos \theta \\ &= \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{S} = \Delta \Phi_e \end{aligned}$$

这里, $\Delta S_{\perp}$ 为面元 ΔS 在垂直于 $\mathbf{E}$ 的平面上的投影面元, θ 为面元矢量 $\Delta \mathbf{S}$ 和场强 $\mathbf{E}$ 之间的夹角. 此式表明, 通过面元 ΔS 的电通量可以理解为通过面元 ΔS 的电场线数目, 只要选取小平面面元 ΔS 法线与 $\mathbf{E}$ 的夹角 $\theta < \frac{\pi}{2}$ 的法线方向作为面元矢量 $\Delta \mathbf{S}$ 的方向即可.

对于通过有限大小曲面 S 的电通量, 同样可以理解为通过曲面 S 的电场线数目. 不过, 由于我们约定了弯曲曲面 S 上的面元矢量 $\Delta \mathbf{S}$ 的方向取指向曲面凸侧一方的法线方向, 所以这个通过曲面 S 的电场线数目 $N = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \Phi_e$ 可能是正值, 也可能是负值, 正值表示电场线是从曲面凹侧, 穿过曲面 S 到凸侧, 负值表示是从凸侧穿过曲面 S 到凹侧.

对于电场中一个闭合曲面的电通量, 可以理解为是净通过该闭合曲面的电场线数目. 即 $\Phi_e = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ 积分中, $\mathbf{E}$ 与 $d\mathbf{S}$ 的夹角 $\theta < \frac{\pi}{2}$ 时, $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} > 0$, 表示电场线从该面元 dS 穿出闭合曲面 S ; $\mathbf{E}$ 与 $d\mathbf{S}$ 的夹角 $\theta > \frac{\pi}{2}$ 时, $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} < 0$, 表示电场线通过该面元 dS 进入闭合曲面 S . $\Phi_e = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ 是通过闭合曲面穿出的电场线数目 (取正值) 和进入的电场线数目 (取负值) 的代数和, 即净通过闭合曲面 S 的电场线数目. 若闭合曲面 S 的电通量 $\Phi_e > 0$, 表示从闭合曲面净穿出 (或发出) 了电场线; 若 $\Phi_e < 0$, 则是从闭合曲面净进入 (或吸收) 了电场线.

最后需要指出, 电场中并不存在一条条分立的电场线, 引入电场线只是对电场的一种几何描述方法. 电场实际上是反映电场特性的电场强度在场空间连续分布的概念, 而且电通量是为了反映电场性质而引入的重要物理量, 它不是仅为说明通过一个面积的电场线数目而引入的.

二、电场的高斯定理

任何带电系统通过分割方法, 最后总能将其分割成许多宏观上体积极小的点电荷. 也就是说, 任何带电系统都可以看成是由许多点电荷组成的. 因而由场强叠加原理可推想而知, 任何带电系统的电场都可以看成是许多点电荷电场的叠加. 按照这样的分析, 对电场基本性质的研究, 应从点电荷的电场入手.

我们首先来研究点电荷电场中一个闭合曲面的电通量问题. 设一电量为 q 的点电荷位于原点 O . 在 q 周围的电场空间里做两个闭合曲面 S_1 和 S_2 , 其中 S_1 为包围点电荷 q 的任意闭合曲面, S_2 为不包围点电荷 q 的任意闭合曲面如图 1.12 所示.

先计算包围点电荷 q 的闭合曲面 S_1 的电通量. 点电荷 q 在 S_1 面上 dS_1 面元

处的电场场强为 $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1^2} \hat{\mathbf{r}}_1$, 这里 $\hat{\mathbf{r}}_1$ 是面元 dS_1 的位置矢量 $\mathbf{r}$ 的单位矢量.

由 (1.3.3') 式得闭合曲面 S_1 的电通量 Φ_{e1} 为

$$\begin{aligned}\Phi_{e1} &= \oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_1} \frac{q}{r_1^2} \hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \mathbf{n} dS_1 \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_1} \frac{dS_{1\perp}}{r_1^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_1} d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}\end{aligned}\quad (1.3.5)$$

这里, $dS_{1\perp}$ 为面元 dS_1 在 $\hat{\mathbf{r}}_1$ 的垂直面上的投影, $d\Omega = \frac{dS_{1\perp}}{r_1^2}$ 为 dS_1 面元相对于点电荷 q 的立体角.

