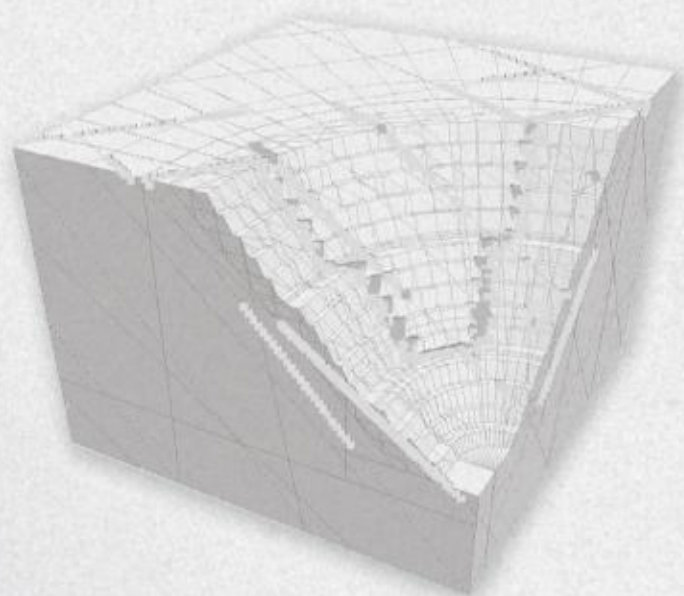


岩土工程数值计算方法 实用教程

王金安 王树仁 冯锦艳 等 编著



 科学出版社
www.sciencep.com

国家重点基础研究发展计划(973 计划)
北京市重点学科建设项目

岩土工程数值计算方法 实用教程

王金安 王树仁 冯锦艳 等 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书系统介绍了岩土工程数值计算的基本理论和建模方法。本书内容分为基础篇和应用篇,由浅入深、循序渐进地阐述了数值计算的基本概念、基础理论和解算方法。基础篇以有限单元法为主,同时,简要介绍了有限差分方法;应用篇从建模方法和应用分析两个方面重点介绍了目前广泛使用的岩土工程数值计算分析软件,包括有限单元法 ANSYS、有限差分法 FLAC^{2D}和 FLAC^{3D}、离散单元法 UDEC、颗粒元法 PFC 的基本使用和建模方法,并给出大量工程应用实例。学生可以根据计算对象的几何与力学特点,有选择地学习和使用相关软件。

本书是学习岩土工程数值计算方法的基础教材,可供土木、矿业、交通和水电等领域的高年级本科生和研究生教学使用,也可供相关科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

岩土工程数值计算方法实用教程/王金安等编著. —北京:科学出版社,2010

ISBN 978-7-03-028340-5

I. ①岩… II. ①王… III. ①岩土工程-数值计算-计算方法-教材
IV. ①TU4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 138682 号

责任编辑:刘宝莉 / 责任校对:朱光兰
责任印制:赵 博 / 封面设计:鑫联必升

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 7 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2010 年 7 月第一次印刷 印张: 20 1/2

印数: 1—4 000 字数: 400 000

定价: 40.00 元(含光盘)

(如有印装质量问题,我社负责调换(科印))

前 言

岩土工程是一门集理论性和实践性为一体的交叉应用学科,广泛涉及土木、采矿、交通和水电等工程领域。岩土工程的研究对象就是工程岩土体。在漫长的地质过程中,岩土体由于多次地质构造运动和应力场的作用,造成了岩土体材料的非均质、非连续和各向异性。岩土工程大多含有多种属性的材料并处于复杂的力学环境中。工程岩土体的力学响应特性表现出与应力路径、应力状态及在时间、空间上变化密切相关的特点。因此,针对这样一种动态、复杂多变的工程岩土体,仅用解析方法求解是困难的。正是岩土工程问题的复杂性,决定了采用数值计算分析方法的必要性和重要性。

本书作者经过十余年的岩土工程理论教学和科研实践,在岩土工程数值计算分析方面积累了一定的经验和应用技巧。为了达到让学生零起点入门、快速掌握岩土工程数值计算分析的技能,精选了简明易懂的教学内容和大量的工程应用实例,以期学生能够在较短时间内具备运用数值计算方法分析问题和解决问题的能力。

本书各章节编写分工为:绪论、第1~6章、第8章8.4节和8.5节由王金安执笔;第7章由张少杰执笔;第8章8.1~8.3节、8.6~8.8节和第9章由冯锦艳执笔;第10章和第11章由王树仁执笔。全书由王金安和王树仁统稿,并负责全书终审。

为便于学生课后进行实际操作,编者将书中典型的工程实例给出了程序代码,并汇集到书末所附光盘中,可直接为相关软件调用、调试。

衷心感谢中国矿业大学谢和平院士、彭苏萍院士、何满潮教授,西安科技大学刘怀恒教授,北京科技大学蔡美峰教授、高谦教授、纪洪广教授、乔兰教授、李长洪教授、吴顺川教授以及波兰西里西亚工业大学 Kwasniewski 教授等在本书作者研学期间给予的指导和教诲。本书的形成和编写得益于中国石油大学王芝银教授、李云鹏教授、ITASCA 公司朱焕春博士等提供的大量素材和帮助,北京科技大学的博士和硕士研究生姜琳婧、孙颖洁、周跃峰、彭加强、辛振省、周诗俊、李娜等在本书图文录入过程中做了大量的工作,在此一并表示感谢。

本书的出版得到国家重点基础研究发展计划(973计划, No. 2010CB731500)、北京市重点学科建设项目和北京科技大学研究生教育发展基金项目的资助,在此表示感谢。

限于时间和水平有限,书中难免存在不妥之处,恳请专家、学者不吝批评和赐教,谢谢!

目 录

前言

绪论	1
§ 0.1 学习本课程的必要性	1
§ 0.2 有限单元法基本思想	3
§ 0.3 有限单元法发展概况	6
§ 0.4 数值计算方法的分类	7
§ 0.5 学习要求和方法	10
习题与思考题	10

上篇 基础篇

第 1 章 弹性力学基本方程及虚位移原理	13
§ 1.1 概述	13
§ 1.2 弹性力学基本方程	13
§ 1.3 两种平面问题	18
§ 1.4 虚位移原理	20
习题与思考题	23
第 2 章 杆系结构有限单元法	24
§ 2.1 杆系结构的定义	24
§ 2.2 平面杆系结构有限单元分析	24
§ 2.3 局部坐标系的单元刚度方程	28
§ 2.4 总体坐标系中的单元刚度方程	35
§ 2.5 总体刚度方程的形成	37
§ 2.6 总体载荷列阵的形成	43
§ 2.7 引入边界条件修正总体刚度方程	46
§ 2.8 总体刚度方程求解	50
§ 2.9 计算单元内力和应力	54
§ 2.10 逆运算校核计算结果并求解支座反力	57
习题与思考题	57
第 3 章 平面问题有限单元法	59
§ 3.1 平面问题的单元划分	59

