电 动 力 学 题 解

林璇英　张之翔 编著

科 学 出 版 社
1999

内 容 简 介

本题解与目前的教学大纲密切配合，分电磁现象的普遍规律、静电场和静磁场、电磁波的传播、电磁波的辐射、狭义相对论、带电粒子与电磁场的相互作用等六章，包含了246道习题和解答；其中有基本题、典型题、较难的题与联系实际的题。在题解中，既注重物理上的分析，也注意数学演算。有些题还给出了不同解法，甚至几种解法；并加以讨论。本书还收入了国内硕士、博士研究生入学试题和1979~ 1988年间李政道教授主持的中国赴美物理研究生考试（CUSPEA）的有关试题。

图书在版编目(CIP)数据

电动力学题解/林璇英等编著. -北京：科学出版社，1999.8
ISBN 7-03-007129-8

Ⅰ.电… Ⅱ.林… Ⅲ.电动力学-高等学校-解题 Ⅳ.0442-44

中国版本图书馆CIP数据核字（98）第34279号

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717

印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1999年8月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1999年8月第一次印刷 印张：17
印数：1—2 500 字数：459 000

定价：35.00元

序

电动力学是研究电磁场的基本性质、运动规律以及它与物质相互作用的一门学科。由于它的重要性，目前我国高等学校理科、工科和师范院校等的物理类专业，都开设了电动力学课，而且是一门重要的基础理论课。为了配合这门课，国内出版了多种电动力学教材供选用。但作为这门课程参考书的电动力学习题解，却很少出版。我们有鉴于此，在多年教学经验的基础上，编写了这本《电动力学题解》。为了与目前的教学大纲密切配合，我们按电磁现象的普遍规律、静电场和静磁场、电磁波的传播、电磁波的辐射、狭义相对论、带电粒子与电磁场的相互作用等六章内容，编写了 246 道习题和解答；其中有基本题、典型题、较难的题和联系实际的题。在题解中，既注重物理上的分析，也注意数学演算。有不少题还给出了不同解法，甚至几种解法；并在一些题解后附加讨论，以阐明有关的方方面面。

我们希望，本书不仅对学生学习电动力学有用，而且对他们考研究生也有用。所以在编写习题时，除了注重电动力学基础方面的习题外，也收入了一些国内硕士、博士研究生的入学试题，而且还收入了 1979~ 1988 年间李政道教授主持的中国赴美物理研究生考试（CUSPEA）的有关试题（共 24 题）。此外，我们还希望本书能为初教电动力学的教师提供一些参考资料，所以在许多题解里，将我们多年的教学经验和心得体会都写了进去。

为了方便读者，我们在书前面的目录里，写出了每个习题的标题；书后的附录给出了所需的数学知识，并列出了一些基本物理常数值。

本书编写完时，恰逢北京大学一百周年校庆。它作为我们在北京大学和汕头大学多年辛勤教学工作的一点成果，能作为于北

大一百年来各方面成就的汪洋大海中的涓滴，使我们感到欣慰。

汕头大学林揆训教授和王可达副教授参加了本书的部分工作。

由于我们的学识所限，不免会有不妥和错误之处，欢迎读者指教。

编　著

1998 年 5 月 4 日

目　录

序

第一章　电磁现象的普遍规律 …… 1

1.1　推导梯度、散度和旋度的表达式 …… 1

1.2　推导 $\nabla^2\varphi$ 的表达式 …… 2

1.3　证 $\nabla^2(uv)=v\nabla^2u+2\nabla u\cdot\nabla v+u\nabla^2v$ …… 3

1.4　证 $\int_V \mathrm{d}V\ \nabla\times f=\oint_S \mathrm{d}S\times f$ …… 4

1.5　证 $\int_S \mathrm{d}S\times\nabla\varphi=\oint_L \varphi\mathrm{d}l$ 和 $\oint_L (a\times r)\cdot\mathrm{d}l=\oint_S a\cdot\mathrm{d}S$ …… 5

1.6　错用斯托克斯公式 …… 6

1.7　证 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\int_V J(r',t)\mathrm{d}V'$ …… 6

1.8　证 $\nabla\times\left(\frac{m\times r}{r^3}\right)=-\nabla\left(\frac{m\cdot r}{r^3}\right)$ …… 7

1.9　圆柱电容器（CUSPEA 题） …… 9

1.10　导电介质内的电荷量密度 …… 10

1.11　由麦克斯韦方程导出电荷守恒定律 …… 10

1.12　证 $\rho_{\mathrm{P}}=\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}-1\right)\rho$ …… 11

1.13　平行板电容器（CUSPEA 题） …… 11

1.14　磁单极（CUSPEA 题） …… 13

1.15　盖革记数器（CUSPEA 题） …… 16

1.16　带有电荷和磁荷的粒子（CUSPEA 题） …… 19

1.17　永磁体的磁场（CUSPEA 题） …… 26

1.18　带电粒子在静电场中的运动 …… 28

1.19 电子在 $E \perp B$ 的场中运动的轨迹 …… 29
1.20 电子在 $E \perp B$ 的场中运动 …… 30
1.21 电力线与介质交界面的夹角 …… 32
1.22 电流密度 J 的边值关系 …… 34
1.23 E 穿过电偶极层时连续 …… 35
1.24 进入载流导线的 $S = E \times H$ …… 35
1.25 同轴电缆传输的功率 …… 36
1.26 电偶极子在外电场中受的力 …… 38
1.27 电偶极子在外电场中受的力矩 …… 38
1.28 两电偶极子间的电势能和作用力 …… 39
1.29 δ 函数的电荷所产生的电势 …… 44
1.30 电偶极子的 φ 和 E …… 44
1.31 斜置电偶极子的 φ 和 E …… 46
1.32 原点外的电偶极子的 φ 和 E …… 48
1.33 一段直线电荷的 φ …… 50
1.34 基态氢原子的 φ 和 E …… 51
1.35 基态氢原子电子云的静电能 …… 53
1.36 电荷分布在外电场中的电势能 …… 54
1.37 平行输电线的 A 和 B …… 55
1.38 圆环电流的 A 和 B …… 57
1.39 均匀圆盘电荷旋转时的 A 和 B …… 62
1.40 均匀球体电荷旋转时的 A 和 B …… 64
第二章 静电场和静磁场 …… 67
2.1 由已知电势求电荷分布 …… 67
2.2 证明无电荷处电势不能为极值 …… 68
2.3 平行板电容器中的电势 …… 70
2.4 由电荷分布求电势 …… 71
2.5 平行导体板间有带电线，求电势 …… 72
2.6 长方形空间给定边界条件，求电势 …… 74
2.7 无限长矩形空腔内的电势 …… 76