对于不包围点电荷 q 的闭合曲面 S_2 , 其电通量为

$$\Phi_{e2} = \oint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_2} \frac{1}{r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2 \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_2} \frac{1}{r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2 \cdot \mathbf{n} dS_2$$

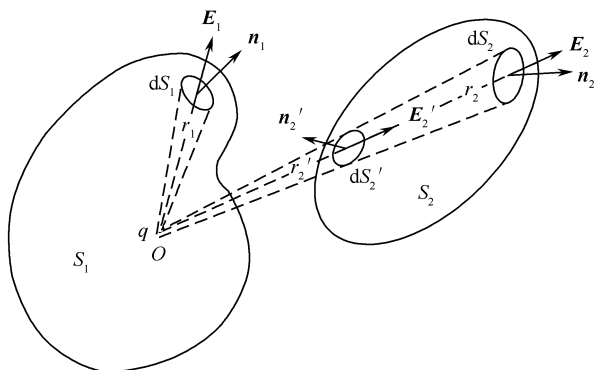


图 1.12 点电荷电场中闭合曲面的电通量

从图 1.12 中可以看出, 闭合曲面 S_2 上的每个面元 dS_2 对应一个面元 dS_2' , 它们相对于点电荷 q 有相同的立体角, 不过 dS_2 的位矢的单位矢量 $\hat{\mathbf{r}}_2$ 与其外法线方向 $\mathbf{n}$ 的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$, 而 dS_2' 的位矢的单位矢量 $\hat{\mathbf{r}}_2'$ 与其外法线方向 $\hat{\mathbf{n}}_2'$ 的夹角大于

$\frac{\pi}{2}$, 故有关系

$$\frac{1}{r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2 \cdot \mathbf{n} dS_2 = d\Omega = d\Omega' = -\frac{1}{r_2'^2} \hat{\mathbf{r}}_2' \cdot \mathbf{n}' dS_2'$$

即

$$\frac{1}{r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2 \cdot \mathbf{n} dS_2 + \frac{1}{r_2'^2} \hat{\mathbf{r}}_2' \cdot \mathbf{n}' dS_2' = 0$$

所以

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \hat{r}_2 \cdot \mathbf{n} dS_2 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \hat{r}_2' \cdot \mathbf{n}' dS_2' = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_2 + \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{S}_2' = 0$$

这就是说,不包围点电荷 q 的任意闭合曲面 S_2 , 可以按照图 1.12 中从点电荷引出的小立体角在 S_2 面上分割出 dS_2 和 dS_2' 一对小面元那样,把 S_2 分割成很多成对的小面元对,而每对面元的电通量之和都等于零,因此, S_2 被分割成的这些面元对的电通量之和,即 S_2 闭合曲面的电通量 Φ_{e2} 自然也等于零.所以不包围点电荷 q 的任何闭合曲面 S_2 的电通量为

$$\Phi_{e2} = \oint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.3.6)$$

综合(1.3.5)式和(1.3.6)式,我们得出结论:在一个静止点电荷的电场中,任何一个包围该点电荷的闭合曲面,不管其形状、大小如何,其电通量都等于所包围点电荷电量 q 的 $\frac{1}{\epsilon_0}$ 倍,任何一个不包围该点电荷的闭合曲面,不管其形状、大小如何,其电通量均等于零.

对于由 N 个点电荷 $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$ 组成的点电荷组的电场来说,如果我们在电场中取任意一个闭合曲面(称为高斯面) S ,若 S 包围了 N 个点电荷中的 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 这 n 个点电荷,根据电通量的叠加原理以及前面所得出的点电荷电场中的电通量公式(1.3.5)式和(1.3.6)式,通过这闭合曲面的电通量 Φ_e 应为

$$\Phi_e = \sum_{j=1}^N \Phi_{ej} = \sum_{i=1}^n \Phi_{ei} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{(S \cap q_i)} q \quad (n \leq N)$$

其中, $\Phi_{ei} = \frac{1}{\epsilon_0} q_i$ 为 S 曲面包围的第 i 个点电荷的电场通过 S 闭合曲面的电通量,

$\sum_{(S \cap q_i)} q = \sum_{i=1}^n q_i$ 为 S 曲面包围的点电荷电量的代数和.