§ 3.2 单元位移函数及插值函数·····	62
§ 3.3 单元应力矩阵和单元应变矩阵·····	67
§ 3.4 单元刚度方程·····	68
§ 3.5 单元等效结点载荷列阵·····	70
§ 3.6 总体刚度方程的建立·····	72
§ 3.7 修正和求解总体刚度方程·····	73
§ 3.8 计算单元应变和应力·····	73
习题与思考题·····	74
第 4 章 等参单元 ·····	75
§ 4.1 概述·····	75
§ 4.2 等参数单元形状函数·····	76
§ 4.3 坐标变换·····	80
§ 4.4 平面四边形等参单元计算·····	82
§ 4.5 平面三角形等参单元计算·····	87
习题与思考题·····	92
第 5 章 非线性问题有限单元分析 ·····	94
§ 5.1 概述·····	94
§ 5.2 非线性问题的基本分析方法·····	94
§ 5.3 弹塑性问题的解法·····	99
§ 5.4 几何非线性问题求解·····	105
§ 5.5 双重非线性问题·····	107
习题与思考题·····	108
第 6 章 有限差分法 ·····	109
§ 6.1 概述·····	109
§ 6.2 有限差分法理论基础·····	110
§ 6.3 平面问题有限差分计算原理·····	111
§ 6.4 三维问题有限差分计算原理·····	116
习题与思考题·····	118

下篇 应用篇

第 7 章 ANSYS 建模方法与应用实例 ·····	121
§ 7.1 概述·····	121
§ 7.2 功能特色·····	125
§ 7.3 基本原理·····	126

§ 7.4 建模方法	126
§ 7.5 隧道开挖衬砌结构变形与受力计算分析	135
§ 7.6 基坑分步开挖过程支护受力与变形分析	159
习题与思考题	163
第 8 章 FLAC^{2D} 建模方法与应用实例	165
§ 8.1 概述	165
§ 8.2 程序简介	165
§ 8.3 本构模型	166
§ 8.4 建模方法	182
§ 8.5 解题技巧	191
§ 8.6 基坑土钉支护与预应力锚杆支护对比分析	200
§ 8.7 失稳加筋挡土墙加固力学效果分析	205
§ 8.8 受古滑面影响的自然边坡稳定性分析	213
习题与思考题	216
第 9 章 FLAC^{3D} 建模方法与应用实例	217
§ 9.1 概述	217
§ 9.2 程序简介	217
§ 9.3 基本原理	217
§ 9.4 建模方法	220
§ 9.5 解题技巧	234
§ 9.6 桩-土相互作用数值计算分析	237
§ 9.7 地铁车站明挖法施工稳定性分析	241
§ 9.8 双隧道盾构法施工安全评价分析	250
习题与思考题	257
第 10 章 UDEC 建模方法与应用实例	258
§ 10.1 概述	258
§ 10.2 程序简介	258
§ 10.3 基本原理	259
§ 10.4 建模方法	265
§ 10.5 受优势结构面控制的边坡变形效应分析	271
§ 10.6 节理化巷道掘进锚网喷支护效果分析	276
§ 10.7 深部隧道开挖围岩能量计算及主应力变化特征分析	284
习题与思考题	289
第 11 章 PFC 建模方法与应用实例	290
§ 11.1 概述	290

§ 11.2	程序简介·····	290
§ 11.3	基本原理·····	291
§ 11.4	建模方法·····	296
§ 11.5	岩土类试样双轴试验数值模拟分析·····	301
§ 11.6	土体压裂注浆流-固耦合数值试验分析 ·····	306
§ 11.7	半明半暗隧道开挖与支护过程分析·····	310
	习题与思考题·····	317
	参考文献·····	318

绪 论

§ 0.1 学习本课程的必要性

0.1.1 工程的复杂性

土木工程、采矿工程、石油工程、水利水电、国防、交通运输等工程领域涉及材料的多样性、力学环境的复杂性、几何形态的不规则性和介质性态的多元性,具体体现在:

- (1) 材料类型。包括岩石、土、混凝土、流体、支护构件。
- (2) 力学属性。包括弹性、塑形、黏性、流变性、各向异性。
- (3) 应力环境。包括水平、垂直,拉、压、剪、扭及其复合应力。
- (4) 几何形状。包括规则与不规则,直线与曲线,二维与三维等。
- (5) 介质性态。包括层状、块体、散体,连续、非连续等。

0.1.2 工程设计的要求

对于工程设计,应满足以下基本要求:

- (1) 功能需要。
- (2) 强度与稳定性要求。
- (3) 经济合理性要求。

为此,设计者和研究者必须对工程对象进行结构设计和强度校验,以及结构优化等,以满足工程的需要。

0.1.3 数值计算的必要性

经典弹性力学计算只限于少数简单、规则的问题,可能获得解析解。但对大多数工程问题,特别是岩土工程问题,涉及的材料和边界条件复杂、多样且不规则,应用一般的材料力学、弹性力学、土力学、岩石力学和结构力学中的传统方法,无法在数学上获得解析解或者计算极其复杂。

1. 等围压硐室受力分析

如图 0.1 所示的圆形硐室在均质、等围压情况下,受力状态较简单,可以容易地得到围岩应力及位移的解析解。

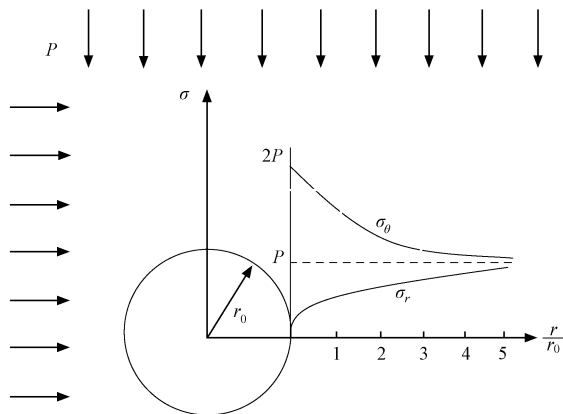


图 0.1 圆形洞室围岩受力分布

$$\sigma_r = P \left[1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right]$$

$$\sigma_\theta = P \left[1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right]$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

$$u_r = \frac{Pr_0^2}{2G} \frac{1}{r}$$

$$u_\theta = 0$$

式中： σ_r 为洞室围岩径向应力； σ_θ 为洞室围岩切向应力； $\tau_{r\theta}$ 为洞室围岩剪切应力； u_r 为洞室围岩径向位移； P 为围岩压力； r_0 为圆形洞室开挖半径； r 为围岩中任意点离开圆心的距离； G 为剪切模量。

