

研究生教学用书

教育部学位管理与研究生教育司推荐

信号的统计检测与估计理论

The Statistical Theory of Signal Detection and Estimation

(第二版)

李道本 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

信号的统计检测与估计理论是现代信息理论的重要组成部分。本书是作者在多年讲授研究生课程的讲义基础上整理而成的。全书共分十五章,系统地介绍了信号检测和信号参量估计的基本理论,并在第一版的基础上,为适应通信、雷达、自动控制等技术的飞速发展增加了许多新内容,例如增加了第十五章“多地址用户信号检测”。书中包括了作者多年的研究成果。书中每章还配有一定量的习题,供读者练习。

本书可供高等院校通信、雷达、自动控制等专业的研究生、高年级本科生使用,也可供相关工程技术人员阅读、参考。

图书在版编目(CIP)数据

信号的统计检测与估计理论 / 李道本 著.—2 版. 北京: 科学出版社, 2004

ISBN 7-03-013385-4

I. 信… II. 李… III. ①信号检测-研究生-教材②参数估计-研究生-教材 IV. TN911.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 044588 号

责任编辑:匡 敏 贾瑞娜 / 责任校对:朱光光

责任印制:钱玉芬 / 封面设计:陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮 政 编 码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1996 年 1 月北京邮电大学出版社第一版

2004 年 9 月第 二 版 开本:B5(720×1000)

2004 年 9 月第一次印刷 印张:32 1/2

印数:1 501—4 000 字数:636 000

定价:42.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈科印〉)

第二版 前言

最近在国际航天史上发生了几件重大事件:我国成功地发射了载人航天飞船“神舟五号”,并启动了“探月工程”;欧洲航天局、美国宇航局先后向火星发射了“猎兔犬”号、“勇气”号与“机遇”号火星飞船;“卡西尼”号经过长达七年的飞行后又到达了土星。人们不禁要问,在如此遥远的太空,电波信号的能量已经衰减到了极其微弱的程度,怎样才能保证可靠的通信、精密的测量与正确的控制呢?这中间所涉及的基本理论,就正是本书所要介绍的“检测与估计理论”。

信号的统计检测与估计理论是在第二次世界大战期间,即 20 世纪 40 年代,由于战争对雷达与声纳技术的需求而逐步形成与发展起来的。目前已经成为现代信息理论的一个重要组成部分。其理论基础是信息论,所采用的数学工具是概率论、随机过程以及数理统计。它是现代通信、雷达、声纳以及自动控制技术的理论基础。不仅如此,它也在模式识别、射电天文学、遥感遥测、资源探测、天气预报、精神物理学、生物物理学、系统辨识乃至医学及社会学等领域中得到广泛的应用。

检测与估计理论可以分为**检测理论**与**估计理论**两大部分,而估计理论则又可分为**参量估计**与**波形估计**两部分。一般我们把波形估计称为滤波理论,即现代 Wiener 滤波理论及 Kalman 滤波理论,目前它已经发展成为一门独立的学科。英、美、俄等国的高等学校里一般把检测与估计理论和滤波理论分成两门课程来讲授。作者同意这种观点,因此在本书的估计理论中将不介绍波形估计理论。有兴趣的读者可以参阅有关的专著及文献。

所谓**检测**,就是根据有限观测,**“最佳”**区分一个物理系统不同状态的理论。

而所谓**参量估计**,则是根据有限观测,**“最佳”**找出一个物理系统不同参数的理论。

这里我们将特别强调有限观测,因为只有如此才有实际意义。若检测或估计只能在无限观测后才能进行,这样的检测或估计还有什么用途呢?另外我们对**“最佳”**二字加了引号,因为绝对或纯粹的最佳是不存在的,只能是特定含义下的**“最佳”**,也就是某种**准则**之下的**“最佳”**。例如在检测理论中常用的就有 Bayes 准则、最大后验概率(MAP)准则、最大似然(ML)准则、最小差错概率准则、理想观察者准则以及 Neyman-Pearson 准则等。不同的准则,最佳的含义是不同的。在估计理论中也有不同的最佳准则,对这些内容,读者在读到有关章节时自然会有所了解。

我们还要特别强调的,是我们的检测或估计是在噪声或干扰环境下进行的。因为如果没有噪声或干扰的破坏或捣乱,检测或估计的使命也就不存在了。一般

人把噪声与干扰视为一种含义,而在本书中却是两个概念。噪声是指与有用信号无关的一些破坏性因素,如通信中的各种工业噪声、交流声、脉冲噪声、银河系噪声、大气噪声、太阳噪声以及由元器件内部各种微观粒子的热骚动所产生的热噪声等。而干扰则是指与有用信号有关的一些破坏性因素,如通信中的符号间干扰、共信道干扰、邻近信道干扰以及各种人为的故意干扰(如军事或雷达系统中的瞄准干扰)等。噪声与干扰可以用一个随机过程来描述,由于随机过程类型的不同,检测与估计的类型也就相应有所不同。

第一类是**参量检测(估计)**。这是指当噪声或干扰过程可以用有限个实参数所描述时的检测(估计)问题。例如当噪声或干扰是一个已知功率谱密度(或协方差函数)的平稳高斯过程(Gaussian process)时的检测(估计)问题就属于参量检测(估计)。因为高斯随机过程完全可由一组有限数量的参数所描述。

另外,当噪声或干扰的真正分布形式未知时,一组有限数量的参数就不足以确定它们,在这样的噪声或干扰环境中的检测(估计)就属于**非参量检测(估计)**。需要说明的是,即使是高斯噪声,如果它的自协方差函数或功率谱密度未知时,也属于非参量检测(估计)问题。更一般的情况是只能定性地描述噪声,例如说只知道噪声的概率分布是偶对称的,而其概率密度函数未知。这样一类随机过程,当然还需要无穷多个参量值才能具体确定它们。这时的检测与估计就属于非参量型的。

参量检测(估计)又称最佳检测(估计)。它是以噪声或干扰的统计特性完全确知为基础的。检测(估计)者可以根据所选定的最佳准则来设计最佳检测(估计)器。但在很多实际场合,噪声与干扰的统计特性并不是完全确知的,有时其统计特性还会随空间、频率或时间而变化,不能用一些一成不变的统计特性去描述它们。一旦噪声或干扰的统计特性偏离了理论的设计值,则最佳检测(估计)器的性能就有可能恶化,有时甚至只是微小的变化,也会引起最佳检测(估计)器性能的严重恶化。

正是由于参量检测(估计)方式的上述缺陷,加上客观实际中有大量问题,参量检测(估计)理论无法处理,于是从20世纪60年代开始,人们广泛地研究了非参量检测(估计)方式。非参量检测(估计)并不需要完全了解噪声或干扰的统计特性,只需要了解非常简单的基本特性。显然,由于这类检测(估计)器并未充分利用噪声或干扰的统计特性,也就是说设计过于保守,其性能要劣于参量检测(估计)器,但是其随遇性要优于参量检测(估计)。

在许多实际问题中,人们一方面不像经典的参量检测(估计)那样对噪声或干扰的统计特性有充分的了解,但又不像非参量检测(估计)那样对噪声的统计特性只有很初步的了解。例如在通信、雷达及声纳等许多实际场合,噪声基本上是高斯型的,但也有一小部分随机脉冲性噪声,人们对这部分噪声的统计特性了解不多。其结果是噪声的概率密度分布基本上与高斯(正态)分布一致,特别是在原点及其

附近,只是在远离原点的部分叠加上一个宽于高斯(正态)分布的“尾巴”,人们称这类噪声为类高斯噪声。针对这种情况,在 20 世纪 60 年代开始出现并逐步发展成熟,目前在雷达、声纳及部分通信领域已有应用,甚至在信号处理领域也有所应用。坚韧检测(估计)带有非参量检测(估计)的特征,对噪声统计特性的变化有一定的随遇性,即允许噪声的统计特性在一定的范围内变化,但它克服了非参量检测(估计)的保守性与盲目性,即它同时充分利用了已知的噪声统计特性,因此它具备了参量检测(估计)的特征,但又克服了参量检测(估计)对噪声统计特性变化的敏感性。因此坚韧检测既具备参量检测(估计)的准确性又具有非参量检测(估计)的随遇性。但在噪声的统计特性充分已知时,其性能要劣于参量检测(估计),但又优于非参量检测(估计)。

如果针对信号的类型,检测问题又可分为以下三种类型:

第一类是对**确知信号的检测**。这是最基本、最简单的情况,如在同步或相干数字通信系统中,被检测的信号的类型、波形、频率、相位乃至起始和终了时间完全确知,人们只是不知道被噪声所淹没的信号到底是哪一个。另外如模式识别中的某些问题也属于这种类型。

第二类是对**具有未知参量信号的检测**。这种检测问题比上一类稍复杂一点,未知参量本身又可分为随机参量与非随机参量两种。例如在非相干数字通信系统中接收信号的相位就是未知的,又如在雷达及声纳系统中接收信号的相位、频率甚至到达时间都是未知的。