由于任何电荷连续分布的带电体,通过分割均可看成是由许多点电荷组成的点电荷组,所以上式对于电荷连续分布的带电体的电场也成立.总之,对于真空中的任何静电场,都具有如下规律:通过电场中任何闭合曲面 S 的电通量 Φ_e ,等于该曲面所包围的所有电荷电量的代数和 $\sum_{(S \cap q)} q$ 的 $\frac{1}{\epsilon_0}$ 倍,与闭合曲面外的电荷无关.此规律的数学表达式为

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{(S \cap q)} q \quad (1.3.7)$$

电场的这个规律称为电场的高斯定理.

对于高斯定理,有必要作如下几点讨论和说明:

(1)高斯面所包围的电荷电量的代数和 $\sum_{(S \cap q)} q$ 问题.对于电量为 q 的点电荷电

场,若点电荷 q 在高斯面 S 内, $\sum_{(S \text{ 内})} q = q$; 若 q 在高斯面外, $\sum_{(S \text{ 内})} q = 0$; 不存在点电荷 q 正好在 S 面上的情形, 因为只有当 q 与高斯面的距离远大于 q 本身的线度时, 电荷 q 才能被视为点电荷. 对于点电荷组的电场, $\sum_{(S \text{ 内})} q = \sum_i q_i$, q_i 是高斯面 S 所包围的那些点电荷的电量, q_i 可能是正电荷也可能是负电荷, $\sum_i q_i$ 是那些正、负电荷电量的代数和. 对于电荷连续分布的带电体的电场, $\sum_{(S \text{ 内})} q$ 是高斯面 S 内的总电荷电量, 若 S 面包围的空间体积为 V , V 内的体电荷密度为 ρ , 则 $\sum_{(S \text{ 内})} q = \iiint_V \rho dV$, 这时高斯定理也可表示为

$$\Phi_e = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV \quad (1.3.8)$$

这是相当普遍情况的高斯定理表示式, 因为即使是点电荷或点电荷组为电场的场源, 也可以通过特殊的数学函数方法把它作为电荷连续分布的场源来处理.

(2) 高斯面电通量计算中的场强问题. 在应用高斯定理 (1.3.7) 式时应特别注意, 公式右边计算的电量是高斯面内的电荷电量, 而公式左边计算高斯面的电通量时, 所用的场强 $\mathbf{E}$ 不仅仅是高斯面内电荷产生的电场场强, 而是高斯面内外所有电荷产生的电场场强.

(3) 高斯定理反映出静电场是有源场问题. 从电场电场线的角度来讨论高斯定理时, 我们把通过一个闭合曲面的电通量看作为通过此闭合曲面的电场线数目. 按照高斯定理, 一个闭合曲面内如果没有电荷或者净电荷 (即正、负电荷的代数和) 为零, 则通过此闭合曲面的电通量或者说电场线数目就等于零, 也就是通过此闭合曲面进来的电场线数等于通过此闭合曲面出去的电场线数. 闭合曲面所包围的空间既没有产生出一些电场线, 使出去的电场线数大于进来的电场线数, 也没有消灭掉一些电场线, 使进来的电场线数大于出去的电场线数, 电场线只是连续地通过了此空间. 电场线不会在没有电荷的空间终止或产生. 如果闭合曲面内有正电荷 q , 由高斯定理可知, 一定会通过闭合曲面多向外发出 $\frac{1}{\epsilon_0} q$ 根电场线; 反之, 若闭合曲面内有负电荷 q , 则一定会终止掉 $\frac{1}{\epsilon_0} q$ 根从闭合曲面外进来的电场线. 总之, 有正电荷的地方会发出电场线, 有负电荷地方会终止电场线; 反之, 发出电场线的地方一定有正电荷, 终止电场线的地方一定有负电荷. 这表明静电场是一个有源场, 电荷是静电场的源.