2.8 导体球放入外电场中，求电势等 …… 78
2.9 导体球放入外电场中（CUSPEA 题） …… 82
2.10 介质球放入外电场中，求电势等 …… 83
2.11 驻极体球的电势 …… 88
2.12 介质内球形空腔中的电势 …… 89
2.13 导体球壳内有电偶极子，求电势 …… 91
2.14 介质球中心有电偶极子，求电势 …… 93
2.15 金属球壳间两半不同介质，求电势 …… 96
2.16 导体半球放在带电导体平面上 …… 99
2.17 地面电场拉起导体半球的条件…… 101
2.18 电解液中有导体球，求电流分布…… 101
2.19 球面两半电势不同，求球内外电势…… 105
2.20 两共顶圆锥面电势不同，求电势等…… 109
2.21 均匀带电圆环的电势…… 111
2.22 均匀带电圆盘的电势…… 119
2.23 轴线上的电势等于柱面电势的平均…… 121
2.24 球心的电势等于球面电势的平均…… 123
2.25 导体圆柱横放在外电场中，求电势…… 125
2.26 介质圆柱横放在外电场中，求电场…… 127
2.27 介质圆柱横放在外电场中，求电势…… 129
2.28 带电导体圆柱外一半真空一半介质…… 131
2.29 导体圆筒两半电势不同，求电势…… 135
2.30 导体平面外一点电荷，求电势等…… 136
2.31 导体平面外一电偶极子，求电场等…… 139
2.32 电偶极子在导体平面外受的力…… 141
2.33 两平行导线间单位长度的电容…… 144
2.34 导体平面与平行导线间的电容…… 150
2.35 导体球外有一点荷，求电势等…… 152
2.36 导体球形空腔内一点电荷，求电势…… 156
2.37 金属球壳内外点电荷之间的库仑力…… 158

2.38 球形放电器击穿电压的近似值…… 160
2.39 半无限大介质外一点电荷，求电势…… 162
2.40 电荷球对称分布时的 P 和 Q …… 165
2.41 电荷轴对称分布时的 P 和 Q …… 166
2.42 电荷分布在一段直线上，求电势…… 168
2.43 一段线电荷对中点和端点的 P 和 Q …… 169
2.44 均匀带电圆环在远处的电势…… 172
2.45 带电圆环的电偶极矩和电四极矩…… 174
2.46 由电四极矩的电势求电场强度…… 175
2.47 线性电四极子的电势…… 176
2.48 平面电四极子的电势…… 179
2.49 平面电四极子斜置时的电四极矩…… 184
2.50 球面电荷旋转时的磁场…… 185
2.51 介质球放入外磁场中，求磁场…… 190
2.52 介质球放入外磁场中（CUSPEA 题） …… 193
2.53 均匀磁化球的 φ_m 和 B …… 198
2.54 均匀磁化球的 A 和 B …… 200
2.55 中子星磁场的极限值…… 205
2.56 铁磁球放入磁介质中，求磁场等…… 207
2.57 介质圆柱横向磁化时的磁场…… 210
2.58 磁棒在远处产生的磁场…… 212
2.59 有限长载流螺线管的磁场…… 213
2.60 介质圆柱横放在外磁场中，求磁场…… 215
2.61 两磁偶极子的平衡位置…… 217
第三章 电磁波的传播…… 219
3.1 均匀介质中麦克斯韦方程的两组解 …… 219
3.2 由平面单色波的 E 求 H 、w 和 S …… 220
3.3 两个线偏振的电磁波的叠加 …… 222
3.4 无色散介质中的能流速度等于相速 …… 224
3.5 电磁波在导电介质中的阻抗 …… 224

3.6 晶体光学的第一基本方程与离散角 …… 226
3.7 电磁波反射和折射时的规律 …… 227
3.8 反射波和透射波的振幅和能流密度 …… 229
3.9 电磁波经过介质交界面时能量守恒 …… 232
3.10 电磁波的反射率、透射率和光压…… 234
3.11 平面电磁波的反射率和偏振状态…… 237
3.12 虹的偏振度…… 239
3.13 线偏振波经全反射后的偏振状态…… 242
3.14 在布儒斯特角附近的反射率…… 247
3.15 导体内电磁波能量全变成焦耳热…… 249
3.16 电磁波射到导体表面产生的压强…… 250
3.17 电磁波射入海水的深度…… 252
3.18 电磁波从海水到空气的全反射…… 254
3.19 增透膜的厚度…… 257
3.20 法布里-珀罗干涉仪（CUSPEA 题） …… 260
3.21 透过银箔的电磁波…… 263
3.22 用纵向分量表示矩形波导管中的场…… 265
3.23 用纵向分量表示圆柱波导管中的场…… 266
3.24 金属波导管不能传播 TEM 波 …… 268
3.25 理想导体壁的矩形波导管…… 268
3.26 矩形波导管中的 TE_{10} 波 …… 270
3.27 矩形波导管中 TE_{10} 波的最大功率 …… 273
3.28 波导管中 TE_{10} 波磁场的偏振状态 …… 274
3.29 黄铜管内 TE_{10} 波的衰减 …… 277
3.30 平行金属板间的电磁波（CUSPEA 题） …… 280
3.31 矩形谐振腔内 TE_{101} 波的场和能量 …… 282
3.32 矩形谐振腔内 TE_{101} 波的衰减 …… 284
第四章 电磁波的辐射…… 289
4.1 波动方程的格林函数与它的解 …… 289
4.2 波动方程的格林函数（CUSPEA 题） …… 292

4.3 验证推迟势满足洛伦兹条件 …… 295
4.4 求$\frac{\partial t'}{\partial t}$和$\nabla t'$ …… 297
4.5 振动电偶极子的辐射 …… 297
4.6 沿 x 轴振动的电偶极子的辐射 …… 302
4.7 在原点附近振动的电偶极子的辐射 …… 304
4.8 旋转电偶极子的辐射 …… 306
4.9 振动的线性电四极子的辐射 …… 310
4.10 振动的平面电四极子的辐射…… 314
4.11 导体平面外振动的电偶极子的辐射…… 318
4.12 两个旋转电偶极子的辐射…… 323
4.13 振动的圆环电流的矢势…… 326
4.14 圆环形天线的辐射…… 328
4.15 振动的圆环电流的辐射强度…… 331
4.16 旋转永磁体的辐射…… 331
4.17 绕直径旋转的圆环电流的辐射…… 333
4.18 天线辐射的磁场公式…… 334
4.19 电偶极子型天线的辐射…… 335
4.20 电偶极子型天线赤道范围内的辐射…… 337
4.21 短天线的辐射…… 338
4.22 半波天线的辐射…… 340
4.23 整数倍半波天线的辐射（同相馈送）…… 342
4.24 整数倍全波天线的辐射（反相馈送）…… 349
4.25 两共线电偶极子型天线的辐射…… 351
4.26 随时间变化的平面电流的电磁场…… 352
4.27 作简谐振动的平面电流的电磁波…… 354
4.28 低速带电粒子辐射场 E_a 的公式 …… 357
4.29 韧致辐射…… 358
4.30 带电粒子作简谐振动时的辐射…… 360
4.31 带电粒子作圆周运动时的辐射…… 362