第三类是对**随机信号的检测**。这类检测问题解决起来相对最困难。例如射电天文学中对一个新的类星体的发现,用地震波找矿,无源雷达或声纳中的检测问题等等。另外如随机时变信道中数字通信系统中的信号检测问题都属于这一类。

最后一种分类方式是针对对观测值的处理方式而言的。它大体上可以分为两大类,即**固定观测样本值方式**与**非固定观测样本值方式**。顾名思义,在固定观测样本值方式中,观测样本值的总数或观测时间是固定的。目前大部分检测或估计的处理方式均采用这种类型。例如固定传信率的数字通信系统,其传送每一个符号的时间是固定的,这就要求检测者(接收机)也必须在同一时间内(允许适当延迟)作出判决。这种固定样本值或观测时间的处理方式显然有缺陷。人们都有这样的经验,在日常生活中对某些事物往往只经少量观测就可以作出很明确的判断与估计,这时如果还按约定的固定样本值或观测时间处理,显然是一种浪费,而在另一些场合,事先约定的固定样本值或观测时间又显得不够用。这样就提出了非固定观测样本值的处理方式,在这种处理方式中不事先规定观测样本值的总数或观测时间,而只是规定了检测或估计应该满足的性能指标。每观测一个新的样值,都要计算一下能否在满足规定的性能指标下作出判断或估计,若能满足,则不再进行新的观测;若不能满足,则再观测一个新的样本值,直至能作出满足规定性能指标的

判断或估计为止。这种处理方式有时又称为**序贯方式**,对应的检测或估计则称为**序贯检测**或**序贯估计**。序贯检测及估计目前已在雷达系统中得到应用,相对于非序贯方式,其平均搜索时间要快得多。另外,本书第十三章中将介绍**序列检测方式**,其判决时间也是随机的,但是其对每一个传送符号的时间却是固定的,因此它仍然属于固定观测样本值的检测方式,只是它不再属于逐符号的检测方式,而是对整个消息序列进行检测而已。详细内容将在第十三章中介绍。

本书是作者多年来在北京邮电大学讲授本科生及研究生课程,在电信科学技术研究院(原邮电科学研究院)、中国科学院及中国科技大学研究生院讲授研究生课程以及在台湾中山大学、香港中文大学等处讲学的讲稿基础上整理而成的,其中也含有作者多年来在该领域的研究心得及成果。本书在内容上兼顾了本科生及研究生两个层次,相信对通信学科各专业的工程技术人员也会有一定的参考价值。当然检测与估计理论所涉及的范围非常之广,本书不可能面面俱到。本书的重点放在了基础理论部分以及涉及通信领域的若干实际应用上,在讲授本课程时也应区分不同对象而有所取舍。例如对 60 学时的本科生教学可只讲授第一、二、三、四、五章及第八章的单参量估计以及第九章的前半部分,其他各章内容可作简要介绍一带而过。由于前四章是基础中的基础,故无论对本科生或是对研究生,一定要讲解透彻,但其中的 Karhunen-Loeve 展式解、匹配滤波器解以及积分方程解等部分可视学时及学生程度而决定取舍。画“*”的部分,对本科教学时可以不选。

本课程的先修课程是概率论与随机过程,另外线性代数与复变函数的基础知识也是不可少的。因此作为本科生教材不宜在三年级以前讲授。

本书自始至终采用信号的复表示,这对数学分析与计算带来了很大的方便,正如大家所熟悉的用复频率 $e^{j2\pi ft}$ 代替实频率 $\cos 2\pi ft$ 后数学分析很方便一样。为此本书补充了有关 Hilbert 变换以及复随机过程,特别是复高斯过程的内容。另外本书对差错概率的计算,极少采用直接对概率分布进行积分的方式。因为一般而言,计算一个比较复杂的概率分布密度是一项很困难的工作,甚至还需要造出一些新的概率分布表。本书改在频率域即特征函数计算差错概率,虽然解的形式往往是一些级数形式,但是使用的全是初等函数,不仅对理论分析而且对工程运用也带来了方便。

感谢国家教育部、科技部、信息产业部特别是国家自然科学基金委员会的支持与帮助,使得作者能够长期从事有关的基础理论及应用基础的研究。另外也使得作者有机会与当今世界上著名的学者有学术交流乃至较长时间合作的机会,从他们那里汲取营养并了解最新动向。特别需要指出的是 C. W. Helstrom 与 H. L. Van Trees 曾与作者交换过本课程的讲授安排方式及重点,以及本学科的发展方向等问题。G. D. Forney, T. Berger 及 J. G. Proakis 与作者共同探讨过符号干扰信道中的最佳检测问题, N. T. Garder 与作者共同探讨过齐次随机符号干扰信道中

的潜在抗干扰性问题, J. G. Proakis 则与作者共同解决了最佳线性盲均衡中的最小差错概率准则问题, J. K. Omura 与 K. Yao 以及 J. G. Proakis 则对作者对齐次随机符号干扰信道的研究提出过中肯的改进意见。这些内容在本书中都有不同程度的反映。

写完本书, 作者如释重负, 因为二十年来的教学与科研总算有了一个较系统的总结与完善, 但又立刻感到负担沉重与内疚, 因为作者毕竟水平有限, 尽管力图做到理论与实际相结合, 给读者以解决实际问题的能力, 但恐怕是力不从心。另外本书尽管有一些全新的内容, 甚至有一些全新的见解, 但毕竟属于经典检测与估计理论。目前通信与雷达技术已经进入光频段了, 再向上就是量子领域了。进入量子领域后经典的检测与估计理论必须让位于量子检测与估计理论。这正如经典物理学在处理宏观物理问题时卓有成效, 但在处理微观世界的问题时它必须让位于量子物理学一样。进入量子领域后, 我们也必须改用一种新的观点——统计量子的观点, 即“量子检测与估值理论”去观察与处理问题。那时所谓“确知信号”早已消失得无影无踪, 而噪声——量子噪声的性质也变得截然不同, 它甚至强烈地依附于对信号的处理方式。量子检测与估计理论的应用范围将更加广泛, 在物理学方面, 研究宇宙学, 研究微观世界都需要它; 即使在通信领域, 在光频段以上还有 X 射线、 γ 射线、宇宙射线等。另外某些微观粒子如 β 射线、中子束、质子束、介子束、中微子束以及目前还未被发现的粒子束都可以用来荷载信息, 而这些单靠本书的理论是无能为力的, 科学是无止境的。

本书第一版由北京邮电大学出版社于 1996 年出版, 这是第二版。在第二版中, 除了改正原版的错误并作了部分增补以外, 本次再版特别增加了“多地址用户信号检测”一章, 这是近年来才发展起来的一个新理论。作者对这一理论进行了改造, 直接解出了最大似然解, 并提出了一个可以不对随机矩阵求逆的算法。

在本书编写过程中得到了北京邮电大学信息工程学院同行们的大力支持。恩师周炯槃院士、已故蔡长年教授都为本书撰写提过不少中肯意见。方莉老师为本书的打印、组织、校对等工作耗费了大量时间与精力, 邹永忠博士耗费了数月精力为本书提供了仿真曲线, 还有我们 20 多位研究生, 为本书的打印、校对做了大量工作, 在此一并表示衷心的感谢。

本书差错疏漏在所难免, 敬请读者批评指正。

李道本

2004 年 3 月于 D.B. 实验室

目 录

第一章 信号的矢量与复数表示	1
1-1 确知信号集中信号的矢量表示	1
1-2 Gram-Schmidt 归一化正交程序与信号展开式	4
1-3 信号的复表示	6
1-4 Hilbert 变换及其性质	9
1-5 线性系统的复表示	12
1-6 窄带随机过程	14
1-7 Karhunen-Loeve 展式	17
习题	23
第二章 噪声与干扰	26
2-1 随机噪声	26
2-2 高斯噪声	30
2-3 复高斯过程	33
习题	36
第三章 假设检验	38
3-1 假设检验的一般理论——Bayes 检验	38
3-2 二元假设检验	42
3-2-1 Bayes 检验	42
3-2-2 最小最大检验	49
3-2-3 Neyman-Pearson 检验	51
3-3 二元检验的施行特征	54
习题	59
第四章 确知信号的检测	62
4-1 白高斯噪声中二元确知信号的检测	63
4-1-1 实信号形式解	63
4-1-2 复信号形式解	65
4-1-3 差错概率性能	67
4-2 白高斯噪声中多元确知信号的检测	70
4-2-1 最大似然接收机	70
4-2-2 差错概率性能——简单上界	72