(4) 高斯定理与库仑定律的关系问题. 静电场所以存在高斯定理, 其根源在于库仑定律的平方反比律. 如果库仑定律取形式

$$f \propto \frac{1}{r^{\frac{2}{\epsilon} + \delta}}$$

其中 δ 是一任意小量, 则点电荷 q 的电场场强大小 E 应有

$$E \propto f \propto \frac{1}{r^{2+\delta}}$$

在点电荷 q 的电场里, 若以 q 为球心、 r 为半径的球面 S 作为高斯面, 其电通量应为

$$\Phi_e = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^\delta} \oint_S \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{r^2} = \frac{q}{\epsilon_0 r^\delta}$$

电通量 Φ_e 是随 r 变化的, 若 $\delta > 0$, 当 $r \rightarrow \infty$ 时, $\Phi_e(\infty) \rightarrow 0$, 高斯定理就不能成立了. 正是由于高斯定理与库仑定律密切相关, 人们才能够通过检验高斯定理的正确性来判定库仑定律的平方反比律的精确度. 高斯定理虽来自于库仑定律, 对于静电场成立, 但在讨论随时间变化的电场时发现它也是正确的. 从这个意义上讲, 高斯定理比库仑定律适用范围更广, 也更基本, 它虽寓于静电场这一特殊情况之中, 却反映出一般电场的普遍规律性.

三、高斯定理应用举例

高斯定理是静电场的一个基本性质, 或者说是静电场应遵守的基本规律. 当然, 对于一般的静电场, 单凭这个性质还不能完全把一个静电场确定下来, 因为静电场还具有后面 1.3 节将要讨论的另一个重要性质. 但是, 对于静电场来说, 高斯定理这个性质是如此重要, 以至于在一定条件下, 仅靠这一性质就能完全确定某些电场. 下面我们通过几个具体例子, 看一看如何利用高斯定理来确定具有一定对称性的一维(只与一个空间坐标有关)静电场的场强问题.

【例 1.3.1】 求线电荷密度为 λ 的无限长直线带电线的电场场强.

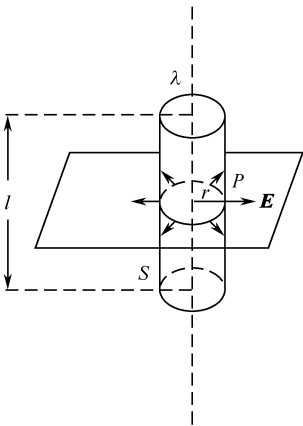


图 1.13 无限长带电直线的电场

【解】 无限长均匀带电直线的空间电场, 显然具有轴对称性, 带电直线即为其对称轴. 这种对称性表现为: 任何垂直于长直带电线的平面内的同心圆周上场强的大小都相等; 而且这圆周上场强的方向不能向上、向下、向前或向后倾斜, 只能是向外 ($\lambda > 0$) 或向内 ($\lambda < 0$) 的辐射线或会聚线方向. 根据以上对电场对称性的分析, 以长直带电电线为中心轴的圆筒面上, 各点的电场场强 $\boldsymbol{E}$ 的大小相等, 方向垂直于圆筒面, 而圆筒上、下底面上的场强均平行于其底面. 欲求与长直带电电线相距为 r 的 P 点的场强, 可作一以 r 为半径、长为 l 的这种圆筒面为高斯面如图 1.13 所示. 利用高斯定理得

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 2\pi r l E = \frac{1}{\epsilon_0} \mathcal{L}$$

故 P 点的场强为

$$E=\frac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0}$$

考虑到 P 点场强 $\boldsymbol{E}$ 的方向与圆筒面相垂直,所以有

$$\boldsymbol{E}=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0r}\hat{\boldsymbol{r}}$$

这与本章 1.2 节中例 1.2.2 所得结果相同,但利用高斯定理计算电场场强却方便、简捷得多.

〔例 1.3.2〕 求无限大均匀带平面的电场场强,设其面电荷密度为 σ .