当洞室形状、围岩应力状态和围岩性质发生变化时，解析解的方程形式将变得相当复杂，甚至无解析解。

2. 三角桁架受力分析

对于图 0.2 所示的简单桁架，由 $\sum F_x = 0$ ， $\sum F_y = 0$ ， $\sum M = 0$ ，分别列出①、②、③杆的力平衡方程，再求出各杆内的 σ 、 σ_w 等。当杆件的组合形式变化时（或者外荷施加方式变化），传统方法将极为繁琐，很难求解。因此，必须采用新的理论分析手段和计算方式，借助计算机这一强大计算工具进行求解。

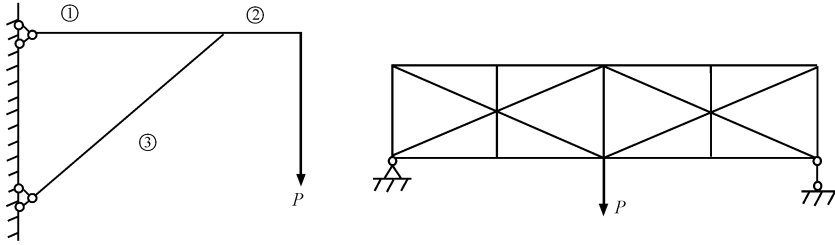


图 0.2 简单桁架分析

§ 0.2 有限单元法基本思想

首先,将复杂的结构体(求解域)假想成由有限个单元组成,每个单元只在“结点”处连接并构成整体(见图 0.3),求解过程是先建立每个单元的平衡方程(矩阵);然后,按单元间的连接方式组集成整体,形成整体方程组,再引入边界条件,求解整体方程组,最终获得原型在“结点”及“单元”内的未知量(位移或应力)。

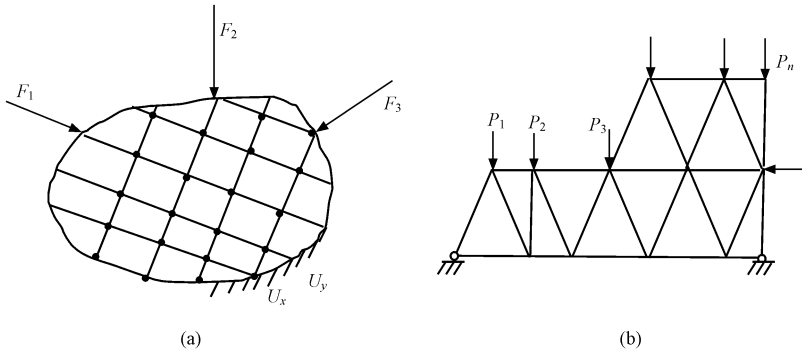


图 0.3 连续求解域离散化

有限单元法作为数值分析的方法有以下两个重要特点:

(1) 离散化。将连续的求解区域离散为一组有限个且按一定方式相互联结在一起的单元组合体。由于单元能按不同的联结方式进行组合,且单元本身又可以有不同的形状和力学性质,因此,可以将模型划分成几何形状复杂、力学性质各异的求解域,即有限单元的含义。

(2) 数值解。利用在每一个单元内假设的近似函数来分片地表示求解域上待求的未知场函数。单元内的近似函数通常由未知场函数式及其导数在单元的各个结点的数值和插值函数表示。这样,在一个问题的有限单元分析中,未知场函数式及其导数在各个结点上的数值就成为新的未知量(自由度),从而使一个连续的无

限自由度问题变成离散的有限自由度问题。一经求解这些未知量,就可以通过插值函数计算出各个单元内场函数的近似值,从而得到整个求解域上的近似解,即数值解的含义。

下面介绍一下有限单元法的分析过程。

1) 离散化

将待分析的连续体(或杆系)用一些假想的线或面进行划分,使其成为具有选定形状的有限个单元体(注:每个单元体可以有不同的形状和力学性质)。

这些单元体被认为只有在结点处相互连接,这些点又被称为结点。从而用单元的集合体代替原结构体或连续体。

取每个单元的若干结点作为基本未知量,即

$$\{u\}^e = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \dots]^T \quad (0.1)$$

2) 选取位移模式

为了对任意单元特性进行分析,必须对该单元中任意一点的位移分布作出假设,即在单元内建立位移模式或位移函数:

$$\{f\} = [N]\{u\}^e \quad (0.2)$$

式中: $[N]$ 为形态函数(或形函数矩阵); $\{u\}^e$ 为单元结点位移矩阵。

注意:位移函数假设的合理与否,直接影响有限单元分析的计算精度、效率和可靠性。

目前,常采用多项式位移模式,原因是其微积分运算比较简单,从泰勒级数展开的角度来说,任何光滑函数都可以用无限项的泰勒级数多项式展开。

位移模式是建立单元特性的核心内容。为使位移模式尽可能地反映物体中的真实位移形式,应满足:

- (1) 能反映单元的刚体位移。
- (2) 能反映单元的常量应变。

} 完备性条件

- (3) 尽可能地反映位移的连续性。 ——协调性条件

即在单元间,除了结点处有共同的结点位移外,还应尽可能反映单元间边界上位移的连续性。

3) 由几何方程建立单元内部的应变矩阵

$$\{\epsilon\} = [L]\{u\} = [L][N]\{u\}^e = [B]\{u\}^e \quad (0.3)$$

记为

$$[B] = [L][N] \quad (\text{称为单元应变矩阵或几何矩阵})$$

4) 根据物理方程建立单元内的应力矩阵

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} = [D][B]\{u\}^e = [S]\{u\}^e \quad (0.4)$$

记为

$$[S] = [D][B] \quad (\text{称为应力矩阵})$$

5) 根据虚功原理求出单元上的结点力

$$\{F\}^e = [k]\{u\}^e \quad (0.5)$$

式中: $[k]$ 为单元刚度矩阵, 即

$$\{k\} = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV$$

6) 应用虚功原理将单元上的载荷等效变换成为结点载荷

$$\{Q\}^e = [N]^T \{P\} = \int_{\Gamma_\sigma} [N]^T [\bar{P}] dS + \int_{V_e} [N]^T \{\bar{F}\} dV \quad (0.6)$$

式中: $\{Q\}^e$ 为单元结点载荷列阵; $\{P\}$ 为作用在单元上的集中力; $[\bar{P}]$ 为作用在单元上的面力; $\{\bar{F}\}$ 为作用在单元上的体力。

7) 对每个结点(i)建立平衡方程式

$$\sum_e \{F_i\} = \sum_e \{Q_i\} \quad (0.7)$$

8) 联立所有结点的方程得总体平衡方程式

$$[K]\{U\} = \{R\} \quad (0.8)$$

式中: $[K]$ 为总体刚度矩阵; $\{U\}$ 为总体位移列阵; $\{R\}$ 为整体结构的结点载荷列阵。

9) 引入边界条件修正整体平衡方程及总体刚度矩阵

位移法求解遇到的边界条件有以下两类。

(1) 位移边界条件。

可将已知位移条件

$$u|_{\Gamma_u} = \bar{u}(u, v, w) \quad (\text{在 } \Gamma_u \text{ 上}) \quad (0.9)$$

