管理、决策与信息系统丛书

二层规划的理论与应用

滕春贤　李智慧　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

二层规划是系统优化决策问题的重要研究方法之一。本书从实际应用出发，研究了二层线性规划、二层非线性规划、多目标二层规划等问题，利用模拟退火、遗传、混沌等智能化算法成功地求解了某些二层规划问题，并以企业人力资源管理为例，演示了二层规划方法在实践中的应用。

本书可作为管理科学与工程、系统工程、运筹与控制学科的研究生教材，也可作为该领域的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

二层规划的理论与应用/滕春贤，李智慧编著.—北京：科学出版社，2002

（管理、决策与信息系统丛书/汪寿阳主编）

ISBN 7-03-010870-1

Ⅰ. 二… Ⅱ. ①滕…②李… Ⅲ. 系统工程-应用-管理学 Ⅳ. C931

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 065188 号

责任编辑：陈　亮/责任校对：钟　洋

责任印制：安春生/封面设计：陈　敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2002 年 9 月第　一　版　　开本：850×1168　1/32

2002 年 9 月第一次印刷　　印张：6 5/8

印数：1—1 500　　字数：167 000

定价：17.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈北燕〉）

管理、决策与信息系统丛书

编辑委员会

主　编　汪寿阳

副主编　陆汝铃　章祥荪　杨晓光

委　员　(按姓氏笔画排列)

于　刚　邓小铁　石　勇　张汉勤

杨晓光　汪寿阳　邹恒甫　陆汝铃

岳五一　金　芝　赵修利　章祥荪

黄海军　程　兵

丛 书 序

管理理论、决策科学与信息系统技术在 20 世纪获得了巨大的发展。在 20 世纪 80 年代,为了推动这三大领域在中国的发展以及推动这些领域之间的学科交叉研究,中国科学院管理、决策与信息系统重点实验室在科学出版社的支持下编辑出版了这套“管理、决策与信息系统丛书”。这套丛书不求全而求新,以反映最新的研究成果为主。经过编委会的各位专家,特别是前任主编许国志院士的努力和作者们的辛勤劳动,这套丛书在社会上尤其是在科学界得到了广泛的关注和好评。

回顾管理理论的发展历史,我们不难发现一个趋势:系统的概念和方法越来越多地应用到管理的各个方面,并成为管理理论发展的第三阶段的重要特征。管理理论的第一阶段形成于 20 世纪初,以 F.W.Taylor 为代表,倡导科学的管理,为提高工厂劳动生产率而提出了标准化原理。管理理论的第二阶段,从 20 世纪 20～30年代开始,以行为科学为特点,主要代表有 A.H.Maslow, K.Lewin,R.Jannenbaum 和 D.McGregor 等人。他们研究人的需要、动机、激励和定向发展;研究正式和非正式的团体的形成、发展和成熟;研究个人在团体中的地位、作用,领导方式和领导行为等。管理理论的第三阶段出现在第二次世界大战后,这一阶段有各种学派,例如社会系统学派、决策理论学派、系统管理学派、管理科学学派和经验主义学派等。他们从不同角度强调系统的概念、理论和方法。这三个发展阶段并非截然分开,而是相互交叉的。

不论管理理论有多少学派,人们大致可以将它们分成三种模式:机械模式、生物模式和社会模式。生物模式认为:组织像一个生物,有头脑机构,有职能部门和分支机构。一个企业的目标可以分解,各部门完成其中的一部分。在这种模式下,目标管理得以发

展。社会模式认为：各级组织都是一个交互的系统，它们有共同的目标、交互作用和信息联系，管理者是交互作用的中心。其特点是强调交互式管理(interactive management)和强调以系统方法来管理。这正是它不同于传统管理的地方。而传统管理大致可分为三类：回顾式(reactive)管理、被动式(inactive)管理、预测式(preactive)管理。回顾式管理是在自下而上地总结过去经验的基础上，去发现组织的弱点，找出克服其弱点的措施，并在条件允许下去逐个地解决问题。被动式管理的特点是危机管理，是“救火队”，领导疲于处理当前各种各样的问题。而预测式管理的决策基于对今后的经济、技术、顾客行为和环境等的预测。这三类管理可以混合成各种样式的管理方式，正像红、黄、蓝可以组成各种颜色一样。交互式管理强调系统的方法，认为某个企业出现的市场问题绝不仅仅是一个市场问题，而与 R&D、生产、原材料供给和人事等有关，是一个系统的问题。回顾式管理的弱点是缺乏系统的观点。交互式管理强调要设计可见的未来，创造一条尽可能实现它的道路，这是“救火队”所不能做到的，但它又不把一切都寄托于预测。交互式管理还强调“全员参与”和“不断改进”。

决策理论学派以 E.W.Simon 等人为代表，是从社会系统学派中发展起来的。它认为决策贯穿于管理的全过程，管理就是决策。决策的优劣在很大程度上依赖于决策者的智慧、素养和经验。计算机技术的发展不仅使人们能够快速地解决决策中的复杂计算问题，而且可以有效地进行决策过程中的信息处理、分析等工作，从而达到提高决策质量的效果。今天正处在新的发展阶段的决策支持系统(DSS)和管理信息系统(MIS)正是集管理理论、系统理论和信息技术三大领域的交叉学科方向，它们为解决许多复杂决策问题提供了有力的工具。粗略地说，决策问题大致可分为三个层次：战略决策、结构决策和运行决策。战略决策是指与确定组织发展方向和远景有关的重大问题的决策。结构决策是指组织决策，运行决策是指日常管理决策。

从信息论的观点看，整个管理过程就是一个信息的接收、传

输、处理、增功与利用的过程。计算机信息处理技术应用于管理走过了三个阶段:数据处理(EDP)、管理信息系统和决策支持系统。作为管理信息系统和决策支持系统的支持环境,相对独立于计算机软件的开发,需要研究和建立各类管理信息系统独特的支持软件系统和开发环境,例如分布式数据库管理系统和分布式知识库管理系统,面向用户、通用性较强和面向特殊用户的模型库、方法库管理系统,以及一些专门的用户接口语言。

展望未来,管理、决策与信息系统这个交叉学科的研究领域的发展有以下几个趋势:

1. 更加重视人的行为的研究,企业的管理将不仅强调竞争,而且应在竞争的前提下注重合作与协调;

2. 非线性建模与分析,将取得大的突破;

3. 互联网的飞跃发展,将为管理与决策分析提供新的研究问题以及支持平台。

这些趋势有两个重要特点:(1)利用信息技术与数学中的最新成就去研究管理与决策问题;(2)通过观察管理决策与信息系统发现其规律,形成数学与信息科学中具有挑战性的研究课题。