4-3	有色高斯噪声中二元确知信号的检测	76
4-3-1	取样形式解	76
4-3-2	Karhunen-Loeve 展式解	79
4-3-3	差错概率性能	82
4-4	匹配滤波器	82
4-4-1	从相关器到匹配滤波器	82
4-4-2	平稳噪声中具有最大输出信噪比的滤波器	84
* 4-4-3	匹配滤波器的近似解	86
4-4-4	白化滤波器	87
4-5	有色高斯噪声中多元确知信号的检测	89
4-5-1	最小差错概率接收机	89
4-5-2	对称正交信号接收机的差错概率	90
* 4-6	积分方程的解	99
4-6-1	非齐次方程	99
4-6-2	齐次方程	103
附录 A	白高斯噪声的功率谱密度与协方差函数	108
习题		109
第五章	具有随机参量信号的检测	113
5-1	复合假设检验	113
5-2	具有随机相位信号的检测	117
5-2-1	最佳接收机结构	118
5-2-2	最佳接收机的差错概率性能	121
5-3	二元正交随机相位信号的检测	125
5-4	Rayleigh 衰落信道二元正交随机相位信号的检测	128
* 5-5	M 元正交随机相位信号的检测	133
* 5-6	Rayleigh 衰落信道 M 元正交随机相位信号的检测	139
习题		140
第六章	多重(分集)信号的检测	143
6-1	非独立有色高斯噪声中多重信号的最佳检测	143
* 6-2	具有随机相位多重弱信号的检测	146
* 6-3	平方律阈值检测器的检测概率	149
6-4	不相关分集	153
6-4-1	相干接收机	155
* 6-4-2	非相干接收机	162
* 6-5	相关分集	165

6-5-1 相干接收机	166
6-5-2 非相干接收机	176
6-5-3 非相干阈值检测器	178
习题	182
第七章 序贯检测	184
7-1 二元序贯似然比检验	185
7-1-1 检验的基本程序	185
* 7-1-2 辅助定理	187
7-1-3 一个基本恒等式	190
* 7-1-4 序贯似然比检验的施行特征	192
7-1-5 阈值 A 与 B 的确定	194
7-1-6 平均观测次数 $E_0(n)$	195
7-1-7 序贯似然比检验的意义	196
7-2 两个检验实例	197
7-2-1 高斯随机变量均值的检验	197
7-2-2 0—1 分布随机变量参数 p 检验	200
* 7-3 序贯似然比检验的极限有效性	204
7-3-1 最佳固定样值检验的施行特征与观测次数	205
7-3-2 序贯似然比检验的极限有效性	207
* 7-4 序贯检验对一般临近假设的极限有效性	214
7-5 其他序贯检验	217
7-5-1 多元序贯检验	217
7-5-2 复合序贯检验	220
7-5-3 序贯 Bayes 检验	225
7-5-4 广义序贯似然比检验	226
7-6 信号的序贯检测	230
7-6-1 确知脉冲串接收	230
7-6-2 随机相位弱脉冲串接收	231
7-6-3 单个相干信号的序贯检测	234
习题	235
第八章 信号的参量估值	237
8-1 从检测到估值	237
8-1-1 估值的数学模型	237
8-1-2 从检测到估值	239
8-2 最小均方误差估计与估计量的不变性	243

8-2-1	最小均方误差估计	243
8-2-2	估计量的不变性	244
8-3	有色高斯噪声中信号参量的最大后验概率估计	249
8-4	最大似然估计	253
8-5	估计均方误差的下界(非随机参量)——Cramer_Rao 不等式 1	257
8-5-1	单参量情况	257
8-5-2	单参量函数的情况	264
8-5-3	多参量情况	265
8-5-4	多参量函数的情况	272
8-6	估计均方误差的下界(随机参量)——Cramer_Rao 不等式 2	273
8-6-1	单参量情况	273
8-6-2	多参量情况	276
8-7	有色高斯噪声中信号参量的最大似然估计	278
8-8	有色高斯噪声中带通信号参量的最大似然估计	283
8-9	有色高斯噪声中多重带通信号参量的最大似然估计	288
8-10	若干实际信号参量的最大似然估值	290
8-10-1	测不准原理	290
8-10-2	信号幅度的估计	293
8-10-3	信号到达时刻的估计	294
8-10-4	信号到达时刻与 Doppler 频移的联合估计	296
	习题	298
第九章	信号参量的最佳线性估计	303
9-1	线性最小均方误差估计	303
9-2	正交性原理	306
9-3	递归线性均方估计	311
9-4	最小二乘与加权最小二乘估计	313
9-4-1	最小二乘估计	314
9-4-2	加权最小二乘估计	316
* 9-5	线性估计的应用(一)——自适应信道特性估计	318
* 9-6	线性估计的应用(二)——自适应最小差错概率盲均衡	321
附录 A	梯度算子 $\nabla_{\hat{x}}$ 与 $\nabla_{\hat{x}}^*$	331
	习题	333
第十章	具有未知参量信号的检测	336
10-1	极大(广义)似然检测	336
10-2	高斯噪声中信号的极大(广义)似然检测	337

10-2-1 未知幅度信号的检测	337
10-2-2 一般未知参量信号的检测	339
10-3 白噪声中未知幅度、载波频率与相位信号的检测	340
10-4 未知到达时刻信号的检测	341
10-5 未知到达时刻与载波频率及相位信号的检测	344
习题	346
第十一章 最小最大检测与 Robust 检测	348
11-1 最小最大检测	349
11-2 Robust 检测中的博弈问题	360
* 11-3 平稳无记忆过程的 Robust 检测	362
* 11-4 若干实际信号的 Robust 检测	380
* 11-5 Robust 序贯检验	389
习题	391
第十二章 非参量检测	393
12-1 基本定义与性能测度	394
12-2 符号检验	396
12-3 秩检验	400
12-4 t 检验	409
12-5 若干其他非参量接收机	412
12-5-1 具有参考噪声输入的接收机	412
12-5-2 对称双输入接收机	413
12-5-3 自适应检测	414
习题	419
第十三章 符号干扰信道中的信号检测	422
13-1 符号干扰信道模型	422
13-1-1 符号干扰信道的树图表示	425
13-1-2 符号干扰信道的 Trellis 图与状态图的表示	425
13-2 最大似然序列检测——Viterbi 算法	428
* 13-3 最大似然序列检测接收机的差错概率性能	431
13-3-1 节点差错事件	431
13-3-2 节点与比特差错概率	434
13-3-3 一种比特差错概率上界	437
13-3-4 极高信噪比、无限长符号干扰信道的差错概率性能	444
13-4 与无符号干扰传输的比较	447
* 附录 A 序列检测永不判决概率为零的证明	450

* 附录 B 某些简易信道的 $a(K, s)$	451
* 附录 C σ_l 的分布	452
习题	453
第十四章 随机信号的检测	455
14-1 时变信道模型	455
* 14-2 齐次随机时变信道的潜在抗干扰性	460
14-2-1 限扩散信道、限频信号的潜在抗干扰性	465
14-2-2 最佳信号设计的物理可实现性	468
14-3 齐次随机时变符号干扰信道中的信号检测	472
14-3-1 接收广义似然比	473
* 14-3-2 失配序列检测器的差错概率	475
* 14-4 无限长符号干扰信道的差错概率	482
14-5 几点讨论	485
习题	486
第十五章 多地址用户信号检测	488
15-1 白高斯噪声干扰下限频信道中同步多地址用户信号检测 1——符 号级处理	489
15-2 白高斯噪声干扰下限频信道中同步多地址用户信号检测 2——样 值级处理	493
15-3 多地址用户信号检测接收机的性能	497
习题	502
参考文献	503

第一章 信号的矢量与复数表示

1-1 确知信号集中信号的矢量表示

在检测与估计理论中,经常需要处理一个有 M 个确知信号^① 的集合 $\{s_m(t)\}$, $m \in \{0, 1, \dots, M-1\}$; $t \in [0, T]$ 。若所有的信号 $s_m(t)$ 都是平方可积即能量有限的,则它们可以用 $N \leq M$ 个归一化正交函数的线性组合来描述,即

$$s_m(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_{mn} f_n(t) \quad m \in \{0, 1, \dots, M-1\} \quad t \in [0, T] \quad (1-1-1)$$

式中, $\{f_n(t)\}$, $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ 是在 $[0, T]$ 上的归一化正交函数集,我们称之为基底或坐标函数,它们满足

$$\int_0^T f_n(t) f_l(t) dt = \delta_{nl} = \begin{cases} 1 & n = l \\ 0 & n \neq l \end{cases} \quad n, l \in \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (1-1-2)$$

$$s_{mn} = \int_0^T s_m(t) f_n(t) dt \quad (1-1-3)$$

我们称 s_{mn} 为 $s_m(t)$ 在坐标函数 $f_n(t)$ 上的投影或展开系数。

显然,如果这 M 个信号是线性独立时,即没有一个信号可以表示为其他信号的线性组合时 $N = M$,反之 $N < M$ 。若基函数集及其顺序已经选定,则 $s_m(t)$ 就可用其展开式(1-1-1)中的系数所唯一确定,即我们可以用矢量

$$\mathbf{S}_m \stackrel{\text{def}}{=} [s_{m0}, s_{m1}, \dots, s_{mN-1}]^T \quad m \in \{0, 1, \dots, M-1\}$$

来描述信号 $s_m(t)$,此时 $s_m(t)$ 的能量为

$$E_m = \int_0^T \left[\sum_{n=0}^{N-1} s_{mn} f_n(t) \right]^2 dt = \sum_{n=0}^{N-1} s_{mn}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbf{S}_m\|^2 \quad (1-1-4)$$