4.32 两相同点电荷作圆周运动时的辐射…… 367
4.33 正负带电粒子互相环绕时的辐射…… 371
第五章 狭义相对论…… 373
5.1 普遍的洛伦兹变换 …… 373
5.2 洛伦兹变换中的球面问题 …… 375
5.3 两事件的空间距离和时间差 …… 376
5.4 小球从车厢后壁到前壁的时间 …… 376
5.5 火车穿过山洞的时间 …… 379
5.6 火车进站的时刻 …… 380
5.7 地球两极与赤道的年龄差 …… 383
5.8 运动的 μ 子的平均寿命 …… 384
5.9 两事件的原时间隔 …… 384
5.10 宇宙飞船与地球间的通讯…… 385
5.11 证明 $(u+v)\Big/\left(1+\frac{uv}{c^2}\right)<c$ …… 387
5.12 三个宇宙飞船的相对速度…… 387
5.13 光讯号在两飞船间飞行的时间…… 388
5.14 一飞船抛物到另一飞船 (CUSPEA 题) …… 389
5.15 光在流水中的速度…… 391
5.16 光在液体中进行的时间…… 392
5.17 推导普遍的速度变换式…… 395
5.18 证明速度关系式…… 396
5.19 垂直运动的两物体的相对速度…… 399
5.20 沿直线运动的粒子的加速度…… 405
5.21 飞船加速运动飞过的距离 (CUSPEA 题) …… 407
5.22 证明洛伦兹变换矩阵元 $a_{\mu\alpha}a_{\mu\beta}=\delta_{\alpha\beta}$ …… 408
5.23 洛伦兹变换下体积元的变换…… 410
5.24 证明 $\mathrm{d}x_\mu\mathrm{d}x_\mu$ 和 $\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ 的不变性 …… 411
5.25 证明波动方程为洛伦兹不变式…… 414

5.26 证明 $A_\mu B_\mu$ 和 $\frac{\partial V_\mu}{\partial x_\mu}$ 均为不变量 …… 414
5.27 证明洛伦兹条件是洛伦兹不变式…… 415
5.28 立体角元的变换式…… 415
5.29 证明 $\omega^2 \mathrm{d}\Omega$ 是洛伦兹不变量 …… 417
5.30 光行差…… 419
5.31 光的颜色与飞船的速度…… 420
5.32 运动原子发光的波长…… 421
5.33 运动的平面镜反射光（CUSPEA 题） …… 422
5.34 在电荷看来它只受电场的作用力…… 425
5.35 静磁场的变换…… 427
5.36 静电场不能变换成纯粹磁场…… 427
5.37 $B \perp E$ 的电磁波在任何惯性系都如此 …… 428
5.38 宇宙线质子在地磁场中受的力…… 429
5.39 麦克斯韦方程组的洛伦兹不变性…… 430
5.40 旋转磁化球的电场等（CUSPEA 题） …… 436
5.41 载流回路运动时的电荷和电偶极矩…… 438
5.42 运动的导电介质中的电流密度…… 439
5.43 运动电荷的电磁场…… 441
5.44 电荷在导体平面外运动时的电磁场…… 447
5.45 两运动电荷间的力…… 449
5.46 两同速平行运动的电荷间的力…… 451
5.47 带电粒子在磁场中运动的速度…… 453
5.48 电子在均匀电场中运动的轨迹…… 454
5.49 自由电子不能辐射或吸收光子…… 457
5.50 原子核发射或吸收光子的频率…… 458
5.51 运动原子核的 β 衰变…… 459
5.52 加速器产生反质子的条件…… 461
5.53 加速器产生反质子（CUSPEA 题） …… 462
5.54 由质子、中子的能量求速度和动量…… 465

5.55 两物体的完全非弹性碰撞…… 466
5.56 两物体的完全非弹性碰撞…… 468
5.57 运动的 π^+ 衰变前后各粒子的能量 …… 469
5.58 探测超新星爆发的中微子（CUSPEA 题） …… 471
5.59 大小相等的力产生的加速度不同…… 474
5.60 由拉格朗日量求运动方程…… 475
第六章 带电粒子与电磁场的相互作用…… 477
6.1 带电粒子飞过固定电荷的能量损失 …… 477
6.2 经典氢原子的寿命 …… 479
6.3 μ^- 子被质子俘获（CUSPEA 题）…… 481
6.4 带电粒子高速回旋时的能量 …… 483
6.5 电子回旋时能量损失率（CUSPEA 题） …… 485
6.6 切伦科夫辐射（CUSPEA 题） …… 487
6.7 辐射压力与引力平衡 …… 491
6.8 等离子体的折射率 …… 493
6.9 电磁波入射到等离子体（CUSPEA 题） …… 496
6.10 等离子体内传播的电磁波（CUSPEA 题） …… 498
6.11 由射电噪音求电子密度（CUSPEA 题） …… 500
6.12 天空蓝色的解释…… 502
6.13 自由电子散射电磁波…… 505
6.14 康普顿效应…… 507
6.15 线偏振的电磁波使基态氢原子电离…… 509
6.16 法拉第效应（CUSPEA 题） …… 513
6.17 塞曼效应的经典理论…… 517
6.18 电磁波在色散介质中的传播…… 523
6.19 X 射线射到石墨上的临界角…… 525
6.20 超导体内的磁感强度…… 525
附录…… 528
Ⅰ 矢量的运算公式和定理…… 528
Ⅱ 正交坐标系中梯度、散度、旋度以及 $\nabla^2\varphi$ 和 $\nabla^2 A$ 的

表达式…… 530
Ⅲ 三种常用坐标系的基矢偏导数…… 533
Ⅳ 常用的坐标变换…… 534
Ⅴ 球坐标系中两位矢间的夹角…… 535
Ⅵ 勒让德多项式…… 536
Ⅶ 张量基础知识…… 537
Ⅷ 椭圆积分…… 543
基本物理常数…… 545

第一章　电磁现象的普遍规律

1.1　在正交曲线坐标系(u_1,u_2,u_3)中,梯度、散度和旋度的表达式分别为

$$\nabla\varphi=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}e_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}e_2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}e_3$$

$$\nabla\cdot A=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1)+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1A_2)+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right]$$

$$\begin{aligned}\nabla\times A=&\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3A_3)-\frac{\partial}{\partial u_3}(h_2A_2)\right]e_1\\&+\frac{1}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1A_1)-\frac{\partial}{\partial u_1}(h_3A_3)\right]e_2\\&+\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2A_2)-\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1A_1)\right]e_3\end{aligned}$$

式中e_1、e_2和e_3为正交曲线坐标系的三个基矢;h_1、h_2和h_3为标度因子(scale factor),或拉梅(Lame′)系数;φ为空间的标量函数,A为空间的矢量函数.