在这套丛书的编辑出版中,我们将不仅注重每本书的学术水平,而且也关注丛书的实用价值。因此,这套丛书有相当的适用面。丛书的作者们将竭尽全力把自己在有关领域中的最新研究成果和国际研究动态写得尽可能地通俗易懂,以便使更多的读者能运用有关的理论和方法去解决他们工作中遇到的实际问题。

本丛书可供从事管理与决策工作的领导干部和管理人员、大专院校师生以及工程技术人员学习或参考。

汪寿阳

2002 年 3 月

目　　录

第 1 章　绪　　论

1.1　引　　言

阶层性是系统的六大特征之一，对于大系统和复杂系统，层次性更是主要特性。随着人类社会的发展，经济全球化的加剧，实际问题的规模越来越大，层次性愈加明显，结构越来越复杂。因此，层次性的研究就具有非常重要的意义。

多层规划正是为了研究系统层次性问题而产生的，而这类问题的研究已经有了很久的历史。

20 世纪 50 年代提出来的 Stackelberg 对策，是一种多人非零的对策，其中局中人有上、下层关系并且各自有不同的目标，而各自的策略集通常是彼此分离的。多层规划问题与这类对策有些共同点，但各个层次的决策者必须依次做出决策，各自的策略集不必再是分离的。

20 世纪 60 年代，Dantzig 和 Wolfe 提出了大规模线性规划的分解算法，相当于承认有一个核心决策者，他的目标是高于一切的，其他各层次的决策者实现自己的目标只不过是为实现核心决策者的目标的一种分工，他们的目标必须与核心决策者的目标完全一致，没有自己独立的利益。多层规划承认有最高决策者，但不是绝对的，他容许下层决策者有各自不同的利益。

20 世纪 70 年代发展起来的多目标规划通常是寻求一个决策者的互相矛盾的多个目标的折衷解，有些技术，如分层优化技术，也可用来求解层次问题，但下层的决策不影响上层的目标，因而可以逐层独立求解。而多层规划正是要强调下层决策对上层目标的影响，因此多层规划问题通常不能逐层独立求解。

20 世纪 70 年代以来，人们在各种现实的层次分散系统优化

决策问题的研究中，遇到用上述方法不能解决的实际问题，因而人们寻找各种特定的方法并成功地解决了这些问题，并逐渐形成了多层规划的概念和方法。如：Cassidy（1971）的政府政策效力分析，Kyland（1975）的经济层次分析，Bracken 等人（1973～1977）的战略武器配置研究，Candler 和 Norton（1977）的奶制品工业模型和墨西哥农业模型等。多层规划（Multilevel Programming）一词就是 Candler 和 Norton 在上述论文中首先提出来的，它的原意是一集嵌套着的数学规划问题，即在约束条件中含有优化问题的数学规划。

20 世纪 80 年代至今，多层规划的数学模型更加明确和形式化了。文卫平、Candler 和 Townsley，Bialas 和 Karwan，Bard 等先后提出了一般的二层规划或 n 层规划的数学模型；Benson，阮国桢把上述数学模型推广到容许集是无界的情形；汪寿阳等人深入研究了二层非线性问题；王先甲、冯尚友和盛昭瀚也分别出版了关于二层规划理论与算法的专著。

总之，在过去的 20 年中，多层规划的理论、方法及应用都有了很大的发展，正在逐渐形成一个新的运筹学分支。目前，很多国家对多层规划的研究都非常重视，把它列为科学基金资助项目，并取得了巨大成功。

多层规划问题通常有如下特点：

(1)系统是分层管理的，各层决策者依次做出决策，下层服从上层，但下层有相当的自主权。

(2)各层决策者有各自不同的目标，这些目标往往是互相矛盾的。

(3)各层决策者各自控制一部分决策变量，以优化各自的目标。

(4)上层决策者优先做出决策，下层决策者在为优化自己的目标而选择策略时，不能违背上层的决策。

(5)上层的决策可能影响下层的策略集，因而部分地影响下层目标的达成，但上层不能完全控制下层的决策，在上层决策允许范

围内下层有自主决策权。

(6)下层的决策不但决定着自身目标的达成,而且也影响上层目标的达成。因此,上层在选择策略以优化自己的目标达成时,必须考虑到下层可能采取的策略对自己的不利影响。

(7)各层决策者的容许策略集通常是不可分离的,他们往往形成一个相关联的整体。

在多层规划的应用中,以二层规划最为常见,这是因为现实的决策系统大都可以看成二层决策,例如:中央和地方,公司和子公司,工厂的厂部和车间,高校的校部和院所等。实际上,任何多层决策系统都是一系列二层决策系统的复合[1~3]。

二层规划是二层决策问题的数学模型,它是一种具有二层递阶结构的系统优化问题,上层问题和下层问题都有各自的目标函数和约束条件。上层问题的目标函数和约束条件不仅与上层决策变量有关,而且还依赖于下层的问题的最优解,而下层问题的最优解又受上层决策变量的影响。

二层规划已经取得了一系列可喜的成果,下面我们对有关文献进行一下综述。

1.2 文献综述

二层系统的研究起源于经济问题,如稀有资源在各部门间的分配问题研究[4~6],价格控制问题的研究[7]等。应用的需要推动了二层系统最优化研究的发展。1973 年,在 J. Bracken 和 J. McGill 的文章[8]中,出现了二层规划的数学模型。1977 年,在 W. Candler 和 R. Norton 的科技报告[9]中,正式出现了二层规划和多层规划这个名词。20 世纪 80 年代,二层规划引起大家的注意,受到 H. Stackelberg 对策论[10]的启发,一些学者开始集中研究,使得二层规划在数学规划领域蓬勃兴起。

1.2.1 理论性质

1. 复杂性

即使二层规划上、下层问题中的目标函数和约束函数都是线性的，它也很可能是一个非凸问题，并且是非处处可微的。R. Jeroslow[11]指出二层线性规划是 NP-Hard 问题。J. Bard[12]和 O. Ben-Ayed 与 C. Blair[13]肯定了这一结论，并给出了简短的证明。最严格的复杂性结论是 P. Hansen，B. Jaumard 和 G. Savard[14]得出的，他们证明二层线性规划是强 NP-Hard 问题。后来，L. Vicente，G. Savard 和 J. Judice[15]指出，寻找二层线性规划的局部最优点也是 NP-Hard 问题。