我们称 $\|\mathbf{S}_m\|$ 为矢量 $\mathbf{S}$ 的模。

采用信号集的矢量表示后,我们就可以很形象的用 N 维空间中的矢量或点来描述信号集。例如 QPSK 信号的实函数形式为

$$S_m(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos \left(2\pi f_0 t + \frac{2m+1}{4} \pi \right) \quad t \in [0, T] \quad m \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (1-1-5)$$

① 所谓确知信号,就是对观测者来说它的各个参数都是完全已知的。

则我们就可以用二维空间中的四个点来描述它们,见图 1-1。

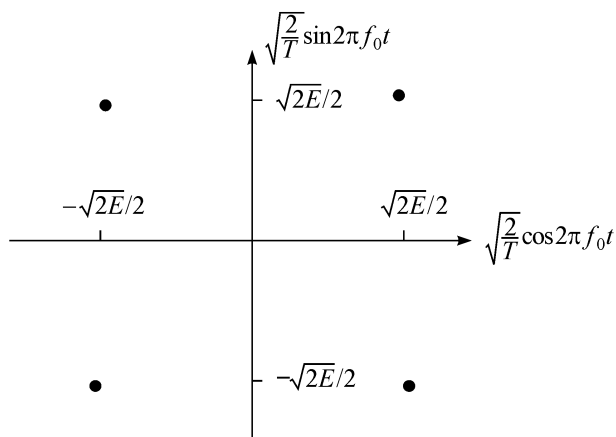


图 1-1 QPSK 信号

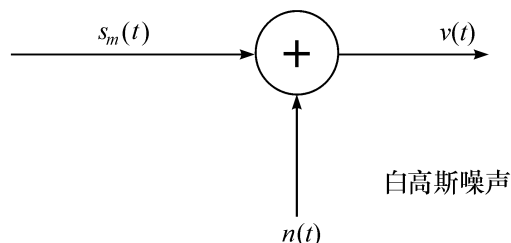


图 1-2 AWGN 信道

信号集的矢量表示也往往给数学处理带来方便。例如在加性白高斯噪声 (AWGN)^①信道中,见图 1-2,信道的输入为 $s_m(t)$, $m \in \{0, 1, \dots, M-1\}$, 输出为

$$v(t) = s_m(t) + n(t) \quad m \in \{0, 1, \dots, M-1\} \quad t \in [0, T] \quad (1-1-6)$$

式中, $n(t)$ 是一个平稳高斯随机过程(噪声), 它的功率在一个远远宽于信号带宽的范围之内是均匀分配的, 因此我们可以把 $n(t)$ 看作是一个带宽为无限, 功率谱密度为常数的随机过程。通信、雷达及其他众多系统中常遇到的热噪声就属于这种类型, 其概率分布服从高斯(正态)分布, 均值为零, 协方差函数近似为

$$\varphi(\tau) = E\{n(t)n(t-\tau)\} = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \quad (1-1-7)$$

式中, $\delta(\cdot)$ 是冲激函数, N_0 是噪声的单边功率谱密度, 即单位带宽(1Hz) 内的噪声功率为 N_0 瓦。

显然, 由于 $n(t)$ 的带宽为无限, $v(t)$ 的带宽也为无限, 用一个有限数量的基函数集 $\{f_n(t)\}$ 很难精确描述它。不过, 我们仍然可以先研究一下随机过程 $v(t)$ 在每个基函数上的映射, 即计算下述 N 个内积积分

$$v_n = \int_0^T v(t) f_n(t) dt \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1-1-8)$$

同时定义

$$n_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T n(t) f_n(t) dt \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1-1-9)$$

则有

^① AWGN 是 Additive White Gaussian Noise 的缩写。

$$v_n = s_{mn} + n_n \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1-1-10)$$

现在让我们考虑随机过程

$$v_1(t) = v(t) - \sum_{n=0}^{N-1} v_n f_n(t) \quad (1-1-11)$$

若实际传输的信号是 $s_m(t)$, 则由式(1-1-6) 与式(1-1-10), $v_1(t)$ 又可表示为

$$\begin{aligned} v_1(t) &= s_m(t) + n(t) - \sum_{n=0}^{N-1} (s_{mn} + n_n) f_n(t) \\ &= n(t) - \sum_{n=0}^{N-1} n_n f_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} n_1(t) \end{aligned} \quad (1-1-12)$$

它仅决定于噪声过程。这样, 原始过程可表示为

$$v(t) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n f_n(t) + v_1(t) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n f_n(t) + n_1(t) \quad (1-1-13)$$

在检测与估计中我们就是根据 $v(t)$ 做出判决与估计的, 一般称 $v(t)$ 为观测值。假定现在仅取由式(1-1-8) 所定义的 N 个映射 $\{v_n\}$ 作为观测值。由于 $v(t)$ 是高斯随机过程, $\{v_n\}$ 将是一些高斯随机变量, 其条件均值为

$$E\{v_n | \mathbf{S}_m\} = s_{mn} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1-1-14)$$

其方差为 $\frac{N_0}{2}$, 这是因为对所有 n 有

$$\begin{aligned} \text{Var}\{v_n | \mathbf{S}_m\} &= E\{(v_n - s_{mn})^2 | \mathbf{S}_m\} = E\{n_n^2\} \\ &= E\left\{\int_0^T \int_0^T n(t) n(s) f_n(t) f_n(s) dt ds\right\} \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T \int_0^T \delta(t-s) f_n(t) f_n(s) dt ds \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T f_n^2(t) dt = \frac{N_0}{2} \end{aligned} \quad (1-1-15)$$

同理, 可以证明各观测值之间又相互独立^①, 这是因为当 $n \neq l$ 时

$$\begin{aligned} \text{cov}\{v_n, v_l | \mathbf{S}_m\} &= E\{n_n, n_l\} \\ &= E\left\{\int_0^T \int_0^T n(t) n(s) f_n(t) f_l(s) dt ds\right\} \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T f_n(t) f_l(t) dt = 0 \end{aligned} \quad (1-1-16)$$

于是我们可以定义 N 维观测矢量为

$$\mathbf{v} = [v_0, v_1, \dots, v_{N-1}]^T$$

其各分量是相互独立的高斯随机变量, 其均值由式(1-1-14) 给出, 方差为 $N_0/2$ 。

^① 对于高斯随机变量互协方差为零即相互独立。

这样一来,在信号矢量是 $\mathbf{S}_m$ 时, $\mathbf{v}$ 的条件概率密度函数为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{v} | \mathbf{S}_m) &= \prod_{n=0}^{N-1} p(v_n | s_{mn}) \\ &= \prod_{n=0}^N \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{1}{N_0} (v_n - s_{mn})^2} \\ &= (\pi N_0)^{-\frac{N}{2}} \exp\left[-\frac{1}{N_0} \|\mathbf{v} - \mathbf{S}_m\|^2\right] \end{aligned} \quad (1-1-17)$$

由于 $v(t)$ 中还包含一项 $n_l(t)$,它与信号无关,只决定于噪声,是一个零均值高斯随机过程。

由于

$$\begin{aligned} E\{n_l(t) v_l\} &= E\left\{\left[n(t) - \sum_{n=0}^{N-1} n_n f_n(t)\right] [s_{ml} + n_l]\right\} \\ &= E\left\{\int_0^T n(t) n(s) f_l(s) ds\right\} - \sum_{n=0}^{N-1} E\{n_n n_l\} f_n(t) \\ &= \frac{N_0}{2} f_l(t) - \frac{N_0}{2} f_l(t) = 0 \quad l = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (1-1-18)$$

所以 $n_l(t)$ 独立于所有观测值 $\{v_n\}$ 。若 $n_l(t)$ 可以用一矢量 $\mathbf{n}_l$ 来表示,其维数为 N' (由于是白噪声, N' 很可能为无穷大),则一定存在下述关系

$$p(\mathbf{v}, \mathbf{n}_l | \mathbf{S}_m) = p(\mathbf{v} | \mathbf{S}_m) p(\mathbf{n}_l) \quad (1-1-19)$$

由于检测与估计一般由条件概率决定(我们后面会证明)。而 $p(\mathbf{n}_l)$ 对各个条件概率的加权是相同的,所以 $\mathbf{n}_l$ 也就是 $n_l(t)$ 对检测与估值的结果不会有影响,可以完全不考虑它。这样一来,当噪声是白噪声时,我们完全可以用一 N 维矢量 $\mathbf{v}$ 来代表接收信号 $v(t)$,即 $\mathbf{v}$ 是 $v(t)$ 的充分统计量。当 $n(t)$ 不是白噪声时,矢量表示就不是这样简单了,我们将在以后予以说明。

1-2 Gram-Schmidt 归一化正交程序与信号展开式

本节将介绍寻找第 1-1 节中归一化正交基底函数 $\{f_n(t)\}$ 的一种方法。

定理 对一有限能量信号集 $\{s_m(t)\}$, $m \in \{0, 1, \dots, M-1\}$, $t \in [0, T]$, 一定存在一归一化正交函数集 $\{f_n(t)\}$, $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, $N \leq M$, 使得

$$s_m(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_{mn} f_n(t) \quad (1-2-1)$$