试根据上面的公式,分别写出$\nabla\varphi$、$\nabla\cdot A$和$\nabla\times A$在柱坐标系中和球坐标系中的表达式.

【解】　(1)柱坐标系

$$u_1=r,\quad u_2=\ ,\quad u_3=z \tag{1.1.1}$$

$$h_1=1,\quad h_2=r,\quad h_3=1 \tag{1.1.2}$$

$$e_1=e_r,\quad e_2=e\ ,\quad e_3=e_z \tag{1.1.3}$$

$$\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial r}e_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial}e+\frac{\partial\varphi}{\partial z}e_z \tag{1.1.4}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot A&=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{\partial A}{\partial}+\frac{\partial}{\partial z}(rA_z)\right]\\&=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

$$\nabla \times A = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial A_z}{\partial} - \frac{\partial}{\partial z}(rA\ )\right]e_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right]e$$
$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA\ ) - \frac{\partial A_r}{\partial}\right]e_z$$
$$= \left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial} - \frac{\partial A}{\partial z}\right]e_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right]e$$
$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA\ ) - \frac{\partial A_r}{\partial}\right]e_z \qquad (1.1.6)$$

(2) 球坐标系

$$u_1 = r, \quad u_2 = \theta, \quad u_3 = \qquad (1.1.7)$$

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r\sin\theta \qquad (1.1.8)$$

$$e_1 = e_r, \quad e_2 = e_\theta, \quad e_3 = e \qquad (1.1.9)$$

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}e_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \varphi}{\partial}e \qquad (1.1.10)$$

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta A_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta A_\theta) + \frac{\partial}{\partial}(rA\ )\right]$$
$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A}{\partial} \qquad (1.1.11)$$

$$\nabla \times A = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta A\ ) - \frac{\partial}{\partial}(rA_\theta)\right]e_r$$
$$+ \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial} - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta A\ )\right]e_\theta$$
$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]e$$
$$= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A\ )}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial}\right]e_r$$
$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial} - \frac{\partial(rA\ )}{\partial r}\right]e_\theta$$
$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]e \qquad (1.1.12)$$

1.2 $\nabla^2\varphi$定义为空间的标量函数φ的梯度的散度,即$\nabla^2\varphi = \nabla\cdot(\nabla\varphi)$. 试根据这个定义,推导出在正交曲线坐标系中$\nabla^2\varphi$的表达式,并由此写出$\nabla^2\varphi$在柱坐标系和球坐标系中的表达式.

【解】 根据1.1题中$\nabla\varphi$和$\nabla\cdot A$的表达式和$\nabla^2\varphi$的定义,得

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}\right)\right] \tag{1.2.1}$$

根据 1.1 题所列的标度因子,在柱坐标系:

$$\begin{aligned}\nabla^2\varphi&=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right]\\&=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

在球坐标系:

$$\begin{aligned}\nabla^2\varphi&=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r\sin\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)\right]\\&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

1.3　以 ∇^2 表示拉普拉斯算符,试证明

$$\nabla^2(uv)=v\nabla^2u+u\nabla^2v+2(\nabla u)\cdot(\nabla v)$$

【证法一】　在一般正交曲线坐标系中,$\nabla^2 f$ 的表达式为(见 1.2 题)

$$\nabla^2 f=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\right)\right]$$

式中 h_1、h_2 和 h_3 是拉梅系数,它们一般都是 u_1、u_2 和 u_3 的函数. 令 $f=uv$, 上式的第一项为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial(uv)}{\partial u_1}\right]=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\right)\frac{\partial(uv)}{\partial u_1}\right]+\frac{1}{h_1^2}\frac{\partial^2(uv)}{\partial u_1^2}\\&=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\right)\left(v\frac{\partial u}{\partial u_1}+u\frac{\partial v}{\partial u_1}\right)\right]\\&\quad+\frac{1}{h_1^2}\left(v\frac{\partial^2u}{\partial u_1^2}+2\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial u_1}+u\frac{\partial^2v}{\partial u_1^2}\right)\\&=\frac{v}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\right)\frac{\partial u}{\partial u_1}+\frac{u}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\right)\frac{\partial v}{\partial u_1}\\&\quad+\frac{v}{h_1^2}\frac{\partial^2u}{\partial u_1^2}+\frac{2}{h_1^2}\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial u_1}+\frac{u}{h_1^2}\frac{\partial^2v}{\partial u_1^2}\\&=\frac{v}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial u_1}\right)-\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial^2u}{\partial u_1^2}\right]\end{aligned}$$

$$+\frac{u}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial v}{\partial u_1}\right)-\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial^2 v}{\partial u_1^2}\right]$$

$$+\frac{v}{h_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial u_1^2}+\frac{2}{h_1^2}\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial u_1}+\frac{u}{h_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial u_1^2}$$

$$=\frac{v}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial u_1}\right)+\frac{u}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial v}{\partial u_1}\right)+\frac{2}{h_1^2}\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial u_1}$$

可见它等于 $v\nabla^2 u+u\nabla^2 v+2(\nabla u)\cdot(\nabla v)$ 的第一项. 同样可证得第二、三项也分别相等. 于是本题得证.

