



中国科学院规划教材

Operations Research

运筹学

顾基发 主编

刘宝碇 施泉生 副主编



科学出版社



中国科学院规划教材

Operations Research

运筹学

顾基发 主编

刘宝碇 施泉生 副主编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书较为系统地介绍运筹学的基本内容,第一~十三章为基础篇,其中包括运筹学各个分支,如线性规划、运输问题、目标规划、整数规划、动态规划、存储问题、网络分析、决策分析、对策论、排队论、模拟与预测、非线性规划等。书中附有习题及在各章算法中可资应用的软件与实验指导。本书进展篇包含5章,是第十四~十八章,分别是复杂网络、软优化、软运筹学、多主体系统仿真建模、供应链网络设计,都是近年来运筹学在国内外新的进展,里面有部分内容是作者们的研究成果。

本书适用于运筹学、管理科学与工程、系统工程等相关专业的师生作为基础教材,对于一些研究人员、应用工作者和希望能赶上国际研究前沿的研究生们也是一本探索运筹学研究新方向的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学/顾基发主编.—北京:科学出版社,2011.2

中国科学院规划教材

ISBN 978-7-03-030068-3

I. ①运… II. ①顾… III. ①运筹学-教材 IV. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 011184 号

责任编辑:马 跃 / 责任校对:钟 洋
责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 2 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2011 年 2 月第一次印刷 印张:26 3/4

印数:1—4 000

字数:630 000

定价:45.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

运筹学是一门发展有近 70 多年的学科,是一门处理事理的科学。它既可以被看成理科中的基础学科,又是管理科学与工程中的应用学科。在近 20 年来,随着我们面对的对象日新月异和新的技术不断出现,全球化、信息化、人性化等促使运筹学不单在方法论,而且在理论和方法,以及应用方面都有了新的进展。例如,随着互联网和社会网的出现,人类之间相互沟通变得越来越快,越来越方便,范围也越变越大。因此,复杂网络分析也就代替了原来的图和网络分析。由于计算技术的发展,可以处理的网络越来越大、越来越复杂,而可视化技术的发展使人们又较容易地将网络图及一些节点上的内容(人的头像、主要观点等)显示出来。随着我们要处理的对象系统与人的因素越来越紧密相关,单是追求以优化为目标的完全定量数学描述的硬运筹学方法论也就日见其拙,代之出现的是软运筹学方法论,它们更多考虑人的情感、智慧而追求满意解,追求事物过程有一个好的改变,在处理一些社会问题时,有时甚至只要求保持和谐和稳定。

在处理某些问题时人们发现决定性、静态、随机性、动态已经不能很好地描述复杂规划问题,而随之而来的不确定性、模糊性、粗糙性等新概念的不断出现,使得不确定性规划也得到了新的发展。相应在求解方法方面带有启发式,特别考虑人的智慧的优化方法也就应运而生,这就是软优化方法。

在其他新的理论方面,如排队论的新进展——复杂排队网络,博弈论方面的新进展,排序理论方面和应用等挂一漏万,由于篇幅和我们能力所限没有能在本书加以介绍。在运筹学老的分支中,国内一直缺少如搜索论和可靠性维修等理论的介绍,很遗憾本书也将之放过了。