直接转化为位移约束条件, 即

$$u = \bar{u}(u, v, w)_i \quad (\text{在 } \Gamma_u \text{ 上}) \quad (0.10)$$

(2) 面力边界条件。

将每个单元的面力边界条件转化为单元结点上的等效载荷, 即按式(0.6), 化面力为结点等效载荷。

$$\{Q\}^e = \int_{\Gamma_\sigma} [N]^T \{\bar{P}\} dS$$

10) 求解总方程组获得单元、结点未知量

(1) 由式(0.8)求出结点位移 $\{U_i\}$ ($i=1, 2, \dots, N$)。

(2) 由式(0.3)求出单元应变 $\{\epsilon_i\}$ ($i=1, 2, \dots, n$)。

(3) 由式(0.4)求出各单元的应力 $\{\sigma_i\}$ ($i=1, 2, \dots, n$)。

(4) 根据应力或应变大小, 判断单元是否破坏。

§ 0.3 有限单元法发展概况

从经典结构力学派生出来的结构矩阵分析方法很早就用于结构工程的复杂刚架体系的力学分析。1943年, Courant 第一个假设翘曲函数在一个人为划分的三角形单元集合体的每个单元上为简单的线性函数, 求得了 St. Venant 扭转问题近似解, 从而提出有限单元法的基本思想。

1956年, Turner、Clough 等在进行飞机结构分析时完善和发展了有限单元法: 将结构矩阵位移法的原理和方法推广应用于弹性力学平面问题, 将一个弹性连续体假想地划分为一系列三角形(单元), 将每个单元角点的位移作为优先解决的未知量, 在满足一定条件的情况下, 对整个求解域构造分片连续的位移场, 使建立位移场困难的问题得到解决。他们的研究工作成为有限单元法的第一个成功尝试。之后, 单元结点力和结点位移之间单元特性问题(单元刚度矩阵)也获得了解决, 用三角形单元可求得平面应力问题的近似解。

早期的有限单元法建立在虚位移原理或最小势能原理的基础上, 有清晰的物理概念, 但由于受当时计算技术的制约, 这种方法还难以应用到工程实际, 应用上有很大的局限性。到 20 世纪 60 年代以后, 随着计算机硬件技术和计算理论的飞速进步, 有限单元法也得以逐步完善和提高, 在计算方法和实用性方面都获得了长足的发展。

1960年, Clough 进一步处理了平面弹性问题, 并第一次提出了“有限单元法”(finite element method, FEM)的名称。

1963~1964年, Besseling、Melosh 等基于变分原理, 建立了更为灵活、适应性更强、计算精度更高的有限单元法。新的有限单元模型——混合元、杂交元、非协调元、广义协调元等相继出现。

20 世纪 60 年代末, 建立了基于加权余量的有限单元法。此外, 网格划分的自动化、自适应得到基本解决, 并且分析对象的范围、适用的领域极大地扩展。

- (1) 从静力分析推广到动力分析、稳定问题及波动问题。
- (2) 从杆系分析推广到连续或非连续平面、空间、板壳问题。
- (3) 从线弹性材料推广到弹塑性、黏弹性、黏塑性材料分析。
- (4) 从固体力学推广到流体力学、传热学、电磁学等。
- (5) 从正分析推广到反分析。

除此之外, 还从单纯结构力学计算推广到优化设计、工程预测; 从航空领域推广到机械、水电、交通、采矿、土木、生物、医学等。可见, 有限单元法作为一种具有坚实的理论基础并且广泛有效的数学力学分析手段, 将在各学科领域发挥巨大的作用。

§ 0.4 数值计算方法的分类

0.4.1 数值计算方法分类

这里所说的数值计算方法是指以求解域的离散化为特征的计算方法,其复杂程度决定了求解需在计算机上实现。数值计算方法主要包括确定性分析方法和非确定性方法。

1. 确定性分析方法

确定性分析方法主要包括连续介质分析方法和非连续介质分析方法。连续介质分析方法主要有有限单元法(finite element method, FDM, 如 ANSYS、NAS-TRAN、SAP、ADINA、LUSYS、3D-Sigma、ABAQUS、ALGOL、PKPM 等程序)、边界元法(boundary element method, BEM)、有限差分法(finite difference method, FDM, 如 FLAC 程序)、无单元法(element-free method)等。非连续介质分析方法主要有离散元法(discrete element method, DEM, 如 UDEC 程序)、关键块体法(key block)、颗粒元法(particle flow code, PFC, 如 PFC 程序)、不连续变形分析法(discontinuous deformation method, DDA),以及能够模拟和追踪材料断裂的流形元法(manifold element method, MEM)等。

(1) 有限单元法。在 20 世纪 70 年代发展较快。有限单元法的理论基础是虚功原理和基于最小势能的变分原理,它将研究域离散化,对位移场和应力场的连续性进行物理近似。主要采用区域变分的方式,在每一小单元中确定形函数和变形模式,进行离散化处理,建立刚度矩阵,引入边界条件求解。有限单元法适用性广泛,从理论上讲对任何问题都适用,但计算速度相对较慢。特别是在解算高度非线性问题时,需要多次迭代求解。近年来,随着高性能计算机的问世和并行算法的出现,以及采用 GPU 代替 CPU 计算模式,计算精度和速度都有了很大的提高和改善。

(2) 有限差分法。有限差分法可能是解算给定初值和(或)边值微分方程组的最古老数值方法。在有限差分法中,基本方程组和边界条件(一般均为微分方程)近似地改用差分方程(代数方程)来表示,即由空间离散点处的场变量(应力、位移)的代数表达式代替。这些变量在单元内是非确定的,从而把求解微分方程的问题改换成求解代数方程的问题。该方法适合求解非线性大变形问题,在岩土力学计算中有广泛的应用。

有限差分法和有限单元法都产生一组待解方程组。尽管这些方程是通过不同方式推导出来的,但两者产生的方程是一致的。另外,有限单元程序通常要将单元

矩阵组合成大型整体刚度矩阵,而有限差分则无需如此,因为它相对高效地在每个计算步重新生成有限差分方程。在有限单元法中,常采用隐式、矩阵解算方法,而有限差分法则通常采用“显式”、时间递步法解算代数方程。