式中

$$s_{mn} = \int_0^T s_m(t) f_n(t) dt \quad (1-2-2)$$

$N = M$ 仅出现在集合 $\{s_m(t)\}$ 中各信号是线性独立时。

证明 令 $E_m = \int_0^T s_m^2(t) dt$, 我们定义第一个归一化基底函数为

$$f_0(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{E_0}} s_0(t) \quad (1-2-3)$$

则显然有

$$s_0(t) = \sqrt{E_0} f_0(t) = s_{00} f_0(t) \quad (1-2-4)$$

式中, $s_{00} = \sqrt{E_0}$, 而且 $f_0(t)$ 具有单位能量, 这点正是我们所要求的。在定义第二个基底函数之前, 让我们先定义 $s_1(t)$ 在 $f_0(t)$ 上的投影 s_{10} , 即

$$s_{10} = \int_0^T s_1(t) f_0(t) dt \quad (1-2-5)$$

现在定义

$$f_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{s_1(t) - s_{10} f_0(t)}{s_{11}} \quad (1-2-6)$$

式中

$$\begin{aligned} s_{11}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \left[\int_0^T s_1^2(t) dt - s_{10}^2 \right]^{1/2} \\ &= [E_1 - s_{10}^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (1-2-7)$$

从式(1-2-5) 及式(1-2-6) 可以看出

$$\int_0^T f_0(t) f_1(t) dt = 0 \quad (1-2-8)$$

而且从式(1-2-6) 及式(1-2-7) 可以看出 $f_1(t)$ 也具有单位能量, 这是因为

$$\int_0^T f_1^2(t) dt = \frac{E_1 - s_{10}^2}{s_{11}^2} = 1 \quad (1-2-9)$$

同样, 由式(1-2-6) 有

$$s_1(t) = s_{10} f_0(t) + s_{11} f_1(t) \quad (1-2-10)$$

而且从式(1-2-8) 与式(1-2-9) 可以看出

$$s_{11} = \int_0^T s_1(t) f_1(t) dt$$

采用归纳法, 假定对所有 $k < m$, 下式成立

$$s_k(t) = \sum_{n=0}^k s_{kn} f_n(t) \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \quad (1-2-11)$$

式中

$$s_{kn} = \int_0^T s_k(t) f_n(t) dt \quad (1-2-12)$$

而且 $\{f_n(t), n = 0, 1, \dots, k\}$ 相互正交且每一基底函数都有单位能量。于是我们定义

$$s_{mn} = \int_0^T s_m(t) f_n(t) dt \quad n = 1, 2, \dots, m-1 \quad (1-2-13)$$

及

$$f_m(t) = \frac{s_m(t) - \sum_{n=0}^{m-1} s_{mn} f_n(t)}{s_{mm}} \quad (1-2-14)$$

式中

$$s_{mm} = \left[E_m - \sum_{n=0}^{m-1} s_{mn}^2 \right]^{1/2} \quad (1-2-15)$$

则从式(1-2-13) 及式(1-2-14) 可以看出

$$\int_0^T f_m(t) f_n(t) dt = 0 \quad n < m \quad (1-2-16)$$

而且从式(1-2-14) 及式(1-2-15) 可以看出 $f_m(t)$ 具有单位能量。于是

$$s_m(t) = \sum_{n=0}^m s_{mn} f_n(t) \quad (1-2-17)$$

而且从式(1-2-16) 可得

$$s_{mn} = \int_0^T s_m(t) f_n(t) dt \quad (1-2-18)$$

因此我们发现对于一个有 M 个有限能量信号集 $\{s_m(t)\}$, 表示式(1-2-1) 总是成立的, 且 $N \leq M$ 。

但是, 如果该信号集中的某个子集中的信号间是线性相关时, 即存在一非零的实数集 $a_0, a_1, \dots, a_j$, 使得

$$a_0 s_{m0}(t) + a_1 s_{m1}(t) + \dots + a_j s_{mj}(t) = 0$$

式中, $m_0 < m_1 < \dots < m_j$ 。

在这样一个子集中, 显然信号 $s_{mj}(t)$ 可以表示为其他信号的线性组合, 当然也可以表示为由以前各信号所产生基函数的线性组合。因此对 $s_{mj}(t)$ 来说, 就没有必要产生新的基函数 $f_{mj}(t)$ 了。用这种方法可以去掉若干个基函数, 因此 $N < M$ 。

1-3 信号的复表示

为了分析和处理问题方便, 我们不但需要在时间域而且需要在频率域去研究信号。一个信号 $s(t)$ 与其频谱 $S(f)$ 的关系为

$$S(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt \stackrel{\text{def}}{=} F\{s(t)\} \quad (1-3-1)$$

$$s(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}\{S(f)\} \quad (1-3-2)$$

它们是一对傅里叶变换的关系,表示为

$$s(t) \Leftrightarrow S(f) \quad (1-3-3)$$

对于平方可积(即能量有限)型信号,即

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty \quad (1-3-4)$$

其傅里叶变换一定存在,且满足下述关系

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \quad (1-3-5)$$

关系式(1-3-5)我们一般称之为 Parseval 定理。

对于实信号 $s(t)$,由于其复数共轭是其自身

$$s^*(t) = s(t)$$

这里 $\cdot^*$ 表示 $\cdot$ 的复数共轭,一定有

$$S(-f) = S^*(f)$$

及

$$S(f) = S^*(-f)$$

即其频谱是复共轭对称的。所以我们只需要知道其频谱中的正频率分量(反之亦真)就足够了。事实上

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df + \int_{-\infty}^0 S(f) e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_0^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df + \int_0^{\infty} [S(f) e^{j2\pi ft}]^* df \\ &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} 2 S(f) U(f) e^{j2\pi ft} df \end{aligned} \quad (1-3-6)$$

式中, $\operatorname{Re} \cdot$ 表示 $\cdot$ 的实部。

$$U(f) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & f > 0 \\ \frac{1}{2} & f = 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases}$$

是单位阶跃函数。

如果我们定义

$$\tilde{S}(f) = 2 S(f) U(f) \quad (1-3-7)$$

及

$$\tilde{s}(t) \Leftrightarrow \tilde{S}(f) \quad (1-3-8)$$

则有

$$s(t) = \operatorname{Re} \tilde{s}(t) \quad (1-3-9)$$

我们称 $\tilde{s}(t)$ 为 $s(t)$ 的复信号,它由去掉 $s(t)$ 的负频率分量且正频率分量加倍后

形成。复信号 $\tilde{s}(t)$ 有时又称为 $s(t)$ 的解析^①信号或预包络。

事实上一个实函数加上任意一个虚函数部分也可以构成一个复函数,该复函数的实部也是原来的实函数。但我们决不这样作,因为一来这样的复函数不是唯一的,二来引入这样的复函数后运算反而复杂了。我们的目的是简化运算且复函数应该是唯一的。在我们的定义中一个函数的复数形式的傅里叶变换应该没有负宗量分量。

我们称一个复信号的幅度是其对应实信号波形的包络,虽然这这也是一个纯数学定义,但对窄带信号而言,它确有实在的物理意义。

同样,我们称一个复信号的相位是其对应实信号波形的相位,虽然这这也是一个纯数学定义,但对窄带信号而言,它也有实在的物理意义。

让我们考查一个实窄带信号,其一般形式为

$$s(t) = a(t)\cos[2\pi f_0 t + \xi(t)] \quad (1-3-10)$$

根据经验,我们可以很容易写出其复指数形式为

$$\tilde{s}(t) = \tilde{a}(t)e^{j2\pi f_0 t} \quad (1-3-11)$$

式中

$$\tilde{a}(t) = a(t)e^{j\xi(t)}$$

$$\tilde{a}(t) \Leftrightarrow \tilde{A}(f)$$

且

$$|\tilde{A}(f)| = 0 \quad \text{当 } |f| > f_0 \text{ 时}$$

很易检验

$$s(t) = \operatorname{Re} \tilde{s}(t) = \frac{1}{2}[\tilde{s}(t) + \tilde{s}^*(t)]$$

成立。

由傅里叶变换理论,可以求出 $\tilde{s}(t)$ 的频谱为

$$\tilde{S}(f) = \tilde{A}(f) \otimes \delta(f - f_0) = \tilde{A}(f - f_0) \quad (1-3-12)$$

式中, $\otimes$ 表示卷积运算。由于

$$\tilde{s}(t) \Leftrightarrow \tilde{S}(f)$$

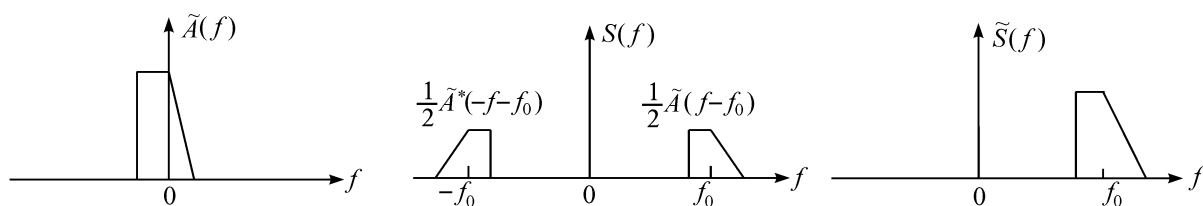
$$\tilde{s}^*(t) \Leftrightarrow \tilde{S}^*(-f)$$