在模拟仿真方面,本书介绍了多主体仿真这一处理复杂系统的新仿真工具,较之老的模拟仿真方法它显得更为灵活,更为人性化,同时又更便于人机对话。

在应用方面,本书绪论中的运筹学应用举例中特别提到国际上比较著名的获埃德曼奖的一些应用案例。例如,美国于刚项目小组由于在美国大陆航空公司等民用航空企业当民航班机受到各种干扰之后,航班机组人员如何以最快的时间和最佳的组合来使航班恢复正常运营所创造的经济效益极大方面的研究,成为 2002 年度埃德曼奖大奖的获得者。主要是这些系统在一系列影响航班正常运营的重大事件中收到了极大的效果。例如,2000 年 12 月和 2001 年 3 月美国北部的暴风雪,2001 年休斯敦的大洪水,这些对航班运营和管理所造成的重大影响都在于刚教授所领导开发的系统的支持下,将损失降低到最低程度。荷兰的铁路部门由于编制荷兰火车新时刻表获得 2008 年度大奖,构造这样的时刻表需要求解一个复杂的组合优化问题。其他应用项目如美国联邦航空局采用了空域流的规划,局方有能力在拥挤的空域中使每架飞机在地面的延误减少,这使得在空域中的飞行转移数保持在一个可接受的水平。挪威国家石油公司的优化北海的天然气海岸管道系统内容涉及在保证天然气的质与量的情况下年运行和维修计划的制订。瑞典斯德哥尔

摩市利用运筹学改进社会医疗和家庭帮助的质量和效率,将近 200 多个单位每天都在用其来规划近 4000 个家庭医疗人员的调度和指定路程,运行效率提高了 10%~15%。美国环境保护署为了减少美国饮水系统的安全风险使用的整数规划启发式算法可用于设计污染警报系统,它可以很快地侦察出可能的恐怖行动,以及其他对国家水供应的威胁等。中国的运筹学在 20 世纪 50 年代就有了很好的应用,其中最著名的有“粮食调运”、“打麦场设计”、“中国邮路问题”。当时发现了粮食部门调度系统职工自己发明的图上作业法快速简便,其结果与西方的运输问题解法的结果一样,后来中国学者又集体地证明了图上作业法在数学上的正确性。管梅谷提出的“中国邮路问题”受到国际上的关注和认可。中国在公社的农业运筹学应用也受到了国际同行的称颂。20 世纪 60 年代华罗庚在全国各地推广的优选法和统筹法又走出了一条发动群众来搞运筹学的出色的应用范例,因为没有 一个运筹学方法在国际上能得到这么多普通群众如此广泛的认同和应用。自从国际运筹学协会 1987 年设立发展中国家的运筹学奖(简称“运筹学进展奖”)后,中国已有王毓云获提名奖(1987),章祥逊、崔晋川获一等奖(1996),刘光中、徐玖平获二等奖(1996),陈锡康等获一等奖(1999),赵庆桢、王长钰获二等奖(1999),沈吟东、夏家宏获二等奖(2005)。2000 年刘源张获亚太质量组织授予的“哈灵顿-石川”奖。近年来,中国运筹学工作者继续坚持运筹学研究与经济建设等重大问题紧密结合的政策。例如,在山东省与大连市经济发展计划的制订,兰州铁路局铁路运输的优化安排,中外合资经营项目经济评价,若干国家重大工程中的综合风险分析等方面,我国运筹学工作者都发挥了积极的作用。此外,还关注到信息科学、生命科学等现代高科技中一些运筹学起作用的新的工作方向。在金融管理方面,将优化及决策分析方法应用于金融风险控制与管理、资产评估与定价分析模型等;在网络管理上,研究排队网络的数量指标分析;在供应链管理问题中,研究多重决策最优策略的计算方法。在这些重要的新方向上,都取得了可喜的进展及成绩。

对近年来存储理论的一个新兴应用领域——供应链,本书单独作了介绍。供应链作为近代服务业的一个重要支撑近年来受到越来越多的人重视。

作者之一顾基发研究员从 20 世纪 50 年代开始涉猎运筹学,也曾在前苏联获得数理副博士学位,专业就是运筹学,还曾参加过多本运筹学著作的编写工作。这次应中国科学院研究生教材系列之邀携自己的部分学生和他们的学生共同来完成编写工作。在开始编写大纲时得到赵修利、刘宝碇、唐锡晋和施泉生等的大力支持,尽管其中有些人后来由于忙于其他事务未能参加具体编写,但是我们仍然要对他们的支持表示感谢。