〔解〕 无限大均匀带电平面对左、右两半空间的影响是相同的.因此,电场应具有平面左、右对称性,即距平面等距离的左、右两对称点 P 和 P' 应具有大小相等的场强.由于带电平面无限大,因此平面对任一点 P 向上、向下、向前和向后的影响是相同的,这样, P 点的场强方向只可能是垂直于平面而背离平面方向($\sigma>0$ 时)或指向平面($\sigma<0$ 时)方向,而且 P 点平行于平面作上下或前后有限距离移动后,场强的大小、方向不会改变.根据对电场对称性的这些分析,欲求距平面为 r 的 P 点场强时,可过 P 点及其对称点 P' 点作两个面积均为 ΔS 的对称小圆面,并以它们为底作一圆筒状闭合曲面 S 如图 1.14 所示,以此闭合曲面作为高斯面.利用高斯定理可得

$$\oint_S\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=2\Delta SE=\frac{1}{\epsilon_0}\sigma\Delta S$$

故得 P 点场强为

$$E=\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\tag{1.3.9}$$

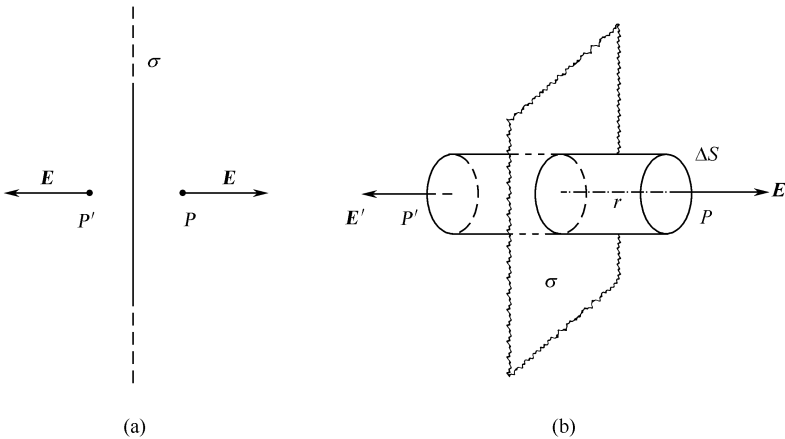


图 1.14 无限大均匀带电平面的电场

场强的方向为垂直于无限大带电平面而背离平面方向 ($\sigma > 0$ 时) 或指向平面方向 ($\sigma < 0$ 时)。

(1.3.9) 式的结果表明, 无限大均匀带电平面的电场场强与场点到平面的距离无关. 这一结论的出现是由于所讨论的场点到带电平面的距离都远远小于带电平面的线度所致. 实际上, 无限大带电平面是不存在的, 只要均匀带电平面的线度远远大于所讨论场点到带电平面的距离, (1.3.9) 式的场强公式即可适用. 利用无限大均匀带电平面的电场场强公式 (1.3.9) 式和场强叠加原理, 容易证明: 带等量异号电荷的一对无限大平行平面之间的电场场强为

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.3.10)$$

外部场强为 0.

[例 1.3.3] 求均匀带电球体内外的电场分布. 设球体带电总量为 q , 半径为 R .

[解] 由于带电体的电荷分布具有球对称性, 故其电场分布也具有球对称性. 即以带电球球心为中心的任一球面上各点的场强大小都相等, 场强方向垂直球面向外 ($q > 0$) 或向内 ($q < 0$). 求距球心 O 为 r 的球外 P 点的场强时, 根据电场具有球对称性分布的分析, 取以球心 O 为圆心、以 r 为半径的球面作为高斯面如图

1.15(a) 所示, 带电球的体电荷密度 $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3q}{4\pi R^3}$. 由高斯定理得

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

故得球外 P 点的场强为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

或

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}$$

此结果与本章 1.2 节中例 1.2.5 所得结果相同.

求球内距球心为 r 的 P' 点场强时, 取以 P' 点到球心的距离 r 为半径、以 O 为球心的球面 S' 作为高斯面, 利用高斯定理得

$$\begin{aligned} \oint_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V'} \rho dV' \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{3q}{4\pi R^3} = \frac{qr^3}{\epsilon_0 R^3} \end{aligned}$$

这里, V' 为 S' 所包围的球体体积, 并利用了球面 S' 上的 E 相等. 故得球内 P' 点的场强为