2. 最优性

所谓最优性条件就是数学规划问题最优解满足的条件。最优性条件在数学领域的研究中是十分重要的，它是寻找求解数学规划问题最优解算法的理论基础。最早进行二层线性规划最优性研究的是 Bard[16]，他应用一个带有约束集(有限维且带有参数)的等价的单层规划，得到了一些最优性条件。P. Clarke 和 A. Westerberg[17]，A. Haurie，G. Savard 和 D. White[18]也进行了相同的研究。对二层非线性规划最优性条件研究大多是在凸连续可微和其他较强假定条件下进行的，见文献[3，19～21]。文献[22]研究了带有约束品格的二层规划问题的 Kuhn-Tucker 必要条件。Y. Chen 和 M. Florian[23]，S. Dempe[24，25]，J. Outrata[26]和 J. Ye，D. Zhu[27]使用了非光滑分析，而 Z. Bi 和 P. Calamai[28]利用二层规划与一个相关精确罚函数之间的联系，得到了其他一些充分必要条件。以上文献都要求下层以其惟一最优解为“最佳反应”反馈到上层，这显然限制了二层规划的使用范围[29～31]。用下层规划问题的极值函数作为响应反馈到上层，克服了要求下层规划问题对上层任何可能的决策有惟一解的局限性。文献[32]利用非光滑分析、极值映射和微分包含理论，分析了动态递阶决策问题的结构、性质，给出了解决这类问题的一个通用性结构化模型，并利用这一

模型在非凸、非光滑条件下导出了最优策略存在的必要条件。以上提到的这些最优性分析大部分都忽略了问题的几何特性。G. Savard 和 J. Gauvin[33]提出了基于最速下降方向的最优性必要条件，部分地填补了二层非线性规划方面的空白。L. Vicente 和 P. Calamai[34]则基于二层规划的几何特性，直接提出了一类二层规划的最优性充要条件。王先甲、冯尚友的著作《二层系统最优化理论》[35]研究了二层线性规划、二层凸规划、二层李普希兹规划和二层拟可微规划的基本概念、性质、各种微分表示和最优性条件等问题。

以上综述了单目标二层规划的最优性条件，下面讨论多目标二层规划的最优性。二层系统的上、下层决策都以多个指标反映决策的效果，并在各自的偏好下寻找效果最好的决策，这样的问题就是多目标二层规划问题(BLMOP)。

文献[36]可能是研究多目标二层问题最早的文献，但它并没有给出多目标二层规划问题的一般描述，只是对下层子系统有多个目标的情况作了简单的讨论，用一个隐式形式的效用函数将其转化成了一个单目标问题。文献[37]将多目标二层规划用于资源分配，它也只是讨论了下层为多目标的情况，并且是在 Pareto 最优意义下讨蜜的，在一系列较强的条件下，用求 Pareto 最优解的 ε-约束法将其转化成了一个与之等价的不可微非线性规划问题，然后用可行方向法给出了最优解的判别条件。文献[38]和文献[39]则是把大系统分解-协调的两种算法推广到多目标二层规划问题的研究。文献[40]讨论了下层子系统为单目标、上层为多目标的二层规划问题，对下层的单目标函数为二次函数、线性约束的二层规划问题作了具体的研究，用 ε-约束法和 Kuhn-Tucker 定理给出了这种二层规划问题最优解的最优性条件。文献[41]提出了“二层 Pareto 有效解”和“带权数二层 Pareto 有效解”的概念，并建立了对应的最优性条件。文献[42]讨论了下层变量不相关的多目标二层规划，也给出了 Pareto 有效解的存在条件，同时具体研究了多目标二层线性规划。文献[35]用代数和分析相结合的方法，

深入探讨了多目标规划的几个理论问题和方法;提出了多目标二层规划四种一般模型及其最优解的概念,并探讨了它的有关量的凸性;得到了一种多目标二层规划的最优性必要条件。文献[43]详细研究了具有协商型从者的多人递阶大系统的决策问题。文中给出了这类决策问题诱导策略设计的基本思想和方法,具体推导了这类问题诱导策略的形式,并给出了诱导策略存在的充分条件。文献[44]在极值分析的框架下,针对上、下层均为多目标且上层问题的极值函数是由下层问题的有效前沿隐性确定的这类多目标二层规划问题,建立了一个通用性结构化模型;研究了模型中构成函数的伴随导数、锥凸性、锥单调性和上局部 Lipschitz 性;利用参数规划、非光滑分析和非线性分析的理论和方法,获得了模型锥有效解存在的最优性充要条件。

3. 独立性

加入不相关约束,问题最优解不变的性质叫 IIC(independence of irrelevant constraints),文献[45]研究了带有不相关约束的二层规划的独立性问题,并给出了二层规划存在 IIC 的充分、必要条件,还给出了一种测试方法。

4. 相关问题

对偶理论是规划理论中重要的组成部分,由于二层规划理论的深入研究,逐渐有文献探讨二层规划的对偶规划。本书 3.3.2 小节讨论了上层目标函数以下层子系统目标函数的最优值作为反馈的一类二层凸规划的对偶规划问题,在构成函数满足凸连续可微等条件的假设下,建立了二层凸规划的 Lagrange 二层对偶规划,并证明了基本对偶定理。

1.2.2 二层规划的求解

有多种多样的算法求解二层规划,很难进行分类。为了更清楚地进行文献综述,我们沿用文献[46]中的结构,并加入近年来新出现的文献。

1．极点算法

这类算法绝大部分是针对二层线性规划的。W．Candler 和 R．Townsley[47]在研究上层无约束、下层有惟一解的二层线性规划时得到一个性质：如果二层线性规划最优解个数有限，那么，在约束集的极点处，至少存在一个是最优解。后来，J．Bard[48]和 W．Bialas 和 M．Karwan[49]在约束集有界的假设下，证明这是二层线性规划的一个共性。基于这个性质，文献[47，49]提出通过枚举约束集的极点来计算二层线性规划的全局最优解。文献[1，50]提出的“K 次最好法”也是一种枚举法，不过是基于松弛问题而不是下层问题。文献[51]利用容许集的极点与下层问题可行集的极点之间的关系，也给出了一种“K 次最好”算法。文献[15]研究了二层二次规划的诱导域，引入了“诱导域极点” 和“诱导域集值方向”的概念，同时提出了一种极点算法，根据上层目标函数的性质计算局部极小点。还有一些极点法，见文献[52～56]。

2．分枝定界法

分枝定界法尽管计算量很大，但还是能够求解全局最优解，因此得到了广泛的应用。文献[3，57]提出了线性情况下的算法；而文献[58]中提出了线性-二次的解法；文献[59，20，60]则提出了针对二层二次规划的求解方法。使用不同的分枝策略，文献[61]找到一种求解二层线性规划的方法，对求解中等规模问题非常有效。