本书的大部分是由施泉生教授完成的,他在这方面不仅有编写教材的经验,而且身体力行多次开设运筹学的精品课程。刘宝碇教授的学生朱元国教授写了第十五章,计小宇副教授写了第十八章,里面也包含了清华大学不确定研究室的部分研究成果。唐锡晋研究员的学生刘怡君副研究员写了第十四章和第十七章。顾基发研究员是全书的编审,并写了绪论和第十六章。作者要感谢科学出版社及马跃编辑等为本书的顺利出版而给予的大力支持和帮助。

顾基发

2010 年 5 月 5 日

目 录

前言

绪论	1
参考文献	9

基 础 篇

第一章 线性规划	13
第一节 线性规划问题及其数学模型	14
一、线性规划问题的实例	14
二、线性规划问题的数学模型	16
三、线性规划问题的标准形式	16
四、线性规划问题的标准化	17
第二节 线性规划图解法(graphical solution)	18
第三节 线性规划的基本概念	21
一、线性规划解的基本概念	21
二、线性规划解的性质	23
第四节 单纯形法	23
一、消去法(gaussian elimination)	24
二、已知初始可行基求最优解	25
三、无初始可行基求最优解	31
本章小结	36
习题一	37
第二章 线性规划的对偶理论	41
第一节 对偶线性规划模型	41
第二节 对偶理论基本性质	46
第三节 对偶问题的经济意义	49
第四节 对偶单纯形法(dual simplex method)	50
第五节 灵敏度分析(sensitivity analysis)	52
本章小结	59
习题二	59
第三章 运输问题与指派问题	63
第一节 运输问题及其数学模型	63

第二节 运输单纯形法	64
一、确定初始方案	64
二、求最优方案	67
第三节 运输问题变形的一般应用	71
一、非平衡问题	71
二、转运问题	75
第四节 指派问题的特征	77
第五节 指派问题的求解	78
本章小结	83
习题三	83
第四章 目标规划	87
第一节 目标规划的数学模型	87
一、问题的提出	87
二、目标规划解的概念	88
三、目标规划问题的数学模型	89
第二节 目标规划的求解	90
一、目标规划问题的图解法	90
二、目标规划的单纯形算法	93
本章小结	97
习题四	98
第五章 整数规划	100
第一节 整数规划问题及其数学模型	100
第二节 整数规划的求解	103
一、解法概述	103
二、0-1 规划解法	104
三、分枝定界法	106
四、割平面法	109
本章小结	115
习题五	115
第六章 动态规划	117
第一节 动态规划的基本原理与基本概念	117
一、多阶段决策问题	117
二、基本概念	118
第二节 动态规划的模型建立与求解	118
一、最短路问题(shortest-route problem)	118
二、动态规划的函数方程(DP equation of recursion)	121

三、贝尔曼(Bellman)最优化原理	121
四、动态规划的特点	121
第三节 动态规划的应用	122
本章小结	128
习题六	128
第七章 存储论	131
第一节 问题引入	131
第二节 确定性库存	133
第三节 随机性库存	137
第四节 动态库存	139
一、动态规划解法	139
二、SM 启发式算法	141
本章小结	143
习题七	143
第八章 图与网络分析	145
第一节 树图	145
一、图的基本概念	145
二、最小生成树问题(minimal spanning tree problem)	147
第二节 最短路问题	148
第三节 最大流问题(maximal flow problem)	151
一、基本概念	151
二、最大流最小割定理	153
三、最大流算法	153
第四节 最小费用流问题	156
第五节 网络计划问题	156
一、网络计划基本概念	157
二、网络计划参数(network parameter)计算	158
三、图算法——一种简单有效的方法	159
四、网络计划的费用优化	160
五、网络计划的时间优化	164
六、网络计划的资源优化	168
七、计划协调技术	175
本章小结	177
习题八	178
第九章 决策分析	182
第一节 决策分析的基本问题	182