20 世纪 80 年代以来,有限差分方法在岩土工程计算中应用得很广泛,其中以 FLAC 软件为代表。Fairhurst 教授认为 FLAC 在岩土力学研究中最有前途的。FLAC 采用显示快速拉格朗日算法获得模型全部运动方程(包括内变量)的时间步长解,根据计算对象的形状,将计算区域划分成离散网格,每个单元在外载和边界约束条件下,按照约定的线性或非线性应力-应变关系产生力学响应,非常适合计算岩石力学和岩土工程问题,包括:①边坡稳定;②地基基础;③采矿与隧道开掘;④岩体和土体锚固;⑤重力坝;⑥地震和岩爆、爆破动力响应;⑦地下渗流;⑧热力效应。

(3) 边界元法。它在 20 世纪 80 年代发展较快。边界元法的理论基础是 Betti 功互等定理和 Kelvin 基本解,它只要离散求解域的边界,因而得到离散代数方程组中的未知量也只是边界上的量。边界元法化微分方程为边界积分方程,离散划分少,可以考虑远场应力,有降低维数的优点,可以用较少的内存解决较大的问题,便于提高计算速度。边界元法分直接法和间接法,其关键要预先知道基本解,主要用于小边界和大的半无限问题,如巷道、地基问题,但是在求解非均匀、非线性问题时,需要在域内补划网格。

(4) 离散元法。离散元法的理论基础是牛顿第二定律($F=ma$ 和 $M=I\ddot{\theta}$)并结合不同的本构关系,适用对非连续体如岩体问题求解。该方法利用岩体的断裂面进行网格划分,每个单元就是被断裂面切割的岩块,视岩块的运动主要受控于岩体节理系统。它采用显式求解的方法,按照块体运动、弱面产生变形,变形是接触区的滑动和转动,由牛顿定律、运动学方程求解,无需形成大型矩阵而直接按时步迭代求解,在求解过程中允许块体间开裂、错动,并可以脱离母体而下落。离散元法对破碎岩石工程,动态和准动态问题能给出较好解答。

(5) 颗粒元法。颗粒流方法是通过离散单元方法来模拟圆形颗粒介质的运动及其相互作用,它采用数值方法将物体分为有代表性的多个颗粒单元,通过颗粒间的相互作用来表达整个宏观物体的应力响应,从而利用局部的模拟结果来计算颗粒群体的运动与应力场特征。

(6) 不连续变形分析法。该方法是并行于有限单元法的一种方法,其不同之处是可以计算不连续面的位错、滑移、开裂和旋转等大位移的静力和动力问题。此方法在岩石力学中的应用备受关注。

(7) 流形元法。该方法是运用现代数学“流形”(manifold)的有限覆盖技术所建立起来的一种新的数值方法。有限覆盖是由物理覆盖和数学覆盖所组成的,它可以处理连续和非连续的问题,在统一解决有限单元法、不连续变形分析法和其他

数值方法的耦合计算方面,有重要的应用前景。

(8) 无单元法。该方法是一种不划分单元的数值计算方法,它采用滑动最小二乘法所产生的光滑函数去近似场函数,而且又保留了有限单元法的一些特点。它只要求结点处的信息,而不需要也没有单元的信息。无单元法可以求解具有复杂边界条件的边值问题,如开裂问题,只要加密离散点就可以跟踪裂缝的传播。它在解决岩石力学非线性、非连续问题等方面具有重要价值和发展前景。

(9) 混合法。对于复杂工程问题,可采用混合法,即有限单元法、边界元法、离散元法等两两耦合来求解。

(10) 其他方法。加权残数法、半解析法、反分析法、无限元法、有限单元线法、颗粒流法、微分流形法等。

2. 非确定性方法

非确定性方法主要有以下六种非确定性方法。

(1) 模糊数学方法。模糊理论用隶属函数代替确定论中的特征函数描述边界不清的过渡性问题,模糊模式识别和综合评判理论对多因素问题分析适用,如岩土工程环境评价、岩土(体)分类、强度预报等。

(2) 概率论与可靠度分析方法。运用概率论方法分析事件发生的概率,进行安全和可靠度评价。对岩土力学而言,包括岩石(土)稳定性判断、强度预测预报、工程可靠度分析、顶板稳定性分析、地震研究、基础工程稳定性研究等。

(3) 灰色系统理论。以“灰色、灰关系、灰数”为特征,研究介于“黑色”(完全未知系统)和“白色”(已知系统)之间事件的特征,在社会科学及自然科学领域应用广泛。岩土力学中,用灰色系统理论进行岩体分类、滑坡发生时间预测、岩爆分析与预测、基础工程稳定性、工程结构分析,用灰色关联度分析岩土体稳定性因素主次关系等。

(4) 人工智能与专家系统(决策支持系统,包括知识工程、模式识别等)。应用专家的知识(经验提取)进行知识处理、知识运用、搜索、不确定性推理分析复杂问题并给出合理的建议和决策。岩石力学中,可进行如岩土(石)分类、稳定性分析、支护设计、加固方案优化等研究。

(5) 神经网络方法。试图模拟人脑神经系统的组织方式来构成新型的信息处理系统,通过神经网络的学习、记忆和推理过程(主要是学习算法)进行信息处理。岩石力学中,用于各种岩土力学参数分析、地应力处理、地压预测、岩土分类、稳定性评价与预测等。此方法曾用于三峡船闸区地应力分析处理。

(6) 时间序列分析法。通过对系统行为的涨落规律统计,用时间序列函数研究系统的动态力学行为。岩石力学中,用于矿压显现规律研究、岩石蠕变、岩石工程的位移、边坡和硐室稳定性(长期变形、长期强度)等、基础工程中降水、开挖、沉

降变形等与时间相关的问题。

0.4.2 有限单元法求解分类

有限单元法求解有以下三种基本方法。

(1) 位移法。以单元结点位移作为基本未知量的方法,主要采用最小势能原理或虚功原理建立计算模式。

(2) 力法。以单元结点力作为基本未知量,常采用最小余能原理进行分析。

(3) 混合法。以一部分结点位移和一部分结点力作为未知量的分析方法。

本书以讲授有限单元法为主,介绍有限单元法的基本理论框架和解算流程,其他方法只作一般性地介绍。

§ 0.5 学习要求和方法

本书分基础篇和应用篇。基础篇主要讲授有限单元法的基本原理,有限差分方法只做一般性介绍。应用篇从建模方法和应用分析两个方面重点介绍了目前广泛使用的岩土工程数值计算分析软件,包括有限单元法 ANSYS、有限差分法 FLAC^{2D} 和 FLAC^{3D}、离散单元法 UDEC、颗粒元法 PFC 的基本使用和建模方法,并给出典型工程应用实例。读者可以根据计算对象的几何与力学特点,有选择地学习和使用相关软件。

初学者应具备线性代数、弹性力学、结构力学、岩土力学等知识和计算机应用能力。学习完成后,应能够独立建立有限单元基本方程,熟悉求解步骤、边界条件,了解数值方法的基本原理和过程:建模、求解和结果输出。

习题与思考题

1. 数值计算的特点是什么?
2. 数值计算有哪些方法? 其适用条件是什么?
3. 有限单元法的基本思想是什么?
4. 简述连续弹性体有限单元计算方法的基本过程。