尽管对部分变量限定为整数的情况关注的比较少，但还是有人做了一些研究，如 J．Bard 和 J．Moore[62，63]。文献[64]提出求解二层整数线性规划的分枝定界过程，文献[65]介绍了求解二层整数二次规划的分枝定界算法。文献[66]中，还提出了一种割平面法。文献[67]引入代理约束，构造一个计算简单的定界函数，也提出一个分枝定界算法。文献[68]提出一种有效的分枝定界算法来求解上层 0～1 变量、下层多目标的二层规划问题。

3．互补旋转算法

首先提出使用互补旋转算法求解二层线性规划的是 W．Bialas，M．Karwan 和 J．Shaw[69]。这种方法，在文献[49]中提到，

不能求得二层线性规划的全局最优解(见文献[13]和文献[70]的例子)。J. Judice 和 A. Faustino 提出了 SLCP(连续线性互补旋转)算法,来求解二层线性规划[70,71]、二层线性——二次规划[72]的 ε 全局最优解。另一种互补旋转算法可以看成是改良的单纯形法,见 H. Önal[73]。

4. 下降算法

这种算法引入了下降方向,来计算静态点和局部极小点。第一类典型算法是最速下降方向法,这是非线性规划中常用的方法,G. Savard 和 J. Gauvin[33]把它拓展到了二层非线性规划领域。L. Vicente,G. Savard 和 J. Judice[15]针对下层问题是严格凸二次的二层凸规划提出了两种下降方法:一种是基于旋转尺度的方法,但它不能保证局部最优;另一种是改良的最速下降法,克服了这个缺陷。另一种典型算法是 C. Kolstad 和 L. Lasdon[21]提出的,求解二层非线性规划。这种方法应用梯度信息求解隐含的规划问题:

$$\min_x F(x, y(x))$$
$$\text{s.t.}\quad g(x, y(x)) \leqslant 0$$

其中,$\{y(x)\}$是给定 x 后,下层的反应集,作者对 y 的梯度进行局部估计,应用 BFGS 拟牛顿法来求解这个问题的无约束形式。文献[29]给出一种下层以最优目标值反应到上层的一类二层凸规划的下降方向算法。

5. 罚函数法

这类方法的一部分仍可视为下降算法,但它们通常指使用严格的罚函数并且局限于求解静态点和局部极小点,见文献[74~79]。他们只是将下层目标惩罚,化为单层规划。而文献[80]中两个目标均被惩罚。文献[81]研究了严格罚函数的可导性,在把下层问题作为惩罚项时,只使用平方根附加项。文献[82]利用内部罚函数法将下层规划问题化为无约束问题。在文献[83]中,D. White 和 G. Anandalingam 提出了一个严格的罚函数算法,把二层规划转化为双线性规划,通过求解双线性规划,得到了二层线性规

划的全局最优解。文献[84]应用内点法，使二层线性规划等价于一序列非线性规划问题。文献[85]给出了价格控制问题的罚函数法。文献[86]给出了一般的二层规划问题的严格和松弛惩罚方法。文献[87]用罚函数将二层规划问题化为约束区域为凸集的凹规划，然后用渐进外逼算法求全局最优解。

6. 模糊数学方法

文献[88]针对上层有约束条件，下层有 N 个独立决策单元的二层线性规划问题，提出了一种模糊数学解法。首先，把这种规划分解为若干单层规划；然后引入隶属函数，用 3 个定理对各单层规划的解进行讨论，最终把这种二层线性规划转化为求解一个单层线性规划问题。文献[89]就多人递阶资源分配问题提出了对决策者模糊满意度进行两步折衷的求解方法，先用下层各部门目标对于资源之影子价格所构成的非冲突函数为权，对下层决策者进行折衷；然后将折衷后的下层视为一个整体，用依据上、下层决策权力所分配的权进行上、下层的折衷，以此得到各个决策者都满意的折衷解。文献[90]给出了多目标多人两层规划问题的 L-U 模糊目标规划算法。

7. 智能优化算法

文献[91]把递阶系统上层“yes-no”决策看作是“0-1”整数变量，给出一种二层混合整数线性规划模型，采取的算法是简单禁忌搜索算法。文献[92]对二层线性规划给出了一种禁忌——上升混合算法；文献[93]提出一种遗传算法，产生的初始种群经过处理，以满足上层约束，这样就避免了使用罚函数处理上层约束。文献[94]中应用了基于遗传算法的方法来求解交通系统计划与管理中的二层规划模型，并与原来的基于灵敏度分析的方法进行了比较。文献[95]根据随机人工神经网络——波尔兹曼机的基本原理，提出了求解两层规划问题的波尔兹曼机方法。文献[96]应用神经网络和遗传算法结合的方法求解一类二层递阶系统规划的全局最优解。其中神经网络模型中加入了特定的放大的拉格朗日乘子来处理等式和不等式约束。文献[97]提出一种基于递阶的遗传算法与

动态规划方法结合的混合算法。文献[98]提出的模拟退火算法中引入了一个辅助规划问题，通过求解该辅助规划问题产生满足上层约束的试探点，避免了使用罚函数处理上层约束。文献[99]提出一种对偶温度下的模拟退火算法，此法可求解二层线性、非线性、混合整数非线性规划。

8．其他算法

文献[100]用网格搜索法解二层线性规划，文献[19]用网格搜索算法解一般的二层规划，它是建立在二层非线性规划问题的最优性条件的基础上，需要求解一系列非凸的非线性规划问题。文献[101]使用拟凸极小法求解二层线性规划，文献[102]用动态规划求解递阶线性规划，文献[103]基于无约束非光滑问题的信赖域算法，给出了一种求解下层为线性约束的强凸优化问题的二层规划问题的信赖域算法。文献[104]对于一类二层一主多从非光滑优化问题，提出了将置信域束法(它是一种改进的束法，本质上可以看成是解非可微优化问题的共轭梯度法的扩展)和变尺度法结合起来的一种集成算法。该算法能自适应地将变尺度法嵌入到束法的内部迭代中去，从而能够充分利用束法的全局收敛性和变尺度法的快速收敛速度，研究了模型构成函数的 Lipschitzian 性，给出了计算目标函数次梯度的方法，分析了算法思想、步骤，最后讨论了算法的收敛性。文献[105]，[106]给出了一类逼近法。文献[107]给出了具有极小风险解的二层规划的近似分解算法。文献[108]提出一种基于参数分析的算法来求解带有参数的可分离整数单调二层规划问题。文献[109]提出一种基于 Frank-Wolfe 的算法，它具有全局收敛性，且算法简单。

9．多目标二层算法

文献[110～113]求解的基本思路相同，就是利用加权法、辅助模型、满意度概念或 Kuhn-Tucker 条件，将多目标二层规划化为多目标单层规划，然后使用交互式决策法或外部逼近法求得最优解。不同的是，文献[110]研究了上层多目标，下层单目标问题，文献[111]研究上层单目标，下层多目标问题；文献[112]研究关于上层