则实信号 $s(t)$ 的频谱可以表示为

$$S(f) = \frac{1}{2}[\tilde{S}(f) + \tilde{S}^*(-f)] = \frac{1}{2}[\tilde{A}(f - f_0) + \tilde{A}^*(-f - f_0)] \quad (1-3-13)$$

它们之间的关系可见图 1-3。

① 在这里解析这个术语不一定意味着该函数是解析的,仅意味着在复变函数理论中它满足某些特定的条件。这里我们仅强调该函数的傅里叶变换的负宗量为零。

图 1-3 $\tilde{S}(f)$ 与 $S(f)$ 的关系

1-4 Hilbert 变换及其性质

下面让我们进一步研究复信号实部与虚部之间的关系。由于

$$\tilde{S}(f) = 2 S(f) U(f) = S(f)[1 + \text{sgn}(f)] \quad (1-4-1)$$

式中

$$\text{sgn}(f) = \begin{cases} -1 & f < 0 \\ 0 & f = 0 \\ 1 & f > 0 \end{cases} \quad (1-4-2)$$

又因为

$$F^{-1}[1 + \text{sgn}(f)] = \delta(t) + j \frac{1}{\pi t} \quad (1-4-3)$$

所以有

$$\tilde{s}(t) = s(t) \otimes \left[\delta(t) + j \frac{1}{\pi t} \right] = s(t) + j \hat{s}(t) \quad (1-4-4)$$

式中

$$\begin{aligned} \hat{s}(t) &= s(t) \otimes \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t - \tau)}{\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t + \tau)}{-\tau} d\tau \end{aligned} \quad (1-4-5)^{\textcircled{1}}$$

我们称 $\hat{s}(t)$ 为 $s(t)$ 的 Hilbert 变换, 表示为

$$\hat{s}(t) = H\{s(t)\} \quad (1-4-6)$$

下面研究一下 $\hat{s}(t)$ 的频谱。由于

$$\hat{s}(t) = -j[\tilde{s}(t) - s(t)] \quad (1-4-7)$$

则

$$\hat{S}(f) = -j[2 S(f) U(f) - S(f)]$$

^① 当 $\tau = t$ 时的发散性可由取积分的 Cauchy 主值去消除, 即对 $\epsilon > 0$

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon > 0} \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{t-\epsilon} \frac{s(\tau)}{(t - \tau)} d\tau + \int_{t+\epsilon}^{\infty} \frac{s(\tau)}{(t - \tau)} d\tau \right]$$

$$= S(f) H(f) \quad (1-4-8)$$

式中

$$H(f) = -j[2U(f) - 1] = \begin{cases} j & f < 0 \\ 0 & f = 0 \\ -j & f > 0 \end{cases} \quad (1-4-9)$$

我们称 $H(f)$ 为 Hilbert 滤波器。它是一个全通型的 90° 相移网络, 其冲激响应为 $\frac{1}{\pi t}$, 是一个物理不可实现网络。如图 1-4 所示。

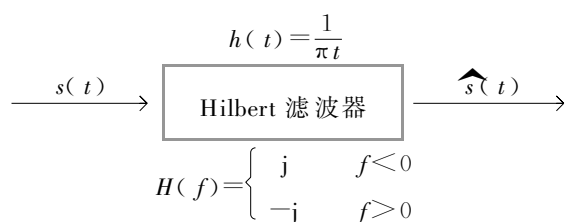


图 1-4 Hilbert 滤波器

下面给出 Hilbert 变换的主要性质, 以便我们加深理解复信号的特点。

1) $s(t)$ 与 $\hat{s}(t)$ 具有同样的能量。

这是由于 $|H(f)|^2 = 1$, 而根据 Parseval 定理有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{S}(f)|^2 df$$

显然, 复信号的能量是其对应实信号的二倍。

$$2) \quad \hat{\hat{s}}(t) = -s(t) \quad (1-4-10)$$

这是由于 $H^2(f) = -1$ 的缘故, 推而广之可得高阶 Hilbert 变换, 例如

$$H^{(n)}\{s(t)\} = \begin{cases} s(t) & n = 4k + 0 \\ \hat{s}(t) & n = 4k + 1 \\ -s(t) & n = 4k + 2 \\ -\hat{s}(t) & n = 4k + 3 \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots \quad (1-4-11)$$

3) 如果 $y(t) = v(t) \otimes s(t)$ 则

$$\hat{y}(t) = \hat{v}(t) \otimes s(t) = v(t) \otimes \hat{s}(t) \quad (1-4-12)$$

这是由于

$$\hat{Y}(f) = V(f) S(f) H(f) \quad (1-4-13)$$

而 $H(f)$ 可以任意与 $V(f)$ 或 $S(f)$ 结合而得其复数形式。

4) 若 $s(t)$ 是一个广义平稳随机过程信号, 则其 Hilbert 变换 $\hat{s}(t)$ 与 $s(t)$ 有同样的自相关函数与功率谱。

$s(t)$ 的自相关函数定义为

$$\varphi_s(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} E\{s(t)s(t-\tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s(t)s(t-\tau)dt \quad (1-4-14)$$

其功率谱 $\Phi_s(f)$ 与 $\varphi_s(\tau)$ 是一对傅里叶变换的关系

$$\Phi_s(f) \Leftrightarrow \varphi_s(\tau) \quad (1-4-15)$$

证明 由图 1-4 可知,若 $s(t)$ 的功率谱为 $\Phi_s(f)$, $\hat{s}(t)$ 的功率谱为 $\Phi_{\hat{s}}(f)$, 则

$$\Phi_{\hat{s}}(f) = |H(f)|^2 \Phi_s(f) \quad (1-4-16)$$

但是 $|H(f)|^2 = 1$, 所以上述结论成立。

我们知道随机信号的功率谱与其相位无关,而 $s(t)$ 与 $\hat{s}(t)$ 仅在相位谱上有差别。当然它们的功率谱从而相关函数就没有区别了。

$$5) \quad \varphi_{s\hat{s}}(\tau) = \hat{\varphi}_s(\tau) \quad (1-4-17)$$

$$\varphi_{ss}(\tau) = -\hat{\varphi}_s(\tau) \quad (1-4-18)$$

这里 $\varphi_{s\hat{s}}(\tau)$ 表示 $\hat{s}(t)$ 与 $s(t)$ 间的互相关函数,其定义为

$$\varphi_{s\hat{s}}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} E\{\hat{s}(t)s(t-\tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \hat{s}(t)s(t-\tau)dt \quad (1-4-19)$$

证明 根据互相关函数的定义,有

$$\begin{aligned} \varphi_{s\hat{s}}(\tau) &= E\{\hat{s}(t)s(t-\tau)\} \\ &= \frac{1}{\pi} E\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t-\xi)s(t-\tau)}{\xi} d\xi \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_s(\tau-\xi)}{\xi} d\xi = \hat{\varphi}_s(\tau) \end{aligned}$$

同理可证

$$\varphi_{ss}(\tau) = -\hat{\varphi}_s(\tau)$$

6) $\varphi_{s\hat{s}}(\tau)$ 是一奇函数,即

$$\varphi_{s\hat{s}}(-\tau) = -\varphi_{s\hat{s}}(\tau) = \varphi_{\hat{s}s}(\tau) \quad (1-4-20)$$

特别是 $\varphi_{s\hat{s}}(0) = -\varphi_{\hat{s}s}(0) = 0$

证明 由于任何实信号的自相关函数是偶函数,即

$$\varphi_s(-\tau) = \varphi_s(\tau) \quad (1-4-21)$$

但是

$$\varphi_{s\hat{s}}(\tau) = \varphi_s(\tau) \otimes \frac{1}{\pi\tau} \quad (1-4-22)$$

式中, $\frac{1}{\pi\tau}$ 是一奇函数, 所以 $\varphi_s(\tau)$ 必是一奇函数。

7) 复信号 $\tilde{s}(t)$ 的自相关函数 $\tilde{\varphi}_s(\tau)$ 定义为

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_s(\tau) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} E\{\tilde{s}(t)\tilde{s}^*(t-\tau)\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T} \int_{-T}^T \tilde{s}(t)\tilde{s}^*(t-\tau) dt \quad (1-4-23)^{\text{①}}\end{aligned}$$

它有下列性质

$$\tilde{\varphi}_s(\tau) = \varphi_s(\tau) + j\hat{\varphi}_s(\tau) \quad (1-4-24)$$

证明 根据定义

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_s(\tau) &= \frac{1}{2} E\{[s(t) + j\hat{s}(t)][s(t-\tau) - j\hat{s}(t-\tau)]\} \\ &= \frac{1}{2} \{E[s(t)s(t-\tau)] + E[\hat{s}(t)\hat{s}(t-\tau)]\} \\ &\quad + \frac{1}{2} j\{E[\hat{s}(t)s(t-\tau)] - E[s(t)\hat{s}(t-\tau)]\} \\ &= \varphi_s(\tau) + j\hat{\varphi}_s(\tau)\end{aligned}$$