上 篇
基 础 篇

第 1 章 弹性力学基本方程及虚位移原理

§ 1.1 概 述

1.1.1 材料力学解决应力计算问题的思路

- (1) 在大量宏观实验观察的基础上,作出如平截面假定等的假设。
- (2) 在假设(1)基础上解决杆件的变形(应变)计算。
- (3) 根据应力与应变关系(胡克定律),获得应力的变化规律。
- (4) 利用平衡条件获得应力计算公式。

1.1.2 弹性力学解题思路与方法

弹性力学也是研究弹性变形体受力变形的学科,与材料力学的主要区别在于:

(1) 除保留均匀、连续、各向同性、小变形假设外,放松了某些从宏观观察作出的人为假定。

(2) 从变形体中取出微元体,进行平衡分析,建立平衡微分方程。

(3) 从变形体中线段和互相垂直两线段间夹角的改变进行分析,建立应变和位移之间的几何方程。

(4) 利用广义胡克定律,建立应力和应变之间关系的物理方程(也称本构关系)。

(5) 从上述方程出发,在满足给定的变形体边界受力、位移条件的基础上,进行数学求解(称偏微分方程的边值问题),获得变形体的受力和变形解答。

由于弹性力学的思路放松了人为假定,因此,求解结果更符合实际,但求解时所用的数学方法(数学物理方程)更为复杂。

总之,研究线弹性体的问题,要建立微元体的平衡条件、几何关系、应力应变关系并满足边界条件等,形成的这些方程统称为“弹性力学的基本方程”。

§ 1.2 弹性力学基本方程

设弹性体 V 受体力作用(见图 1.1), $\bar{F} = [\bar{F}_x \quad \bar{F}_y \quad \bar{F}_z]^T$, 它的整个边界 Γ 可

以分成已知面力边界 Γ_σ 和已知位移边界 Γ_u 两个部分: 在 Γ_σ 上有给定面力 $\bar{p} = [\bar{p}_x \quad \bar{p}_y \quad \bar{p}_z]^T$; 在 Γ_u 上有给定位移 $\{\bar{u}\} = [\bar{u} \quad \bar{v} \quad \bar{w}]^T$ 。

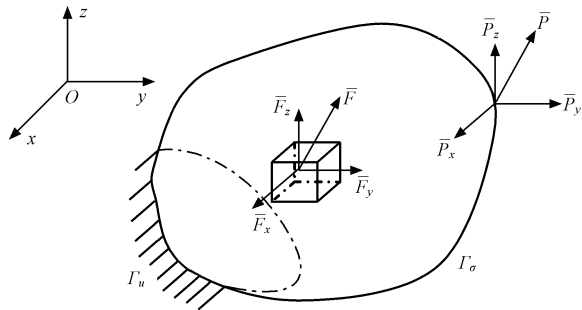


图 1.1 弹性体的受力与约束状态

(1) 在外力作用下, 弹性体的变形状态可用体内各点位移列阵 $\{u\}$ 表示:

$$\{u\} = [u \quad v \quad w]^T = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (1.1)$$

式中: $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$ 分别表示沿 x 、 y 、 z 轴方向的位移分量, 一般是坐标 (x, y, z) 的函数。

(2) 弹性体内的应力状态可用体内各点的应力列阵 $\{\sigma\}$ 表示:

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T \quad (1.2)$$

式中: σ_x 、 σ_y 、 σ_z 是正应力; τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 是剪应力。

其中单元体上一点的应力状态如图 1.2 所示。

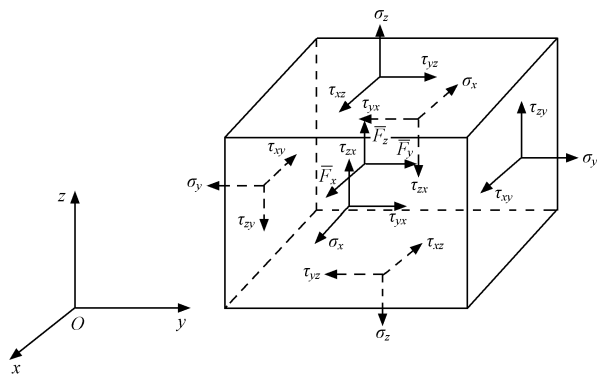


图 1.2 单元体的受力状态

根据剪应力互等原理, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, 故弹性体内共有六个独立的应力分量。

(3) 弹性体内任意点的应变状态可用列阵 $\{\epsilon\}$ 表示:

$$\{\epsilon\} = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T \quad (1.3)$$

式中: $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ 是线应变; $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 是剪应变。

对于处于平衡状态的受荷弹性体, ϵ - u 、 σ - ϵ 、 σ -(F, P) 存在一定的关系, 将这些关系统称为弹性力学的基本方程, 附加给定的边界条件, 构成求解弹性力学问题的基础。

1.2.1 应变-位移关系(ϵ - u , 几何方程)

在线弹性、小变形条件下, 应变和位移是线性关系。

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \epsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \epsilon_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned}$$

用矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

或简写成

$$\{\epsilon\} = [L]\{u\} \quad (1.4)$$

式中: $[L]$ 为拉普拉斯算子。

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T$$

1.2.2 应力-应变关系(σ - ϵ 物理方程)

对于线性各向同性材料, 由广义胡克定律可以给出弹性体任意点应力与应变之间的关系。

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \sigma_{xy} \\ \gamma_{yz} = \frac{2(1+\mu)}{E} \sigma_{yz} \\ \gamma_{zx} = \frac{2(1+\mu)}{E} \sigma_{zx} \end{array} \right.$$

式中: E 为弹性模量; μ 为泊松比。

用矩阵形式可简写成

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} \quad (1.5)$$

其中

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T \quad \{\epsilon\} = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T$$

式中: $[D]$ 称为弹性矩阵, 其表达式为

$$[D] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{对} \\ \text{称} \end{array} \quad (1.6)$$

1.2.3 应力和外力的平衡关系(σ - F 平衡方程)

对于体力作用时的情况, 在受载弹性体内取一微小六面体, 分析其受力情况如图 1.3 所示。据此可建立弹性体内力和外力的微分平衡方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \bar{F}_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \bar{F}_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \bar{F}_z = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