单目标，下层多人无关联多目标问题；文献[113]研究的是基于Stackelberg 主从策略的多人有关联的多目标二层规划问题。文献[114]提出基于主从策略的二层约束变尺度法求解上层多目标，下层多人多目标的二层规划问题。文献[115]，[116]基于模糊集理论，分别针对上层多目标，下层多人无关联单目标和一主多从，从者间有关联的多目标二层规划问题，提出了模糊决策方法。文献[117]针对多目标二层规划问题，提出一种上层转化为极大熵问题，下层进行有效检验的算法。文献[118]基于非线性规划灵敏度分析和 Geoffrion 关联法，提出一种新的多目标二层关联算法。文献[119]采用罚函数法，解决了目标函数严格凸，决策变量约束集凸的多目标二层规划，并证明了方法的收敛性。文献[120]针对二层多目标问题，对相关算法进行了系统的阐述。

1.2.3 多层规划与应用

正如前面提到的，二层规划是多层规划的特例。但是，像 C. Blair 描述的，当层数多于二层时，问题的复杂性明显加大[121]。尽管如此，还是有许多著作研究三层和多层规划，例如 J. Bard[48]，J. Bard 和 J. Falk[3]，H. Benson[2]，R. Jan 和 M. Chen[122]，U. Wen 和 W. Bialas[123]。二层、多层规划特有的结果促进了那些涉及递阶决策过程的实际问题的公式化。以下是值得注意的二层、多层规划的几个应用：

1. 交通

已有大量的文献将二层规划应用于交通领域。

◇ 网络设计问题(NDP)。LeBlanc 和 Boyce[124]首先把 NDP 作为二层规划问题，并给出了明确的公式，但是他们的模型假定成本函数线性增加，这显然是不切合实际的。Ben-Ayed 等人[125]给出了一个类似的但更普遍的公式，它允许成本函数线性和非线性提高。文献[126]根据发展中国家(以突尼斯为例)区域间公路网规划问题，具体地论述了如何建立一个更接近实际的二层线性规划模型。高速公路的修建，本质上也是一个网络设计问题，文献

[127]建立了相应的二层多阶段、多目标模型。文献[128]根据城市公交网络的具体特点，建立了上层为标准公交网络设计模型，下层为平衡配流模型的二层规划模型。还有关于连续 NDP、平衡 NDP 等问题的文献，见[129～134]。

◇ O-D 旅行需求估计问题。文献[135]的第 1 章中，Yang Chen 和 Michael Florian 对该问题作了详尽的叙述：对问题的开端、发展作了回顾，讨论了问题的重要意义与应用，并在边际函数梯度信息的基础上，导出了问题的最优性必要条件。其他文献见[136～139]。

◇ 交通控制。如何进行信号控制，使车辆使用者做出合理反应，减少交通堵塞和延迟，也可作为二层规划问题来进行优化解决，相关文献见[140～145]。

2. 管理

只顾自己的局部利益，而忽略了整体利益，是目前管理中存在的一个比较普遍的问题。二层规划的特点恰恰是从整体的角度出发，兼顾全局，希望达到整体最优。因此，在管理问题中应用二层规划方法，将会取得很好的效果。这方面已经出现一些文献，具体的有：

◇ 资源分配。资源分配是一类比较复杂的管理问题。上层部门将资源分配给多个下层部门，下层部门根据分配的资源和自己已有的资源组织生产，使自己的效益最大。这里存在一个矛盾，上层拥有的资源是有限的，各部门的效益不同，如何使有限的资源产生最大的效益是上层面临的最大问题。这种问题可以用二层规划模型来描述。其实，这也是二层规划产生的背景之一[6]。还可参考文献[146，147]。一些公共设施建设，如电站、水库、污物处理站的建设等，实质上也是资源分配问题。只不过下层不是部门的效益最大，而是公共设施产生的社会效益最大[148～151]。

◇ 价格问题。这是一类典型的二层规划问题，也是二层规划产生的原因之一，较早的见文献[7]。后来又出现较多文献研究价格问题，见文献[152～155]。文献[156]利用二层规划模型，研究

了钢铁企业价格与产品结构的综合决策问题,在价格不确定的情况下,采用模糊数表示价格的可能分布,具有一定的借鉴意义。

◇ 供应链管理。目前随着市场全球化进程的快速推进和竞争环境的急剧变化,越来越多的企业认识到供应连管理的重要性。过去,厂商与其供应商持敌对态度,都想从对方那里获得利润,导致产品开发周期过长、产品质量无法提高、成本居高不下等问题。如何使厂商与供应商紧密合作,达到双赢的目的,成为一个热点研究问题。建立二层规划模型,以各成员利润最大化为下层目标,以供应链的综合绩效为上层目标,来进行优化研究,具有重要的应用价值和现实意义。这方面的文献比较少,有[157,158],相信这也是二层规划未来的应用方向之一。

◇ 生产计划。这个领域也是今后应该加强的。Nicholls, Miles G. 连续发表了关于铝生产企业生产规划问题的文章[159~161]。文献[162,163]是关于生产调度问题的。

◇ 其他方面,如兵力部署[164]、设施定位[165~167]、政策规划[168~170]等。

3. 工程设计问题。近些年有大量的文献将二层规划应用于工程设计问题,取得了良好的效果。由于需要较强的工程专业知识,这里不再展开,可参考文献[171~175]。

二层规划在其他数学领域也将起到重要的作用。例如,在非线性等式约束规划的置信域算法中,对于步长选择子问题的分析中,二层规划提供了一种新颖的方法[176],并且已经用于判别式问题[177]。二层规划还被用于拓扑领域[178,179];同时在目标函数系数不确定的线性规划问题的 min-max regret 解的求解中,也可以使用二层规划方法[180]。

1.3 本书研究的问题

本书第 2 章讨论了二层线性规划问题,主要研究了解的基本性质和最优性条件,并且是针对下层以最优解作为最佳反映反馈

到上层的二层规划问题。价格控制问题虽然本质上是非线性的，但人们常把它当成线性问题来处理，所以我们也把它放在第2章。同时这一章也给出了几种算法：隐式搜索法、K次最好法和隐枚举法等。隐枚举法是针对二层整数线性规划的。第3章主要分为两大部分：第一部分介绍了二层凸规划的模型、最优性条件，重点讨论了其二层对偶规划问题，及二层二次规划问题的几何特性和最优性条件；第二部分介绍了求解二层规划的有关算法，并给出应用二层非线性规划的实际案例。第4章先介绍了多目标单层规划问题的最优性条件，而后研究了一类多目标二层规划问题的最优性条件和线性-分式多目标二层规划问题的有关理论；后半部分给出了多目标二层非线性规划问题的几种算法。第5章是附录部分，主要介绍了多目标规划的一些概念、性质，也给出了多目标二层规划的几种模型和最优性条件。