推导中我们应用了性质 1) 及 5)。

8) 若干重要的 Hilbert 变换

$$\textcircled{1} \quad H\{\cos(2\pi f_0 t + \xi)\} = \sin(2\pi f_0 t + \xi) \quad (1-4-25)$$

$$\textcircled{2} \quad H\{\sin(2\pi f_0 t + \xi)\} = -\cos(2\pi f_0 t + \xi) \quad (1-4-26)$$

$$\textcircled{3} \quad H\{a(t)\cos(2\pi f_0 t + \xi(t))\} = a(t)\sin(2\pi f_0 t + \xi(t)) \quad (1-4-27)$$

$$\textcircled{4} \quad H\{a(t)\sin(2\pi f_0 t + \xi(t))\} = -a(t)\cos(2\pi f_0 t + \xi(t)) \quad (1-4-28)$$

在 ③ 和 ④ 中我们假定

$$\tilde{a}(t) = a(t)e^{j\xi(t)} \Leftrightarrow \tilde{A}(f)$$

且 $|\tilde{A}(f)| = 0$, 当 $|f| > f_0$ 时。

关于这几个变换的证明留给读者自己去作。

1-5 线性系统的复表示

众所周知, 如图 1-5 在时间域描述一个线性系统是用其冲激响应函数 $h(t)$, 而在频率域则是用其传输函数 $H(f)$ 。且它们是一对傅里叶变换的关系, 即

$$h(t) \Leftrightarrow H(f)$$

① 根据惯例, 我们希望 $\tilde{\varphi}_s(\tau)$ 的实部就是实信号 $s(t)$ 的自相关函数 $\varphi_s(\tau)$, 所以引入系数 $\frac{1}{2}$ 。

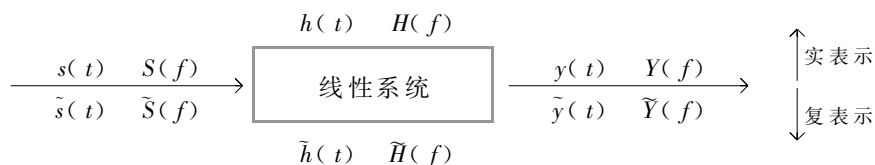


图 1-5 线性系统及其参数

在采用传统的实数表示式时,一个线性系统的输入、输出及系统响应之间的关系为:

在时间域

$$y(t) = s(t) \otimes h(t) \quad (1-5-1)$$

在频率域

$$Y(f) = S(f) H(f) \quad (1-5-2)$$

这里

$$s(t) \Leftrightarrow S(f)$$

$$y(t) \Leftrightarrow Y(f)$$

$$h(t) \Leftrightarrow H(f)$$

它们都有对应的复表示。现在的问题是在线性系统的输入、输出及系统响应全利用复表示时,关系式(1-5-1)及式(1-5-2)是否仍然成立。让我们从线性系统的输出开始考察,由于在频率域中

$$Y(f) = S(f) H(f)$$

所以有

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(f) &= 2 S(f) H(f) U(f) \\ &= \tilde{S}(f) H(f) = S(f) \tilde{H}(f) \end{aligned} \quad (1-5-3)$$

显然,在时间域中有

$$\tilde{y}(t) = \tilde{s}(t) \otimes h(t) = s(t) \otimes \tilde{h}(t) \quad (1-5-4)$$

由式(1-5-3)及式(1-5-4)可以看出在计算线性系统的输出时,若用复表示,则系统的输入或响应必须有一个用实表示,这是很不方便的。不过请注意, $\tilde{S}(f)$ 或 $\tilde{H}(f)$ 是没有负频率分量的,所以

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(f) &= \tilde{S}(f) H(f) = \frac{1}{2} \tilde{S}(f) 2 H(f) U(f) \\ &= \frac{1}{2} \tilde{S}(f) \tilde{H}(f) \end{aligned} \quad (1-5-5)$$

显然,在时间域中有

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{2} \tilde{s}(t) \otimes \tilde{h}(t) \quad (1-5-6)$$

这样全用复表示后,在计算线性系统的输出时只需引入一个系数 $\frac{1}{2}$ 就可以了。

1-6 窄带随机过程

如果 $n(t)$ 是一个广义平稳窄带随机过程, 其均值为零, 若当 $|f - f_0| > 0$ 时其功率谱密度 $|\Phi(f)| = 0$, 则其复信号可以表示为复包络与载波的形式

$$\tilde{n}(t) = n(t) + j\hat{n}(t) = \tilde{n}_0(t)e^{j2\pi f_0 t} \quad (1-6-1)$$

式中

$$\tilde{n}_0(t) = \tilde{n}(t)e^{-j2\pi f_0 t} = n_c(t) + jn_s(t) \quad (1-6-2)$$

即 $\tilde{n}_0(t)$ 的频谱是 $\tilde{n}(t)$ 的频谱左移 f_0 (图 1-6), 我们称 $\tilde{n}_0(t)$ 是 $\tilde{n}(t)$ 的复包络。 $n_c(t)$ 与 $n_s(t)$ 分别是 $\tilde{n}_0(t)$ 的实部与虚部。

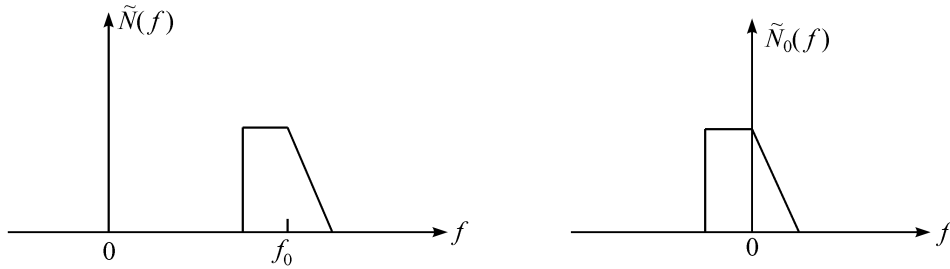


图 1-6 $\tilde{N}_0(f)$ 与 $\tilde{N}(f)$ 的关系

此时实过程 $n(t)$ 可以用调制波形表示为

$$n(t) = n_c(t)\cos 2\pi f_0 t - n_s(t)\sin 2\pi f_0 t \quad (1-6-3)$$

由于当 $|f| > f_0$ 时 $\tilde{N}_0(f) = 0$, 根据 Hilbert 变换的性质 8), 有

$$\hat{n}(t) = n_c(t)\sin 2\pi f_0 t + n_s(t)\cos 2\pi f_0 t \quad (1-6-4)$$

式(1-6-3)与式(1-6-4)可以统一用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} n(t) \\ \hat{n}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{Q}(t) \begin{bmatrix} n_c(t) \\ n_s(t) \end{bmatrix} \quad (1-6-5)$$

式中

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} \cos 2\pi f_0 t & -\sin 2\pi f_0 t \\ \sin 2\pi f_0 t & \cos 2\pi f_0 t \end{bmatrix} \quad (1-6-6)$$

由于, 这里 $\mathbf{I}$ 是 $\mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}^T(t) = \mathbf{Q}^T(t)\mathbf{Q}(t) = \mathbf{I}$ 一个二阶单位矩阵, 所以 $\mathbf{Q}(t)$ 是一个正交矩阵。因此我们有

$$\begin{bmatrix} n_c(t) \\ n_s(t) \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^T(t) \begin{bmatrix} n(t) \\ \hat{n}(t) \end{bmatrix} \quad (1-6-7)$$

对于随机过程, 我们最感兴趣的是它们之间的自相关与互相关函数。下面让我们研究一下它们之间的关系。由于

$$\begin{aligned}
& E \left\{ \begin{bmatrix} n_c(t) \\ n_s(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_c(t-\tau) & n_s(t-\tau) \end{bmatrix} \right\} \\
&= \mathbf{Q}^T(t) E \left\{ \begin{bmatrix} n(t) \\ \hat{n}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n(t-\tau) & \hat{n}(t-\tau) \end{bmatrix} \right\} \mathbf{Q}(t-\tau)
\end{aligned}$$

可得

$$\begin{bmatrix} \varphi_c(\tau) & \varphi_{cs}(\tau) \\ \varphi_{sc}(\tau) & \varphi_s(\tau) \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^T(t) \begin{bmatrix} \varphi_n(\tau) & -\hat{\varphi}_n(\tau) \\ \hat{\varphi}_n(\tau) & \varphi_n(\tau) \end{bmatrix} \mathbf{Q}(t-\tau) \quad (1-6-8)$$

展开式(1-6-8) 可得

$$\varphi_c(\tau) = \varphi_s(\tau) = \varphi_n(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau + \hat{\varphi}_n(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau \quad (1-6-9)$$

$$\varphi_{sc}(\tau) = -\varphi_{cs}(\tau) = -\varphi_n(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau + \hat{\varphi}_n(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau \quad (1-6-10)$$