一、科学决策程序	182
二、决策要素	182
三、决策分类	183
第二节 不确定型决策(uncertain type decision)	184
一、构成不确定型决策的基本条件	184
二、不确定型决策准则	184
第三节 风险决策(risk type decision)	188
一、风险型决策	188
二、解决风险决策的基本原则	188
三、决策树法(decision tree method)	189
第四节 效用理论(utility function)	192
第五节 马尔可夫决策(Markov decision)	193
一、基本概念	193
二、实例	195
本章小结	197
习题九	198
第十章 对策论	201
第一节 对策论概述	201
一、案例	201
二、对策的三要素	202
第二节 矩阵对策	202
一、矩阵对策的数学模型	202
二、最优纯策略	203
三、混合策略与混合扩充	205
四、矩阵对策的一般解法	207
第三节 其他对策	211
一、两人有限非零和对策	211
二、非合作两人有限非零和对策的解法	212
三、混合策略意义下纳什均衡解	213
本章小结	214
习题十	214
第十一章 排队论	217
第一节 排队论基本概念	217
一、排队系统(queueing system)类型	217
二、排队系统的描述	218
第二节 排队论研究的基本问题	221

一、M/M/1 等待制排队模型	221
二、M/M/S 等待制排队模型	223
本章小结	224
习题十一	225
第十二章 模拟与预测	227
第一节 模拟	227
一、模拟问题的提出	227
二、模拟的基本概念	228
第二节 预测	233
一、预测的基本概念	233
二、定性预测方法	234
三、时间序列技术	240
四、回归分析法	244
本章小结	250
习题十二	250
第十三章 非线性规划	252
第一节 非线性规划的基本概念	252
一、模型分类	252
二、非线性规划研究的主要内容	253
三、基本概念	253
第二节 最优性条件	254
一、无约束问题的最优性条件	255
二、带不等式约束问题的最优性条件	256
三、一般问题的最优性条件	256
四、算法概述	256
第三节 无约束问题的优化方法	257
一、研究意义	257
二、基本概念	257
三、搜索法(search method)的算法步骤	258
四、最速下降法(梯度法)(steepest descent method)	261
本章小结	263
习题十三	263

进 展 篇

第十四章 复杂网络	267
第一节 复杂网络的统计特征	268

一、度、平均度、度分布	268
二、距离、平均路径长度、介数	269
三、聚集系数	269
第二节 小世界网络	270
一、小世界网络的算法与特性	270
二、小世界网络的实例	272
第三节 无标度网络	274
一、无标度网络的算法与特性	274
二、无标度网络的实例	277
第四节 社会网络及社会网络分析	278
一、社会网络的构成	279
二、社会网络分析的实例	283
第十五章 软优化	287
第一节 遗传算法	287
一、基本遗传算法	287
二、遗传算法实现技术	288
第二节 模拟退火	292
一、金属物体分子状态分布	292
二、基本模拟退火算法	294
三、模拟退火算法实现技术	295
第三节 神经网络	296
一、人工神经网络	297
二、函数逼近	297
三、反向传播算法	298
四、霍普菲尔德(Hopfield)人工神经网络	299
第四节 模糊优化	302
一、模糊变量	302
二、模糊期望值模型	304
三、模糊机会约束规划模型	305
四、混合智能算法	306
第十六章 软运筹学	310
第一节 为什么提出软运筹学	310
第二节 软系统方法论	311
第三节 战略假设表面化与验证(SAST)	313
第四节 生存系统模型(VSM)	314
第五节 物理、事理、人理系统方法论	316