【证法二】 根据定义, $\nabla^2(uv)$ 等于梯度 $\nabla(uv)$ 的散度, 故

$$\begin{aligned}\nabla^2(uv)&=\nabla\cdot[\nabla(uv)]=\nabla\cdot(v\nabla u+u\nabla v)\\&=(\nabla v)\cdot(\nabla u)+v\nabla^2 u+(\nabla u)\cdot(\nabla v)+u\nabla^2 v\\&=v\nabla^2 u+u\nabla^2 v+2(\nabla u)\cdot(\nabla v)\end{aligned}$$

1.4 用高斯公式证明 $\int_V \mathrm{d}V\ \nabla\times f=\oint_S \mathrm{d}S\times f$

【证】 用非零的任意常矢量 c 点乘上式左边得

$$c\cdot\int_V \mathrm{d}V\ \nabla\times f=\int_V \mathrm{d}V[c\cdot(\nabla\times f)] \tag{1.4.1}$$

根据矢量分析公式

$$\nabla\cdot(A\times B)=(\nabla\times A)\cdot B-A\cdot(\nabla\times B) \tag{1.4.2}$$

令其中的 $A=f, B=c$, 便得

$$\nabla\cdot(f\times c)=(\nabla\times f)\cdot c=c\cdot(\nabla\times f) \tag{1.4.3}$$

因此(1.4.1)式右边

$$\int_V \mathrm{d}V[c\cdot(\nabla\times f)]=\int_V \mathrm{d}V\ \nabla\cdot(f\times c) \tag{1.4.4}$$

又由高斯公式有

$$\begin{aligned}\int_V \mathrm{d}V\ \nabla\cdot(f\times c)&=\oint_S(f\times c)\cdot\mathrm{d}S=\oint_S(f\times c)\cdot n\mathrm{d}S\\&=\oint_S c\cdot(n\times f)\mathrm{d}S=c\cdot\oint_S \mathrm{d}S\times f\end{aligned} \tag{1.4.5}$$

$$c\cdot\int_V \mathrm{d}V\ \nabla\times f=c\cdot\oint_S \mathrm{d}S\times f \tag{1.4.6}$$

因 c 为非零的任意常矢量, 故得

$$\int_V \mathrm{d}V\ \nabla \times f = \oint_S \mathrm{d}S \times f \tag{1.4.7}$$

1.5　用斯托克斯公式证明:(1)$\int_S \mathrm{d}S \times \nabla \varphi = \oint_L \varphi \mathrm{d}l$;

(2)$\oint_L (a \times r) \cdot \mathrm{d}l = 2\int_S a \cdot \mathrm{d}S$,式中 a 为常矢量.

【证】　(1)$\int_S \mathrm{d}S \times \nabla \varphi = \oint_L \varphi \mathrm{d}l$

设 a 为非零的任意常矢量,令 $F = \varphi a$ 代入斯托克斯公式

$$\int_S \nabla \times F \cdot \mathrm{d}S = \oint_L F \cdot \mathrm{d}l \tag{1.5.1}$$

的左边,则有

$$\begin{aligned}\int_S \nabla \times (\varphi a) \cdot \mathrm{d}S &= \int_S [\nabla \varphi \times a + \varphi(\nabla \times a)] \cdot \mathrm{d}S \\ &= \int_S \nabla \varphi \times a \cdot \mathrm{d}S = -\int_S a \times \nabla \varphi \cdot \mathrm{d}S \\ &= -\int_S a \cdot \nabla \varphi \times \mathrm{d}S = \int_S a \cdot \mathrm{d}S \times \nabla \varphi \\ &= a \cdot \int_S \mathrm{d}S \times \nabla \varphi \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

代入(1.5.1)式的右边,则有

$$\oint_L \varphi a \cdot \mathrm{d}l = a \cdot \oint_L \varphi \mathrm{d}l \tag{1.5.3}$$

于是得

$$a \cdot \left[\int_S \mathrm{d}S \times \nabla \varphi - \oint_L \varphi \mathrm{d}l\right] = 0 \tag{1.5.4}$$

因 a 为非零的任意常矢量,故得

$$\int_S \mathrm{d}S \times \nabla \varphi = \int_L \varphi \mathrm{d}l \tag{1.5.5}$$

(2)$\oint_L a \times r \cdot \mathrm{d}l = 2\int_S a \cdot \mathrm{d}S$

由矢量分析公式有

$$\begin{aligned}\nabla \times (a \times r) &= (r \cdot \nabla)a - (a \cdot \nabla)r + (\nabla \cdot r)a - (\nabla \cdot a)r \\ &= -a + 3a = 2a \end{aligned} \tag{1.5.6}$$

令 $F = a \times r$,则由斯托克斯公式(1.5.1)和(1.5.6)式得

$$\oint_L a \times r \cdot \mathrm{d}l = \int_S \nabla \times (a \times r) \cdot \mathrm{d}S = 2\int_S a \cdot \mathrm{d}S \tag{1.5.7}$$

1.6　有人得出“磁感强度 B 恒等于零”的结论. 他的论证如下:因为 $\nabla \cdot B = 0$,所以由矢量分析可知,必定有矢势 A 存在,使得 $B = \nabla \times A$;又由 $\oint_S B \cdot \mathrm{d}S = 0$ 和斯托克斯公式得

$$\oint_S B \cdot \mathrm{d}S = \oint_S \nabla \times A \cdot \mathrm{d}S = \oint_L A \cdot \mathrm{d}l = 0$$

又由矢量分析,若 $\oint_L A \cdot \mathrm{d}l = 0$,则必有标势 φ 存在,使得 $A = \nabla \varphi$. 于是得

$$B = \nabla \times A = \nabla \times (\nabla \varphi) \equiv 0.$$

他的结论显然是错误的. 试分析他的错误在什么地方.

【解】　错在 $\oint_S \nabla \times A \cdot \mathrm{d}S = \oint_L A \cdot \mathrm{d}l$. 因为斯托克斯公式中的面积分是以 L 为边界的曲面积分,而不是封闭曲面积分.

1.7　电荷系统的电偶极矩定义为

$$p(t) = \int_V \rho(r', t) r' \mathrm{d}V'$$

试用电荷守恒定律,证明 p 对时间的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \int_V J(r', t) \mathrm{d}V'$$

【证】
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho(r', t) r' \mathrm{d}V' = \int_V \frac{\partial}{\partial t}[\rho(r', t) r'] \mathrm{d}V'$$

$$= \int_V \frac{\partial \rho(r', t)}{\partial t} r' \mathrm{d}V' = \int_V [-\nabla' \cdot J] r' \mathrm{d}V'$$

$$= -\int_V (\nabla' \cdot J) x' \mathrm{d}V' e_x - \int_V (\nabla' \cdot J) y' \mathrm{d}V' e_y$$

$$-\int_V (\nabla' \cdot J) z' \mathrm{d}V' e_z$$

第一项

$$\int_V (\nabla' \cdot J) x' \mathrm{d}V' = \int_V x' (\nabla' \cdot J) \mathrm{d}V'$$

$$= \int_V [\nabla' \cdot (x'J) - (\nabla' x') \cdot J] \mathrm{d}V'$$

$$= \oint_S x'J \cdot \mathrm{d}S' - \int_V J_x \mathrm{d}V'$$

上式中封闭曲面 S 为电荷系统的边界,电流不能流出这边界,故 $\oint_S x'J \cdot \mathrm{d}S' = 0$. 因此

$$\int_V (\nabla' \cdot J) x' \mathrm{d}V' = -\int_V J_x \mathrm{d}V'$$

对第二、三项同样可得

$$\int_V (\nabla' \cdot J) y' \mathrm{d}V' = -\int_V J_y \mathrm{d}V', \int_V (\nabla' \cdot J) z' \mathrm{d}V' = -\int_V J_z \mathrm{d}V'$$