第 2 章　二层线性规划

2.1　二层线性规划问题

对于二层线性规划问题(BLP)：

$$(\mathrm{P}_1)\max_x f_1(x,y)=a^{\mathrm{T}}x+b^{\mathrm{T}}y$$

其中 y 解

$$(\mathrm{P}_2)\max_y f_2(x,y)=c^{\mathrm{T}}x+d^{\mathrm{T}}y$$

$$\text{s.t.}\quad Ax+By\leqslant r$$

其中 $a,c,x\in R^{n_1}$，$b,d,y\in R^{n_2}$，$r\in R^{m_1}$分别表示相应维数的列向量，$A\in R^{m\times n_1}$，$B\in R^{m\times n_2}$。我们总是假定约束条件 $Ax+By\leqslant r$ 已经包含了 $x\geqslant 0$ 和 $y\geqslant 0$ 这样非负的约束，并且假定给定 x 以后问题(P_2)仅有惟一解。以下我们给出(BLP)问题的有关理论。

2.1.1　解的概念

对于二层线性规划问题(BLP)，集合

$$S=\{(x,y)\mid Ax+By\leqslant r\}$$

叫做它的容许集。S 显然是闭凸集。我们这里还假设 S 是有界的。每一$(x,y)\in S$ 叫做(BLP)的一个容许解。今后我们将称 $x\in R^{n_1}$是容许的，如果存在 $y\in R^{n_2}$，使得$(x,y)\in S$。

对于固定容许的 x，下层决策者将选择 y 的值，以极大化它的目标函数 $f_2(x,y)$。因此对于每一个容许的 x，下层决策者将反馈一个对应的 y 的值。暂且我们假定对于每一个容许的 x，对应的 y 值存在而且是惟一的，于是这样的 y 是 x 的函数，记作 $y=\psi(x)$，并称它为反馈函数。显然，如果上层决策者完全知道它的反馈函数，它的优化问题(P_1)就等价于求解下面的数学规划问题

$$\text{(MP)} \quad \max_x f_1(x, \psi(x)) = a^{\mathrm{T}} x + b^{\mathrm{T}} \psi(x)$$

$$\text{s.t.} \quad Ax + By \leqslant r$$

$$y = \psi(x)$$

这是一个数学规划问题。记

$$S^1 = \{(x, y) \mid Ax + By \leqslant r, \quad y = \psi(x)\}$$

S^1 称为(BLP)的可行集或一层可行集,容许集 S 称为(BLP)的二层可行集。

例 2.1.1 设 x 和 y 都是实变量

$$(\mathrm{P}_1)\max_x f_1(x, y) = -2x + 11y$$

其中 y 解

$$(\mathrm{P}_2)\max_y f_2(x, y) = -x - 2y$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad x - 2y &\leqslant 4 \\ 2x - y &\leqslant 24 \\ 3x + 4y &\leqslant 96 \\ x + 7y &\leqslant 126 \\ -4x + 5y &\leqslant 65 \\ x + 4y &\geqslant 8 \\ x \geqslant 0, y &\geqslant 0 \end{aligned}$$

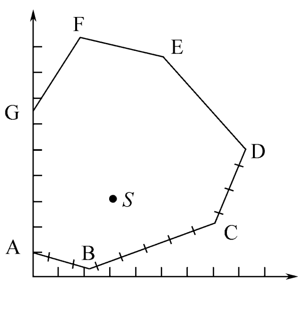

图 2.1.1 例 2.1.1 的容许集 S,可行集 S^1 和反馈函数

结合图 2.1.1 不难看出,反馈函数为

$$y = \begin{cases} -\dfrac{x}{4} + 2, & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{16}{3} \\ \dfrac{x}{2} - 2, & \text{当 } \dfrac{16}{3} < x \leqslant \dfrac{44}{3} \\ 2x - 24, & \text{当 } \dfrac{44}{3} < x \leqslant \dfrac{192}{11} \end{cases}$$

而可行集 S^1 就是折线 ABCD,S^1 就是反馈函数 $y = \psi(x)$的图形。

我们看出,一层可行集 S^1 不再是凸集,因此上层决策者要解的数学规划问题(MP)不再是线性规划问题,(BLP)问题求解的困难正在

于此。

定义 2.1.1 $(x^*, y^*) \in S^1$ 称为(BLP)问题的最优解(简称解),如果对于每个$(x, y) \in S^1$,有 $f_1(x^*, y^*) \geqslant f_1(x, y)$。

简单地说,(BLP)问题的最优解(x^*, y^*)就是数学规划问题(MP)的最优解。

对于例 2.1.1,平移函数 $f_1(x, y) = -2x + 11y$ 的等高线,也可以得到其最优解为 $x^* = \frac{192}{11}$, $y^* = \frac{120}{11}$,它对应于 D 点。相应的最优值是 $f_1^* = \frac{936}{11}$, $f_2^* = -\frac{432}{11}$。

2.1.2 解的性质

1. 解的几何性质

定义 2.1.2 设 $X, Y \subset R^n$, $x_1, \cdots, x_r \in X$, $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \cdots, r$, $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$,如果 $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i \in Y$,有 $x_i \in Y$, $i = 1, \cdots, r$,称 Y 对 X 是弱凸的;如果 $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i \in Y$,且 $\lambda_i > 0$,有 $x_i \in Y$,称 Y 对 X 是严格弱凸的(弱拟凸子集)。

定义 2.1.3 如果凸集 S 的一个子集 F 是 S 的一个凸子集,并且使得 S 中每个闭线段只要有一个相对内点在 F 中,这个线段的两个端点也在 F 中,则称 F 为 S 的一个面。

四面体的每个面或每条棱边或每个顶点我们都看作是四面体的一个面。

可见凸集 S 的严格弱凸子集,是由 S 的若干个面组成的。

(BLP)问题的二层可行集 $S = \{(x, y): Ax + By \leqslant r\}$,而一层可行集 S^1 可写成

$$S^1 = \{(x, y) \in S \mid 存在\ w \geqslant 0, w \in R^m\ 满足(*)\}$$

$$(*)\quad \begin{cases} w^{\mathrm{T}} B = d \\ w^{\mathrm{T}}(Ax + By - r) = 0 \end{cases}$$