一、WSR 方法论的工作过程	317
二、运用 WSR 方法论时遵循的一些原则	318
三、WSR 方法论的应用	319
四、WSR 理论和方法的进展	320
参考文献	321
第十七章 多主体系统仿真建模	322
第一节 多主体系统仿真建模的起源与发展	323
第二节 多主体系统仿真建模的方法与应用	325
一、多主体系统仿真建模的方法	325
二、多主体系统仿真建模的应用	327
第三节 多主体系统仿真建模的工具与平台	329
一、StarLogo	329
二、NetLogo	330
三、Repast	331
四、Ascape	332
五、Swarm	333
第四节 多主体系统仿真建模的实例与分析	334
一、MAS 仿真在旅客运输量变化分析中的研究与应用	334
二、MAS 仿真在出租车罢运事件中的研究与应用	338
三、MAS 仿真在社会舆论问题中的研究与应用	340
第十八章 供应链网络设计	350
第一节 背景介绍	350
第二节 预备知识	351
一、可信性理论	351
二、问题描述	352
第三节 不确定环境下供应链网络设计模型	354
一、最小期望费用模型	354
二、机会约束模型	355
三、机会最大化模型	356
第四节 混合智能算法	357
一、遗传算法	358
二、混合智能算法	358
第五节 数值例子	359
附录一 WinQSB 软件与运筹学实验指导	363
第一节 WinQSB 软件操作指南	363
一、安装与启动	363

二、与 office 文档交换数据·····	363
三、WinQSB 软件包 ·····	363
第二节 课程实验指导·····	364
一、线性规划问题 ·····	364
二、动态规划问题 ·····	370
三、背包问题 ·····	371
四、运输问题 ·····	373
五、最小树、最短路与最大流问题 ·····	376
六、整数规划 ·····	379
七、目标规划 ·····	380
八、网络计划技术 ·····	383
九、决策分析 ·····	390
十、对策论 ·····	394
十一、存储论 ·····	396
十二、排队论 ·····	400
附录二 运筹学名词词典·····	402

绪 论

1. 运筹学的历史

运筹学(Operational Research)在 20 世纪 30 年代末起源于英国,很快美国也跟上,但用了 Operations Research,它们的英文简写都是 OR。在英国,运筹学最早是在第二次世界大战研究武器和装备的合理运用时,帮助领导决策而逐渐形成的一门学问。武器和装备的设计主要是靠工程技术人员的技术方面的研究,但到了它们的运用就不单是技术问题而是涉及武器运用的方法、所应用的环境、使用武器的双方、决策者乃至人员心理等因素。由于这门学问当时与军事有关,因此有些内容保密了,到 20 世纪 40 年代末至 50 年代初,其中一些与军事密切相关的内容才逐渐公开出来,其中莫尔斯(P. M. Morse)与金博尔(G. E. Kimball)1951 年发表的《运筹学方法》(*Methods of Operations Research*)可以作为那段时期重要工作的总结^[1]。至于其中某些分支,特别与运筹数学和其他管理与决策理论较为密切的一些分支,如排队论(1909)、兰彻斯特方程(1914)、搜索论(1942)、对策论(1944)、线性规划(1939,1947)、最短路问题(1950)、质量控制(1950)、决策分析(1950)、模拟/军事博弈(1950)、非线性规划(1951),更早就已出现,后来逐步演化成运筹学的一些分支。随后运筹学的其他分支不断出现,如存储理论(1953)、随机规划(1955)、动态规划(1957)、整数规划(1958)、目标规划(1965)、软系统方法论(1972)、多目标决策(1975)、数据包络分析(1978)、椭圆法(1979)、层次分析法(1980)、内点法(1984)等^[2]。