于是

$$-\int_V [\nabla' \cdot J] r' \mathrm{d}V' = \int_V J \mathrm{d}V'$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \int_V J(r', t) \mathrm{d}V'$$

1.8　设 m 是一常矢量,r 是坐标原点到场点的位矢. 试证明:除 $r = 0$ 点以外,矢量 $A = \dfrac{m \times r}{r^3}$ 的旋度等于标量 $\varphi = \dfrac{m \cdot r}{r^3}$ 的负梯度,即

$$\nabla \times A = -\nabla \varphi$$

【证】　因

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{r}{r^3} \tag{1.8.1}$$

故

$$\nabla \times A = \nabla \times \left(\frac{m \times r}{r^3} \right) = -\nabla \times \left[m \times \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \right]$$

$$= \nabla \times \left[\left(\nabla \frac{1}{r} \right) \times m \right]$$

$$= (\nabla \cdot m) \nabla \frac{1}{r} + (m \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{r}$$

$$- \left[\nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \right] m - \left[\left(\nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \nabla \right] m$$

$$= (m \cdot \nabla)\nabla\frac{1}{r} - \left[\nabla^2\frac{1}{r}\right]m \tag{1.8.2}$$

其中

$$\nabla^2\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i^2}\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x_i}\right] = -\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{x_i}{r^3}\right]$$

$$= -\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{1}{r^3} - \frac{3x_i}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x_i}\right] = -\frac{3}{r^3} + \frac{3r^2}{r^5} = 0 \quad (r \neq 0) \tag{1.8.3}$$

$$\nabla \times A = (m \cdot \nabla)\nabla\frac{1}{r}, r \neq 0 \tag{1.8.4}$$

又 $$\nabla\varphi = \nabla\left[\frac{m \cdot r}{r^3}\right] = -\nabla\left[m \cdot \left[\nabla\frac{1}{r}\right]\right]$$

$$= -m \times \left[\nabla \times \left[\nabla\frac{1}{r}\right]\right] - \left[\nabla\frac{1}{r}\right] \times (\nabla \times m)$$

$$-(m \cdot \nabla)\nabla\frac{1}{r} - \left[\left[\nabla\frac{1}{r}\right] \cdot \nabla\right]m$$

$$= -(m \cdot \nabla)\nabla\frac{1}{r} \tag{1.8.5}$$

比较(1.8.4)和(1.8.5)两式即得:当 $r \neq 0$ 时,便有

$$\nabla \times A = -\nabla\varphi \tag{1.8.6}$$

【别证】 选取坐标系,使 m 沿 z 轴,即

$$m = m e_z \tag{1.8.7}$$

于是

$$\nabla\left[\frac{m \cdot r}{r^3}\right] = \nabla\left[\frac{m e_z \cdot r}{r^3}\right] = \nabla\left[\frac{m z}{r^3}\right] = m\nabla\left[\frac{z}{r^3}\right] \tag{1.8.8}$$

而

$$\nabla \times \left[\frac{m \times r}{r^3}\right] = m\left[\nabla \cdot \left[\frac{r}{r^3}\right]\right] - (m \cdot \nabla)\frac{r}{r^3} \tag{1.8.9}$$

因为 $r \neq 0$ 时,$\nabla \cdot \left[\frac{r}{r^3}\right] = 0$,所以

$$\nabla \times \left[\frac{m \times r}{r^3}\right] = -(m \cdot \nabla)\frac{r}{r^3} = -m\frac{\partial}{\partial z}\frac{r}{r^3}$$

$$= m\frac{\partial}{\partial z}\nabla\frac{1}{r} = m\nabla\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} = -m\nabla\left[\frac{z}{r^3}\right] \tag{1.8.10}$$

比较(1.8.8)和(1.8.10)两式即得(1.8.6)式.

1.9　一个长为L的圆筒形电容器,其内部是一半径为a的导线,外部是一半径为b的薄导体壳.两者之间的空间充满电容率为ε的绝缘材料.

(a)当电容器带电荷量Q时,略去边缘效应,求电场作为径向位置的函数.

(b)求电容.

(c)假定在这电容器接到电势差为V的蓄电池上时,电介质被部分地拉出电容器.略去边缘效应.求使电介质处于这个位置所需的力.力必须作用在什么方向上?[本题系中国赴美物理研究生考试(CUSPEA)1981年试题]

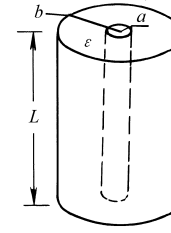


图　1.9

【解】　(a)在介质内作一半径为r、长为l的同轴圆筒面S,由高斯定理得

$$\oint_S D\cdot\mathrm{d}S = 2\pi rlD = \frac{Q}{L}l$$

$$D = \frac{Q}{2\pi rL} \tag{1.9.1}$$

于是得电场强度为

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon L}\frac{r}{r^2} \tag{1.9.2}$$

(b)电容器两极板的电势差为

$$U = \int_a^b E\cdot\mathrm{d}r = \frac{Q}{2\pi\varepsilon L}\ln\frac{b}{a}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln(b/a)} \tag{1.9.3}$$

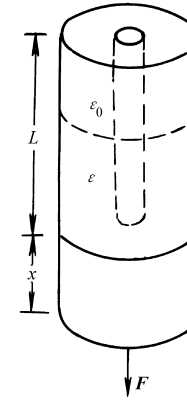


图　1.9(1)

(c)设介质被拉出的一段长为x,这时电容器的电容便等于有介质部分的电容与无介质部分的电容并联而成的电容,即

$$C = \frac{2\pi\varepsilon(L - x)}{\ln(b/a)} + \frac{2\pi\varepsilon_0 x}{\ln(b/a)}$$
$$= \frac{2\pi}{\ln(b/a)}[\varepsilon L - (\varepsilon - \varepsilon_0)x] \tag{1.9.4}$$

因电容器两极板的电势差为 V，这时电容器所储蓄的能量便为

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{\pi V^2}{\ln(b/a)}[\varepsilon L - (\varepsilon - \varepsilon_0)x] \tag{1.9.5}$$

于是拉出介质(即欲使 x 增大)的力便为

$$F = -\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\pi V^2}{\ln(b/a)}(\varepsilon - \varepsilon_0) = \frac{\pi\varepsilon_0 V^2}{\ln(b/a)}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1\right) \tag{1.9.6}$$

这就是所求的力，力的方向平行于轴线并向外.