式中: $\{\bar{F}\} = [\bar{F}_x \quad \bar{F}_y \quad \bar{F}_z]^\top$ 是给定体力列阵。

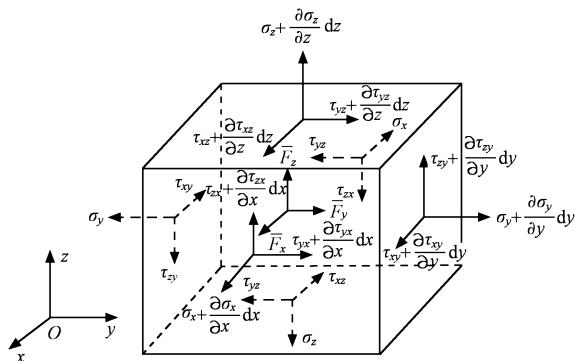


图 1.3 微小六面体的内力

对于承受面力的情况,另取三个垂直于坐标轴的平面形成如图 1.4 所示的四面体,作用在弹性体边界上的面力列阵 $\{P\} = [\bar{P}_x \quad \bar{P}_y \quad \bar{P}_z]^\top$ 和该处的应力之间有如下关系:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_x \\ \bar{P}_y \\ \bar{P}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{zx} \\ l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz} \\ l\tau_{zx} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

式中: l, m, n 分别为边界面外法线 n 与坐标轴 x, y, z 夹角的方向余弦。

若夹角分别为 α, β, γ , 则

$$\begin{cases} l = \cos \alpha \\ m = \cos \beta \\ n = \cos \gamma \end{cases}$$

另外,根据几何关系有

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

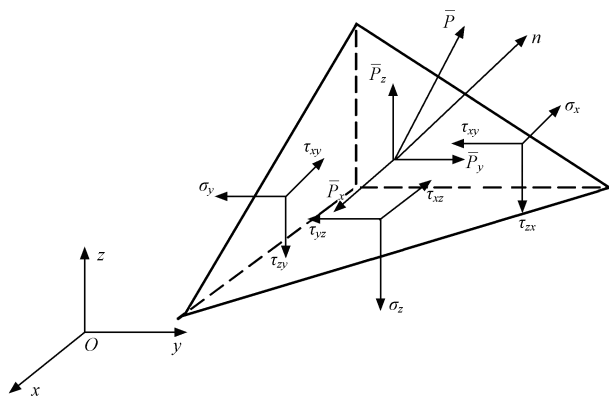


图 1.4 单元体的内力与外力

§ 1.3 两种平面问题

1.3.1 平面应力问题

如图 1.5 所示,平板中面与 z 轴垂直,受与中面平行、沿板厚均匀分布的外力作用,板的上下表面没有横向力,即

$$\sigma_z = 0 \quad \tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0$$

且 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 仅是 x 、 y 坐标的函数,与坐标 z 无关。这种问题称为平面应力问题。

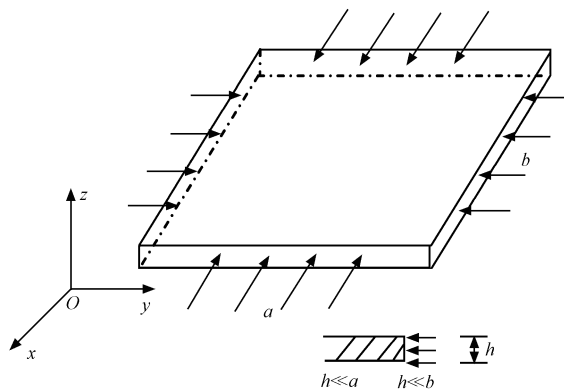


图 1.5 薄板模型

对于各向同性材料,平面应力问题的应力-应变关系为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

或简写成

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}$$

1.3.2 平面应变问题

假设有一很长的坝体(见图 1.6),取 xOy 坐标面与坝体的横截面平行。若平行于 xOy 平面的外力沿坝体长轴(z 轴)不变,则可以认为坝体的各个横截面处于同样的应变状态,对于假定的无限长坝体,各横截面沿纵向位移为 0,即

$$\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

这种问题称为平面应变问题。

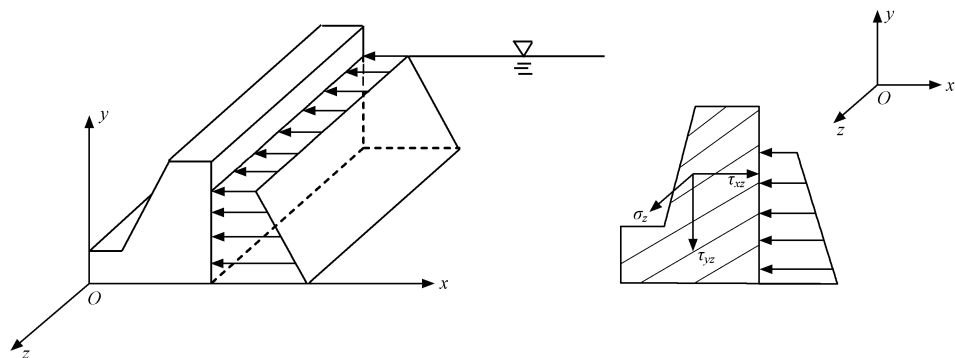


图 1.6 坝体模型及其受力状态

对于各向同性材料,平面应变问题的应力-应变关系为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

在式(1.10)中,若令 $E_1 = E/(1-\mu^2)$, $\mu_1 = \mu/(1-\mu)$,则可以得到用 E_1 、 μ_1 表示的与平面应力问题形式相同的应力-应变关系。只是 E_1 、 μ_1 与 E 、 μ 不同而已。因此,以 E_1 、 μ_1 代替式(1.9)的 E 、 μ ,就可得到平面应变问题的应力-应变关系。

另外,两种平面问题的几何方程和平衡方程相同。其中,几何方程为

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [L] \{u\}$$

对于平面应变问题, $\sigma_z \neq 0$, 由广义胡克定律, 得

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$$

两类平面问题有很广泛的用途, 许多实际工程问题(见图 1.7)都可以简化成平面问题, 大大减少了计算工作量, 且结果与实际情况相似。

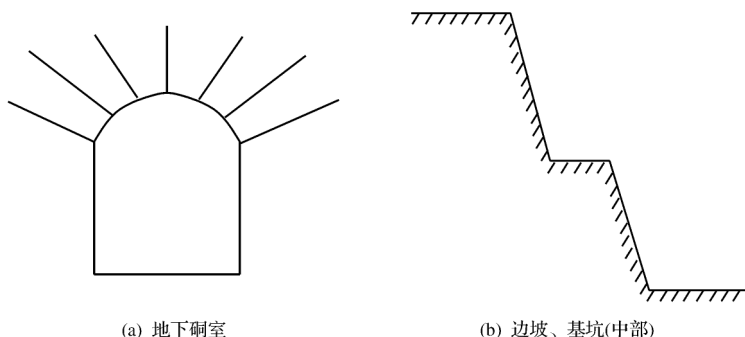


图 1.7 岩土工程简例

§ 1.4 虚位移原理

弹性体的有限单元方程一般采用由变分法导出的能量原理来建立。对于位移法有限单元方程, 通常采用最小势能原理与等价的虚位移原理来建立。

1.4.1 虚位移原理

虚位移是指一种约束允许的无限微小的可能位移, 它在弹性体内是连续的, 在边界上满足位移边界条件。如果弹性体在外力作用下处于平衡状态, 则从任何平衡位置开始的虚位移, 外力在其上所做的虚功(δW)等于该虚位移在弹性体内所引起的虚应变能(δU); 反之, 若有虚功等于虚应变能, 则该弹性体在外力作用下是平衡的, 这就是虚位移原理。