早期运筹学的发展,与当时军事需要密切相关。例如,首先是雷达的应用问题,1936 年英国空军部门为了对付德国的空中进攻,研制了雷达,希望能够起到早期发现敌机并及时消灭对方的作用。可是雷达获得到的数据无法真正使用,由此早期工作就是企图将雷达的数据与地面观测数据相集成,从而开始了 OR 的研究运用。当时,经过了大量实验来改进雷达的运用,也是从这个雷达研究团组里形成了运筹学的第一个小组。1939 年夏最后一次空防实验涉及 3 万 3 千人、1300 架飞机、110 架高炮等,最后表明空防预警和控制系统的运用很成功。运筹小组的贡献受到空军元帅的认可,以至原来叫做“Stanmore 研究部”后改为“运筹部(Operational Research Section)”,后来在空军司令部其他部门也成立类似的“运筹部”。之后海军又遇到了其他的军事运用问题,如如何对付德国的潜艇,飞机怎样去搜寻潜艇,找到了又如何去摧毁它,也即提高杀伤概率(当时(1941 年)只有 2%~3%)。当时杀伤潜艇的一个重要兵器是投掷深水炸弹,涉及 6 个因素要考虑,如深水炸弹应该在怎样的深度爆炸效果最好等。其中最著名的是运筹部经过研究将爆炸深度由原来的 30~45 英尺改为 10 英尺,最后定为 8 英尺,到 1945 年杀伤概率达到 45%。此外他们还帮助解决了一些后勤组织问题,如飞机维修与检查的问题。他们设计了一套系统使得飞行时间可以增加 61%^[3]。1942 年,美国军方先后成立类似 OR 小组,其工作成果也非常辉煌,使世人对于 OR 有了深刻的认识与了解。第二次世界大战结束,百废待

兴。到 1945 年后,运筹学开始从军事应用转向民用,英美工商企业界于是运用 OR 技术于各行各业的复建工作,并且积极培养 OR 人才,OR 技术广泛应用于计划、生产、存储、市场、财务、人力等方面,使有限的资源作最佳的调配,并提高效率、降低成本与减少风险。特别是在英国的煤炭工业、钢铁公司,一直到 20 世纪 60 年代的制造业方面的应用。此外在航空工业、铁路、城市运输和公用事业以至原子能发电等方面都有应用^[4,5,6]。

20 世纪 50 年代许多发达国家已在大学讲授 OR 课程,到了 60 年代其发展更加完善,许多大学专为它设立学系或研究所等并授予学位,如著名的哈佛、密执安、斯坦福等名校。许多理、工、商科系还将 OR 列为必修、必选或选修课程。目前,现代化的大型企业大多雇有 OR 研究人员,从事各项业务的决策分析工作^[6]。

2. 什么叫运筹学

Operations Research 原意是操作研究、作业研究、运用研究、作战研究,在中国内地曾译作运用学,20 世纪 50 年代中期中国老一代运筹学家考虑到 OR 已经发展成不单考虑设备、武器的运用,而且考虑到有筹划、设计和计划的应用,特别在中国认为 OR 应在国民经济计划方面得到应用,同时借用了《史记》“运筹于帷幄之中,决胜于千里之外”一语中“运筹”二字,既显示其军事的起源,也表明在我国古代 OR 已早有萌芽,后来正式译作运筹学。在台湾地区将 OR 译成作业研究,这只能算直释。而在日本直接用片假名オペレーションズ・リサーチ注音了事,直到 1975 年中国运筹学代表团访日时,介绍了中国的汉释名,引起日方一些运筹学家的注意,在他们的书上介绍了这个“运筹学”汉字释名,还真夸奖了一番^[5~7]。

运筹学作为一门现代科学,是在第二次世界大战期间在英美两国发展起来的,有的学者把运筹学描述为就组织系统的各种经营作出决策的科学手段。莫尔斯与金博尔在他们的奠基作中给运筹学下的定义是:“运筹学是在实行管理的领域,运用数学方法,对需要进行管理的问题统筹规划,作出决策的一门应用科学。”^[1] 运筹学的另一定义是:“管理系统的人为了获得关于系统运行的最优解而必须使用的一种科学方法。”它使用许多数学工具(包括概率统计、数理分析、线性代数等)和逻辑判断方法,来研究系统中人、财、物的组织管理、筹划调度等问题,以期发挥最大效益。