(BLP) 问题的最优解集可写成

$$S^0=\{(x,y)\in S^1 \mid 存在\ \overline{w}\geqslant 0,\alpha>0,满足(**)\}$$

$$(**)\begin{cases}(\overline{w}-\alpha w)^{\mathrm{T}}A=a\\(\overline{w}-\alpha w)^{\mathrm{T}}B=b\\\overline{w}^{\mathrm{T}}(Ax+By-r)=0\end{cases}$$

并且对于每个$(x,y)\in S^1$,有

$$(\overline{w}-\alpha w)^{\mathrm{T}}(Ax+By-r)\leqslant 0$$

$$\overline{w}\in R^m,\alpha>0,\alpha\in R$$

其中 $w\geqslant 0(w\in R^m)$是由(*)式确定的。

定理 2.1.1 设 $S=\{(x,y)\mid Ax+By\leqslant r\}$是有界的,$S^1$ 非空,则一层可行集 S^1 对二层可行集 S 是严格弱凸的,即 S^1 是 S 的有限个面的并;如果 S^0 非空,则 S^0 是 S 的一个面。

显然 S^0,S^1 都是闭集。

推论 2.1.1 若函数 $f_1(x,y)=a^{\mathrm{T}}x+b^{\mathrm{T}}y$ 在 S 上有界,则(BLP)问题有最优解$(x^*,y^*)\in S^1$。

定理 2.1.1 的一个稍微推广的形式是

推论 2.1.2 设 S 有界,$(x_i,y_i)\in S$,$i=1,\cdots,k$,如果存在 $\lambda_i>0$,$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$,使得$(x,y)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(x_i,y_i)\in S^1$,那么$(x_i,y_i)\in S^1$,$i=1,\cdots,k$。

定理 2.1.1 和推论 2.1.2 说明,S 的点的严格凸组合若形成 S^1 的一个点,则 S 的这些点必须都是 S^1 的点。因此若 S^1 的某个点不能由 S^1 的点的严格凸组合形成,则它也不能由 S 的点的严格凸组合形成。于是有

推论 2.1.3 S^1 的极点必是 S 的极点。

推论 2.1.4 如果(BLP)问题存在最优解,那么一定有 S 的一个极点是最优解。

以上我们不加证明地给出一些重要的定理,它们是算法的理论依据。

2. 可行性检验

给定(BLP)问题的容许的 x,求解下列线性规划问题

$$(\mathrm{LP})\quad \begin{aligned} &\max_{y} f_2(x^*, y) = c^{\mathrm{T}} x^* + d^{\mathrm{T}} y \\ &\text{s.t.}\quad By \leqslant r - Ax^* \end{aligned}$$

若最优解为 y^*,则$(x^*, y^*) \in S^1$,否则(x^*, y^*)不是(BLP)问题的可行解。

这是因为(LP)就是给定 $x = x^*$ 时(BLP)中的下层规划问题,而且我们假定给定 x 以后,下层规划的解是惟一的。

定理 2.1.1 及推论 2.1.1~2.1.4 告诉我们,(BLP)问题存在最优解,而且线性不等式组给出的凸集 S 只有有限个极点,因此,从理论上说,只要对这有限个极点逐个进行可行性检验并比较 f_1 在各可行极点的值的大小,总可以找出(BLP)问题的极最优解。问题是如何生成待检验点以及如何减少计算量,以尽快而且正确地求得极最优解。

3. 局部最优解

由于可行集 S^1 不一定是凸的,使上层规划问题(它等价于问题(MP))有可能存在局部最优解而非全局最优解。例 2.1.1 中点 A(0,2)就是一个局部最优解,但 A 不是全局最优解。只有点 D$\left(\frac{192}{11}, \frac{120}{11}\right)$ 才是全局最优解,当然 D 也是一个局部最优解。

4. 连通性

应用拓扑学理论,我们可以证明下述重要定理:

定理 2.1.2 (BLP)问题的可行集 S^1 是连通的。

S^1 的连通性告诉我们,当使用搜索法寻求(BLP)问题的极最优解时,只需沿着 S^1 的相邻的极点进行搜索就够了。

5. 最优性条件

我们讨论二层线性规划问题

$$(\mathrm{P}_1)\max_{x} f_1(x, y) = a^{\mathrm{T}} x + b^{\mathrm{T}} y$$

其中 y 解

$$(\mathrm{P}_2)\max_{y} f_2(x, y) = c^{\mathrm{T}} x + d^{\mathrm{T}} y$$

$$\text{s.t.}\quad Ax + By \leqslant r$$

Bard 于 1984 年已经用 Kuhn-Tucker 定理推导了在等式约束

下二层线性规划解的最优性条件，这涉及到约束规格，例如需假定 B 是满秩的。为了避免约束规格的假设，我们将采用 Farkas 引理讨论解的最优性条件。自此处起，除非特殊声明，我们不再假设 S 是有界的。

Farkas 引理　设 A 是 $m\times n$ 实矩阵，b 是 n 维实向量，那么方程 $A^{\mathrm{T}}\rho=b$ 有非负解，$\rho\geqslant 0(\rho\in R^m)$，当且仅当不等式 $Ay\geqslant 0$ 的每个解 $y\in R^n$ 满足不等式 $b^{\mathrm{T}}y\geqslant 0$。

问题(BLP)的容许集仍记作 S，可行集记作 S^1，并假设对于每个容许的 x，下层的优化问题

$$\max_{y} f_2(x,y)=c^{\mathrm{T}}x+d^{\mathrm{T}}y \tag{2.1.1}$$

$$\text{s.t.}\quad By\leqslant r-Ax \tag{2.1.2}$$

有惟一解。

定理 2.1.3　设 $(\bar{x},\bar{y})\in S$，那么 $(\bar{x},\bar{y})\in S^1$ 当且仅当存在 $w\geqslant 0(w\in R^m)$，使得

$$\begin{cases} w^{\mathrm{T}}B=d^{\mathrm{T}} & (2.1.3)\\ w^{\mathrm{T}}(A\bar{x}+B\bar{y}-r)=0 & (2.1.4)\end{cases}$$

证明　必要性　对于$(\bar{x},\bar{y})\in S'$，这就是说，对于任何$(x,y)\in S$，有 $d^{\mathrm{T}}\bar{y}\geqslant d^{\mathrm{T}}y$。