将虚位移原理用数学形式表示, 得到虚功方程

$$\delta U = \delta W \quad (1.11)$$

式中: δW 是外力(包括体力 $\bar{F}_x$ 、 $\bar{F}_y$ 、 $\bar{F}_z$ 和面力 $\bar{P}_x$ 、 $\bar{P}_y$ 、 $\bar{P}_z$)在虚位移上做的虚功;

$$\delta W = \iiint_V (\bar{F}_x \delta u + \bar{F}_y \delta v + \bar{F}_z \delta w) dV + \iint_{\partial V_\sigma} (\bar{P}_x \delta u + \bar{P}_y \delta v + \bar{P}_z \delta w) dS \quad (1.12)$$

δU 是弹性体由于虚位移引起的虚应变能。

$$\delta U = \iiint_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV \quad (1.13)$$

虚位移在弹性体内引起的虚应变仍满足几何关系:

$$\begin{aligned} \delta \epsilon_x &= \frac{\partial \delta u}{\partial x} & \delta \gamma_{xy} &= \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y} \\ \delta \epsilon_y &= \frac{\partial \delta v}{\partial y} & \delta \gamma_{yz} &= \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial z} \\ \delta \epsilon_z &= \frac{\partial \delta w}{\partial z} & \delta \gamma_{zx} &= \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.14)$$

可以证明: $\delta U - \delta W = 0$ 或 $\delta U = \delta W$ (略)。

结论: 对于任何从平衡位置开始的虚位移, 都有虚功等于虚应变能。

$$\begin{aligned} \delta U - \delta W &= - \iiint_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{F}_x \right) \delta u + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \bar{F}_y \right) \delta v \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \bar{F}_z \right) \delta w \right] dV + \int \int_{\partial \Gamma_\sigma} [(\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n - \bar{P}_x) \delta u \\ &\quad + (\tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n - \bar{P}_y) \delta v + (\tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n - \bar{P}_z) \delta w] ds \end{aligned} \quad (1.15)$$

式(1.15)说明: $\delta U = \delta W$ 与平衡方程和面力边界条件是等价的。由此说明: 这个变形状态就是弹性体在外力作用下的平衡状态。

虚功方程的矩阵表达式(由 $\delta U = \delta W$ 导出)为

$$\iiint_V \{\delta \epsilon\}^T \{\sigma\} dV = \iiint_V \{\delta u\}^T \{\bar{F}\} dV + \iint_{\partial \Gamma_\sigma} \{\delta u\}^T \{\bar{P}\} dS \quad (1.16)$$

式中: $\{\delta \epsilon\}$ 是虚应变列阵, $\{\delta \epsilon\} = [\delta \epsilon_x \quad \delta \epsilon_y \quad \delta \epsilon_z \quad \delta \gamma_{xy} \quad \delta \gamma_{yz} \quad \delta \gamma_{zx}]^T$; $\{\delta u\}$ 是虚位移列阵, $\{\delta u\} = [\delta u \quad \delta v \quad \delta w]^T$; $\{\sigma\}$ 是应力列阵, $\{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T$; $\{\bar{F}\}$ 是体力列阵, $\{\bar{F}\} = [\bar{F}_x \quad \bar{F}_y \quad \bar{F}_z]^T$; $\{\bar{P}\}$ 是面力列阵, $\{\bar{P}\} = [\bar{P}_x \quad \bar{P}_y \quad \bar{P}_z]^T$ 。

1.4.2 平面问题的虚功方程

1. 平面应力问题

如图 1.8 所示, 设有一平板, 面积为 A , 围边界 ∂A 被划分为 ∂A_σ 、 ∂A_u 两个部分, 在 ∂A_σ 上给定面力, 列阵形式为

$$\{\bar{P}\} = [\bar{P}_x \quad \bar{P}_y]^T \quad (1.17)$$

在 ∂A_u 上给定位移, 列阵形式为

$$\{\bar{u}\} = [\bar{u} \quad \bar{v}]^T \quad (1.18)$$

板内有与板面平行的体力为

$$\{\bar{F}\} = [\bar{F}_x \quad \bar{F}_y]^T \quad (1.19)$$

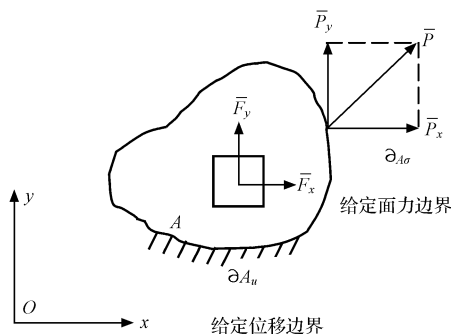


图 1.8 弹性体体力、面力与边界条件

虚功方程为

$$\delta U = \delta W$$

或写为

$$\iint_A \{\delta \epsilon\}^T \{\sigma\} t dA = \iint_A \{\delta u\}^T \{\bar{F}\} t dA + \int_{\partial A_\sigma} \{\delta u\}^T \{\bar{P}\} t ds \quad (1.20)$$

式中, $\{\delta \epsilon\}$ 为虚应变列阵, $\{\delta \epsilon\} = [\delta \epsilon_x \quad \delta \epsilon_y \quad \delta \tau_{xy}]^T$; $\{\delta u\}$ 为虚位移列阵, $\{\delta u\} = [\delta u \quad \delta v]^T$; t 为板的厚度。

将材料的应力应变关系 $\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}$ 代入式(1.20), 得

$$\iint_A \{\delta \epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} t dA = \iint_A \{\delta u\}^T \{\bar{F}\} t dA + \int_{\partial A_\sigma} \{\delta u\}^T \{\bar{P}\} t ds \quad (1.21)$$

式(1.21)即是平面应力问题的虚功方程, 也是位移法有限元方程的力学基础和理论依据。

2. 平面应变问题

对于平面应变问题, 虚功方程的形式和式(1.21)相同, 只要把平面应变状态的弹性系数矩阵式(1.6)代入式(1.21)即可。也就是用 $E_1 = E/(1 - \mu^2)$ 、 $\mu_1 = \mu/(1 - \mu)$ 代替式(1.21) $[D]$ 矩阵中的 E 和 μ 。

以上归结为有限单元方法的弹性力学基础。

1.4.3 弹性力学问题的解题过程

几何方程 $\{\epsilon\} = [L]\{u\}$

物理方程 $\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}$