1.10　由麦克斯韦方程组出发，求电导率为 σ、电容率为 ε 的均匀介质内部自由电荷量的密度 ρ 与时间 t 的关系.

【解】　设在这介质内部，由于某种原因，在 $t=0$ 时刻，有自由电荷分布，电荷量的密度为 ρ_0；到 t 时刻，电荷量的密度变为 ρ，则由麦克斯韦方程组得

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot D = \nabla\cdot\frac{\partial D}{\partial t} = \nabla\cdot(\nabla\times H - J)$$
$$= -\nabla\cdot J = -\sigma\nabla\cdot E = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\nabla\cdot D = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}$$

求解，并利用初始条件便得

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$

这便是所要求的关系式.

由这个关系式可见，当 $t\to\infty$ 时，$\rho\to 0$. 这表明，在静电平衡时，电导率 $\sigma\neq 0$ 的均匀介质内自由电荷量的密度为零.

1.11　由麦克斯韦方程组导出电荷守恒定律.

【解】　$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot D = \nabla\cdot\frac{\partial D}{\partial t} = \nabla\cdot(\nabla\times H - J) = -\nabla\cdot J$

$\therefore$　$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot J = 0$$

这便是电荷守恒定律.

1.12　试证明:在均匀介质内部,极化电荷量密度 ρ_P 与自由电荷量密度 ρ 的关系为 $\rho_P = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1\right)\rho$,式中 ε 是介质的电容率.

【证】 $\rho_P = -\nabla \cdot P = -\nabla \cdot (\chi_e \varepsilon_0 E)$

$$= -\nabla \cdot [(\varepsilon - \varepsilon_0)E] = -\nabla \cdot \left[\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} D\right]$$

$$= \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1\right)\nabla \cdot D = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1\right)\rho$$

【注】 这个结果很有用. 例如,在均匀介质内部某处出现一个由自由电荷构成的电偶极子 p,则由这个结果就可知道,介质内同一地方,便存在一个由极化电荷构成的电偶极子 $p_P = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1\right)p$

1.13　一平行板电容器由图 1.13 所示的圆形板组成,两板间的电压(如图由一无电阻的长直导线供给)与时间的关系为 $V = V_0 \cos\omega t$. 假定 $d \ll a \ll \frac{c}{\omega}$,以致电场的边缘效应和推迟效应都可以略去.

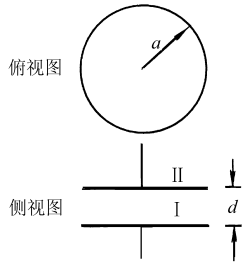


图　1.13

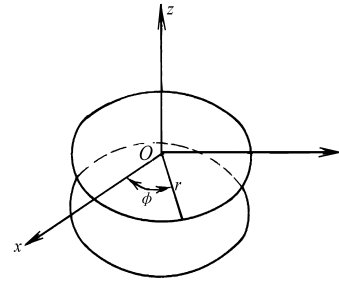


图　1.13(1)

(a)用麦克斯韦方程组(及对称性的论证)求出区域 I 中的电磁场作为时间的函数.

(b) 求导线中的电流和平行板中的电流密度作为时间的函数.

(c) 求区域 Ⅱ 中的磁场,并求出板上下两面 B 的不连续性与板中面电流之间的关系. [本题系中国赴美物理研究生考试(CUSPEA)1981 年试题]

【解】 (a) 以导线为 z 轴取柱坐标系,参见图 1.13(1). 设上下两板的电势差为 V,在 t 时刻,上板下面带正电荷,下板上面带负电荷,则在区域 Ⅰ 内近似地有

$$E_z^{(\mathrm{I})} = -\frac{V}{d} = -\frac{V_0}{d}\cos\omega t \tag{1.13.1}$$

这里负号是由于,我们规定电场 $E^{(\mathrm{I})}$ 的 z 分量向上为正. $E^{(\mathrm{I})}$ 的其他分量均为零.

根据麦克斯韦方程组,在区域 Ⅰ 内有

$$\nabla \times B = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E}{\partial t} \tag{1.13.2}$$

故

$$\oint_L B \cdot \mathrm{d}l = \int_S \nabla \times B \cdot \mathrm{d}S = \varepsilon_0\mu_0\int_S \frac{\partial E}{\partial t}\cdot \mathrm{d}S \tag{1.13.3}$$

由对称性知,B 线一定是圆心在 z 轴上的同心圆,所以只有 $B^{(\mathrm{I})}$ 不为零. 于是

$$B^{(\mathrm{I})}\cdot 2\pi r = \varepsilon_0\mu_0\frac{V_0}{d}\omega\sin\omega t\cdot \pi r^2$$

$$B^{(\mathrm{I})} = \frac{\varepsilon_0\mu_0 V_0\omega}{2d} r\sin\omega t \tag{1.13.4}$$

(b) 在上板上,总电荷量为

$$Q = CV = \frac{\varepsilon_0\pi a^2}{d}V = \frac{\pi\varepsilon_0 a^2}{d}V_0\cos\omega t \tag{1.13.5}$$

在导线上,电流为

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{\pi\varepsilon_0 a^2}{d}\omega V_0\sin\omega t \tag{1.13.6}$$

这个电流在电容器极板上呈辐射状散开,如图 1.13(2) 所示.

上极板的电荷量面密度为

$$\sigma = \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{\varepsilon_0}{d} V_0 \cos\omega t \quad (1.13.7)$$

在半径为 r 的圆外是一环带,这环带上的电荷量为

$$Q(r) = \pi(a^2 - r^2)\sigma = \frac{\pi(a^2 - r^2)\varepsilon_0}{d} V_0 \cos\omega t \quad (1.13.8)$$

单位时间内,这环带上电荷量的增量为

$$\frac{\mathrm{d}Q(r)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\pi(a^2 - r^2)\varepsilon_0}{d}\omega V_0 \sin\omega t$$

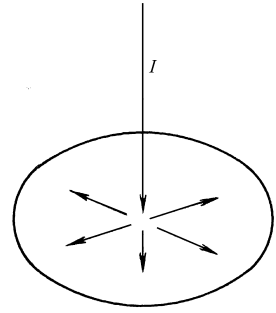


图 1.13(2)

这个值就等于流过圆周 $2\pi r$ 的电流强度 I_r. 因此,所求的面电流密度便为

$$K_r(r) = \frac{I_r}{2\pi r} = -\frac{(a^2 - r^2)\varepsilon_0}{2rd}\omega V_0 \sin\omega t \quad (1.13.9)$$

(c) 因为 $\oint_L B \cdot \mathrm{d}l = -\mu_0 I$,这里的负号是因为电流 I 的方向与 z 轴方向相反,所以在区域 Ⅱ 中,有

$$B^{(\mathrm{II})} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{a^2 \varepsilon_0 \mu_0}{2rd}\omega V_0 \sin\omega t \quad (1.13.10)$$

$B^{(\mathrm{II})}$ 的其他分量为零. 由此可列出 B 和 K 的边值关系为

$$n \times (\Delta B) = \mu_0 K \quad (1.13.11)$$

或

$$B^{(\mathrm{I})} - B^{(\mathrm{II})} = \mu_0 K_r \quad (1.13.12)$$

1.14 (a) 设想存在孤立磁荷(磁单极). 试改写麦克斯韦方程组以包括磁荷量密度 ρ_m 和磁流密度 J_m 的贡献. 假定除了源之外,处处都是真空.