可以看出

$$\varphi_{cs}(\tau) = -\varphi_{sc}(\tau) = \hat{\varphi}_c(\tau) \quad (1-6-11)$$

及

$$\varphi_c(\tau) = \varphi_s(\tau) \quad (1-6-12)$$

由于 $n_c(t)$ 与 $n_s(t)$ 都是实过程, 所以有

$$\varphi_{cs}(\tau) = \varphi_{sc}(-\tau) \quad (1-6-13)$$

但由式(1-6-10) 知 $\varphi_{sc}(\tau) = -\varphi_{cs}(\tau)$, 所以有

$$\varphi_{sc}(\tau) = -\varphi_{sc}(-\tau) \quad (1-6-14)$$

即 $n_s(t)$ 与 $n_c(t)$ 间的互相关函数是一奇函数。

综上所述, 我们发现 $\tilde{n}(t)$ 的复包络的实虚部具有同样的自相关函数, 而且其虚部与实部之间的互相关函数正是实部自相关函数的 Hilbert 变换并为奇函数。这些性质与一对 Hilbert 变换完全一致。但是由于 $\tilde{N}_0(f)$ 有负频率分量, 见图 1-6, $n_c(t)$ 与 $n_s(t)$ 之间一般不会是一对 Hilbert 变换关系。

下面让我们研究一下 $n_c(t)$ 、 $n_s(t)$ 与 $n(t)$ 的功率谱之间的关系。

首先我们已经知道 $n(t)$ 与 $\hat{n}(t)$ 有同样的功率谱 $\Phi(f)$ 、 $\hat{n}(t)$ 与 $n(t)$ 间的互谱为 $\Phi(f)H(f)$ 、 $n_c(t)$ 与 $n_s(t)$ 有同样的功率谱 $\Phi_c(f)$ 、 $n_s(t)$ 与 $n_c(t)$ 间的互谱为 $\Phi_c(f)H(f)$ 。

然后由式(1-6-9) 可知

$$\begin{aligned}
\Phi_c(f) &= \frac{1}{2} \Phi(f) \otimes [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)] \\
&\quad + \frac{1}{2j} \Phi(f) H(f) \otimes [\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \Phi(f-f_0) + \frac{1}{2} \Phi(f+f_0) + \frac{1}{2j} \Phi(f-f_0) H(f-f_0) \\
&\quad - \frac{1}{2j} \Phi(f+f_0) H(f+f_0)
\end{aligned} \tag{1-6-15}$$

图 1-7 是式(1-6-15) 中各项间的关系。

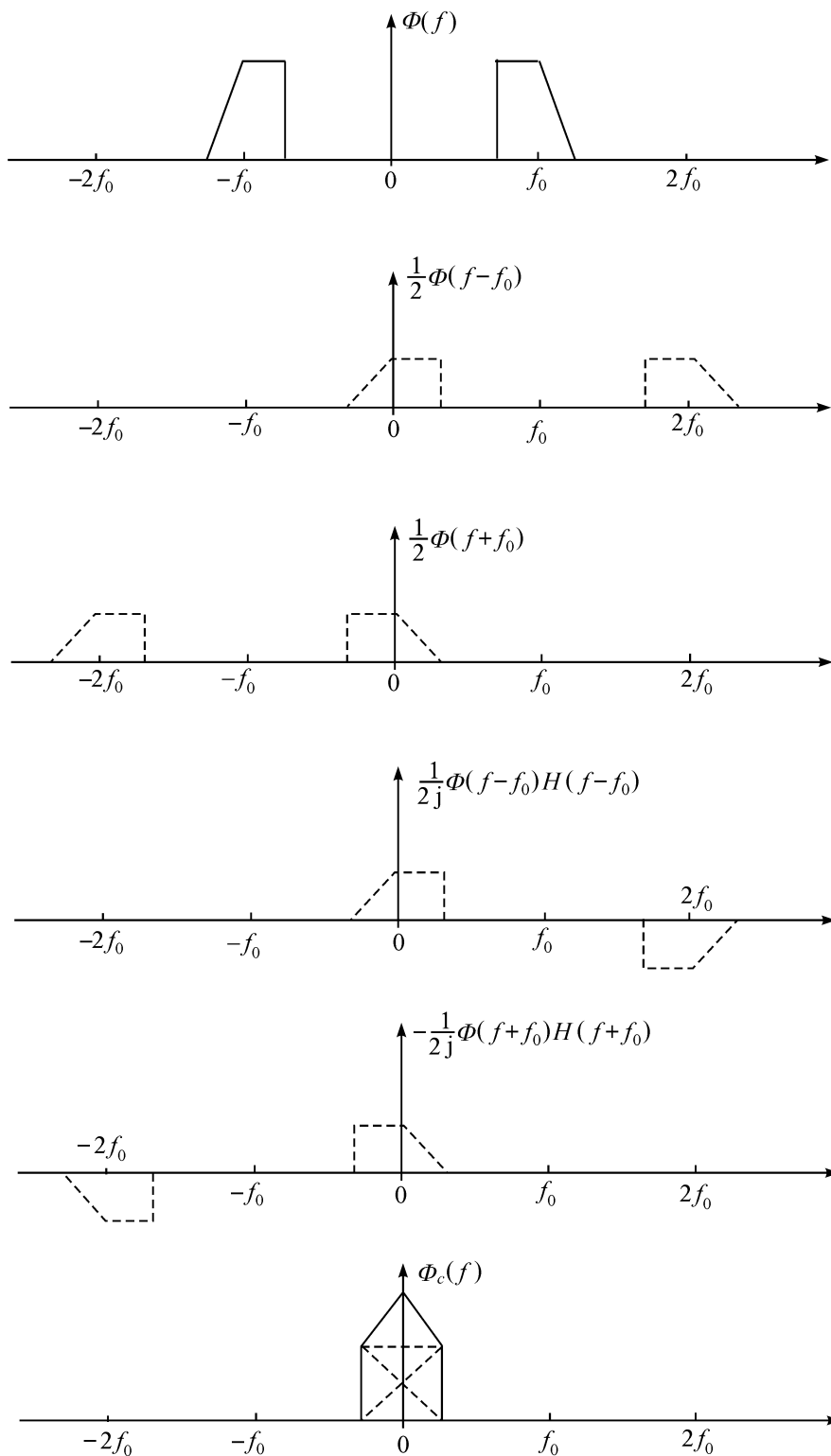


图 1-7 式(1-6-15) 中各项的关系

当 $\Phi(f)$ 是窄带信号时, 即当 $|f - f_0| > 0$ 时, $\Phi(f) = 0$, 则有

$$\Phi_c(f) = \Phi_s(f) = \begin{cases} \Phi(f + f_0) + \Phi(f - f_0) & -f_0 < f < f_0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1-6-16)$$

最后我们还需特别指出当 $\tilde{n}(t)$ 是广义平稳过程时, 由于

$$\tilde{\varphi}_n(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} E\{\tilde{n}(t)\tilde{n}^*(t-\tau)\}$$

及

$$\tilde{\varphi}_n^*(\tau) = \frac{1}{2} E\{\tilde{n}(t-\tau)\tilde{n}^*(t)\} = \tilde{\varphi}_n(-\tau)$$

所以

$$\tilde{\varphi}_n(\tau) = \tilde{\varphi}_n^*(-\tau) \quad (1-6-17)$$

即 $\tilde{\varphi}_n(\tau)$ 是一埃米特(Hermitian)函数。这样它所对应的功率谱一定是实函数, 这是因为此时

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_n^*(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_n^*(\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_n(-\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_n(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \tilde{\Phi}_n(f) \end{aligned} \quad (1-6-18)$$

所以今后在表示广义平稳复过程的功率谱时, 复函数符号 $\sim$ 可以不写。

当 $\tilde{n}_0(t)$ 是广义平稳过程时, 由于

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{\tilde{n}_0}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_{\tilde{n}_0}(f) e^{j2\pi f\tau} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_{\tilde{n}_0}(f) \cos 2\pi f\tau df + j \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_{\tilde{n}_0}(f) \sin 2\pi f\tau df \end{aligned} \quad (1-6-19)$$

但是

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{n}_0}(\tau) = \varphi_c(\tau) + j\varphi_{cs}(\tau)$$

所以有

$$\varphi_c(\tau) = \varphi_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_{\tilde{n}_0}(f) \cos 2\pi f\tau df \quad (1-6-20)$$

$$\varphi_{cs}(\tau) = -\varphi_{sc}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}_{\tilde{n}_0}(f) \sin 2\pi f\tau df \quad (1-6-21)$$

特别是当 $\tilde{\Phi}_{\tilde{n}_0}(f)$ 是偶函数时 $\varphi_{cs}(\tau) \equiv 0$, 即 $n_c(t)$ 与 $n_s(t)$ 互不相关。

1-7 Karhunan-Loeve 展式

若一确知信号 $\tilde{s}(t)$, $t \in [0, T]$ 满足

$$E_s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int_0^T \tilde{s}(t) \tilde{s}^*(t) dt < \infty \quad (1-7-1)$$