记 $D=(B,A\bar{x}+B\bar{y}-r)$，$E=\begin{pmatrix} d\\ 0\end{pmatrix}$，设 $u=\begin{bmatrix} u^1\\ u^2\end{bmatrix}$(其中，$u^1\in R^{n_2}$，$u^2\in R$)是不等式 $Du\geqslant 0$ 的解，即

$$Du=Bu^1+(A\bar{x}+B\bar{y}-r)u^2\geqslant 0 \tag{2.1.5}$$

不失一般性，可设 $|u^2|\leqslant 1$(否则，可用 $\frac{u^2}{|u^2|}$ 代替 u^2)。令 $y=\bar{y}-u^1$，即 $u^1=\bar{y}-y$，由式(2.1.5)有

$$A\bar{x}+By-r\leqslant(A\bar{x}+B\bar{y}-r)(1+u^2)\leqslant 0$$

因而$(\bar{x},y)\in S$。但$(\bar{x},\bar{y})\leqslant S^1$，所以

$$E^{\mathrm{T}}u=d^{\mathrm{T}}u^1=d^{\mathrm{T}}(\bar{y}-y)\geqslant 0$$

由 Farkas 引理，存在 $w\in R^m$，$w\geqslant 0$，使得 $D^{\mathrm{T}}w=E$，这就是式(2.1.3)和式(2.1.4)。

充分性　如果$(\bar{x},\bar{y})\in S$，而且存在 $w\geqslant 0$ 满足式(2.1.3)和式(2.1.4)，那么对于任意$(\bar{x},y)\in S$，有

$$\begin{aligned} d^{\mathrm{T}}(\bar{y}-y) &= w^{\mathrm{T}}B(\bar{y}-y) \\ &= w^{\mathrm{T}}\{(A\bar{x}+By-r)-(A\bar{x}+B\bar{y}-r)\} \\ &= -w^{\mathrm{T}}(A\bar{x}+By-r)\geqslant 0 \end{aligned}$$

因此$(\bar{x},\bar{y})\in S^1$。

定理 2.1.3 给出了解的可行性充要条件。根据这个原理，我们只要首先求出式(2.1.3)的非负基础解系 $w^1,w^2,\cdots,w^k$，然后对于每个这样的 $w^i(i=1,2,\cdots,k)$，求出式(2.1.4)的基可行解$(x^{l_1},y^{l_1}),\cdots,(x^{l_k},y^{l_k})$，这些基可行解就是可行极点。

定理 2.1.4　设$(\bar{x},\bar{y})\in S^1$，那么$(\bar{x},\bar{y})$是问题(BLP)的最优解，当且仅当存在 $\bar{w}\geqslant 0(\bar{w}\in R^m)$和 $\alpha\geqslant 0(\alpha\in R)$，使得

$$(\bar{w}-\alpha w)^{\mathrm{T}}A=a \tag{2.1.6}$$

$$(\bar{w}-\alpha w)^{\mathrm{T}}B=b \tag{2.1.7}$$

$$\bar{w}^{\mathrm{T}}(A\bar{x}+B\bar{y}-r)=0 \tag{2.1.8}$$

并且对于每个$(x,y)\in S^1$，有

$$(\bar{w}-\alpha w)(Ax+By-r)\leqslant 0 \tag{2.1.9}$$

其中 $w\geqslant 0(w\in R^m)$是由定理 2.1.3 在点$(\bar{x},\bar{y})$确定的。

证明　必要性　记

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} & -A^{\mathrm{T}}w \\ B^{\mathrm{T}} & -B^{\mathrm{T}}w \\ (A\bar{x}+B\bar{y}-r)^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}\quad E=\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

设 $u=((\bar{x}-x)^{\mathrm{T}},(\bar{y}-y)^{\mathrm{T}},\mu)^{\mathrm{T}}$ 是方程 $Du\geqslant 0$ 的解，其中 $\mu\in R$，$|\mu|\leqslant 1$，那么

$$A(\bar{x}-x)+B(\bar{y}-y)+\mu(A\bar{x}+B\bar{y}-r)\geqslant 0$$

$$w^{\mathrm{T}}(A(\bar{x}-x)+B(\bar{y}-y))\leqslant 0$$

因而

$$Ax+By-r\leqslant(1+\mu)(A\bar{x}+B\bar{y}-r)\leqslant 0$$

$$w^{\mathrm{T}}(Ax+By-r)\geqslant w^{\mathrm{T}}(A\bar{x}+B\bar{y}-r)$$

于是 $w^{\mathrm{T}}(Ax+By-r)=0,(x,y)\in S^1$。但$(\bar{x},\bar{y})$是问题(BLP)的最优解，因而

$$E^{\mathrm{T}}u= a^{\mathrm{T}}(\bar{x}-x)+ b^{\mathrm{T}}(\bar{y}-y)\geqslant 0$$

根据 Farkas 引理,方程 $D^{\mathrm{T}}\rho= E$ 存在非负解 $\rho(\bar{w}^{\mathrm{T}},\alpha)^{\mathrm{T}}\geqslant 0$，这就是式(2.1.6),(2.1.7),(2.1.8)。

由于$(\bar{x},\bar{y})$是问题(BLP)的最优解，利用式(2.1.6),(2.1.7),(2.1.8)可得:对于每个$(x,y)\in S^1$ 有

$$\begin{aligned}0&\leqslant a^{\mathrm{T}}(\bar{x}-x)+ b^{\mathrm{T}}(\bar{y}-y)\\&=(\bar{w}-\alpha w)^{\mathrm{T}}A(\bar{x}-x)+(\bar{w}-\alpha w)^{\mathrm{T}}B(\bar{y}-y)\\&=(\bar{w}-\alpha w)^{\mathrm{T}}[(A\bar{x}+B\bar{y}-r)-(Ax+By-r)]\\&=-(\bar{w}-\alpha w)^{\mathrm{T}}(Ax+By-r)\end{aligned}$$

这就是式(2.1.9)。

充分性可由上式立即看出。

我们已经给问题(BLP)定义了各种解集。容许集即二层可行集是

$$S=\{(x,y)\mid Ax+By-r\leqslant 0\}$$

S 是一个闭凸集。可行集(一层可行集 S^1)按定理 2.1.3 可写成

$$S^1=\{(x,y)\in S\mid \text{存在 } w\geqslant 0 \text{ 满足式}(2.1.3),(2.1.4)\}$$

最优解集或简称解集 S^0 按定理 2.1.4 可写成

$$S^0=\{(x,y)\in S^1\mid \text{存在 } \bar{w}\geqslant 0,\alpha>0 \text{ 满足式}(2.1.6),(2.1.7),(2.1.8),(2.1.9)\}$$

显然 $S^0\subset S^1\subset S$。

2.2 价格控制问题

二层规划有不同的描述形式,实际中经常用到价格控制问题的二层规划模型。本质上,价格控制问题是非线性的,但人们常把它当成线性问题来处理。对于价格控制问题,设想有两个决策者:一个是价格控制者(上层);一个是生产者(下层)。在不同的价格下,生产者企图寻找对它“最好”的生产规模,设控制价格变量为