(b) 阿耳瓦雷兹(Alvarez) 等人用许多块物质一个接一个地连续通过一个 n 匝线圈来寻找物质中的磁单极,如图 1.14 所示. 线圈的电阻为 R,假定磁荷运动得足够慢,使得它的感应效应很小. 当磁单极 q_m 沿图中环路穿过线圈 N 次后,计算有多少电荷量

Q 流过线圈.

(c) 设想线圈是由超导体制成的,因而电阻为零,只有它的电感 L 限制了它的感应电流. 假定线圈中初始电流为零,试计算磁单极 q_m 穿过线圈 N 次后,线圈里的电流是多少. [本题系中国赴美物理研究生考试(CUSPEA)1984 年试题]

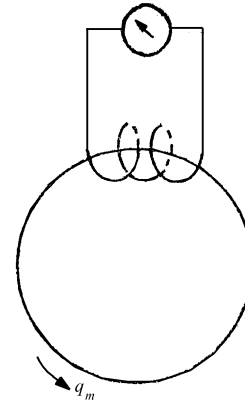


图 1.14

【解】 (a) 在没有磁单极时,麦克斯韦方程组为

$$\nabla \cdot D = \rho \qquad (1.14.1)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \qquad (1.14.2)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad (1.14.3)$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} + J \qquad (1.14.4)$$

在有磁单极时,设磁荷量密度为 ρ_m,则磁场的高斯定理便不再是(1.14.2)式,而是

$$\nabla \cdot B = \rho_m \qquad (1.14.5)$$

这时 $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ 便不再正确. 因为对两边取散度,左边为 $\nabla \cdot (\nabla \times E) = 0$,而右边为 $-\nabla \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t} \neq 0$. 为了解决这个矛盾,利用磁流的连续性方程

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot J_m = 0 \qquad (1.14.6)$$

把 $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ 式的右边改为 $-\frac{\partial B}{\partial t} - J_m$,即

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} - J_m \qquad (1.14.7)$$

于是便得出有磁单极时的麦克斯韦方程组为

$$\nabla \cdot D = \rho \qquad (1.14.8)$$

$$\nabla \cdot B = \rho_m \qquad (1.14.9)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} - J_m \tag{1.14.10}$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} + J \tag{1.14.11}$$

(b) 设使用的线圈仅有一匝,以 L' 表示线圈的回路,L'' 表示磁单极运动的环路,如图 1.14(1) 所示. 把(1.14.10) 式在以 L' 为边界的曲面 S 上积分,即

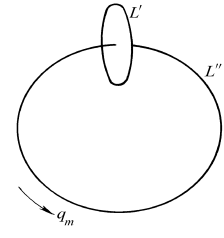


图 1.14(1)

$$\int_S \nabla \times E \cdot \mathrm{d}S = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S B \cdot \mathrm{d}S - \int_S J_m \cdot \mathrm{d}S$$

再用斯托克斯公式,把上式变为

$$\oint_{L'} E \cdot \mathrm{d}l = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi - I_m \tag{1.14.12}$$

式中 I_m 是沿 L'' 通过 S 的磁流. 因为

$$\oint_{L'} E \cdot \mathrm{d}l = V \tag{1.14.13}$$

是线圈回路 L' 中的电动势,并且 $V = IR$,故在任何时刻都有

$$IR = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - I_m \tag{1.14.14}$$

对时间积分:

$$\int IR\,\mathrm{d}t = QR$$

$$\int \frac{\partial \Phi}{\partial t}\mathrm{d}t = \Delta\Phi = 0(\text{当磁单极远离 } L'' \text{时})$$

$$\int I_m\,\mathrm{d}t = q_m$$

于是得

$$Q = -\frac{q_m}{R} \tag{1.14.15}$$

当线圈为 n 匝、q_m 穿过线圈 N 次时,便有

$$Q = -\frac{nN}{R}q_m \tag{1.14.16}$$

(c) 因为 $R = 0$,所以 $\oint_{L'} E \cdot \mathrm{d}l = 0$. 这时感应电流 I 所产生的磁通量 $\Phi = LI$ 抵消了磁单极所产生的磁通量,即

$$-\Phi - q_m = -LI - q_m = 0 \tag{1.14.17}$$

当线圈为 n 匝,q_m 穿过线圈 N 次时,便为

$$-LI - nN\,q_m = 0 \tag{1.14.18}$$

于是所求的电流便为

$$I = -\frac{nN}{L}q_m \tag{1.14.19}$$

1.15 圆柱形计数器由一根细长的导线和套住导线的同轴金属圆筒构成,导线的半径为 r_0,圆筒的半径为 R,导线维持在高的正电势 V_0,圆筒则接地,如图 1.15 所示. 靠近导线表面处,电场很强,电离辐射的出现在这里引起“雪崩”. 设想在导线表面有 N 个电子从它们的原子上离开. 这样生成的 N 个离子在电场的作用下开始离开导线运动. 假定离子的迁移率(速度除以电场强度)w 为常数,且离子构成包围导线的圆柱形薄层.

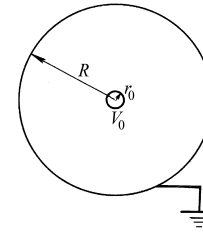


图 1.15

(a) 试证明:作为时间 t(从离子在导线表面形成的时刻开始计算) 的函数,离子的径向位置 r 可以写成

$$r^2 = K(t + t_0)$$

式中 K 和 t_0 都是常数,它们的值与 V_0 和 w 以及各种几何尺寸等都有关. 试给出常数 K 和 t_0 的表达式,并证明 t_0 约等于离子在导线半径量级的距离上的漂移时间. 在计算离子运动时略去由于雪崩造成的电场变化.

(b) 如果电势差 V_0 保持不变,当离子沿径向漂移时,必定有电荷量 Q 流向导线. 已知全部离子的电荷量为 Q_i,试计算电荷量 Q 作为时间 t 的函数. [本题系中国赴美物理研究生考试