INFORMS(Institute for Operations Research and The Management Sciences, 运筹学和管理学研究协会)给的定义是“运筹学,又称管理学,是通过观察组织的运行方式,使用数学模型、计算机模型和其他多种分析工具来统筹规划,作出最佳决策的一门应用科学”。INFORMS 是由美国运筹学研究者组成的专业协会,它是国际运筹学会联合会成员之一。(http://www.informs.org.cn/news.html, 2010-7-30)

英国 OR 学会(Operational Research Society)把 OR 定义如下:

“OR 是指应用科学方法,处理工业、商业、政府、国防系统中因指挥和管理一大群人、机器、原料和资金而产生的复杂问题。这种独特的方法要发展这些系统的科学模式,衡量概率和风险等因素,用它们来预测和比较各种不同的决策、策略或控制的结果。其目的是协助管理阶层以科学方法来决定政策和行动。”^[6]

更为一般的定义:运筹学是将科学方法应用于决策。

3. 运筹学的方法论

比较早期且比较完整介绍运筹学方法论的是丘奇曼、阿可夫和阿努夫在 1957 年出版的《运筹学导论》一书^[8]。其他的书有的略有增改,大意相同,这里主要介绍丘奇曼等介绍的 6 步:①形成问题;②构造模型;③模型求解;④解的检验;⑤解的控制;⑥解的实施。只是后来有不少运筹学家把研究精力放在构造模型和模型求解方面,以至于离开解决实际问题越来越远。

1) 形成问题

从研究对象中找出要解决的问题是能正确解决问题的第一步。第二次世界大战中,为了保护商船不被敌机炸掉,就提出了一些措施,有人提出在商船上装上高炮来攻击敌机,然而商船毕竟不是兵舰,因此高炮击中敌机的命中率只有 4%,远不如装在兵舰或者陆地上命中率高,于是,另外一些人就反对在商船上装高炮。但是有人提出装高炮本来不是为了用来打飞机,而是为了保护商船,于是就去比较装与不装高炮后商船被敌机击沉率分别为 10%和 25%,结果发现装高炮后商船被敌机击沉率大大降低,问题也就迎刃而解。要正确解决问题一般要弄清问题症状,搞清目标、约束条件和用户的一些需求。另外,有时问题太大也需要将之分解成若干子问题,加以区别轻重,并分别地加以解决或者暂时不予解决。

2) 构造模型

由于实际问题往往开始只有定性的描述,而且主次难分,为了得到定量的解决,在运筹学中经常要建立各种定量和定性模型,当然以定量模型为主。从数学上来分,模型有决定性的和随机性的,有连续的和离散的,有线性的和非线性的,有静态和动态的,有解析的和数字模拟的,还有不带竞争的和带竞争的模型。另外,还有用运筹学分支学科命名的模型,如线性规划模型、非线性规划模型、网络模型、模糊数学模型和投入产出模型等;以应用对象来命名的模型,如经济模型、能源模型、生态模型、运输模型、存储模型、区域规划模型等。在形成任何模型时,除了要考虑问题本身的特征外,有时还要考虑有没有求解的方法及数据的可获得性。运筹学工作者的一个重要本领就是根据问题的性质去选择以至创造出合适的模型。

3) 模型求解

不同的模型需要用不同的解法,如资源分配问题往往用线性规划模型来描述,而线性规划一般就用单纯形法来求解,而工厂选址问题往往用混合整数规划去求解。例如,我们在解决一个天津市××行业调整的问题时,开始就化成一个有 3000 个连续变量和 15 个整数变量的混合整数规划,可是在当时(20 世纪 80 年代)我们在一个石油部门的计算中心计算时,如果不考虑一定要用整数解而只用一般线性规划时,只用 10 分钟就出了结果(不过解不是整数的),当时机时费 200 元。而用真正的混合整数规划去解(当时用分枝定界法),结果花了 5000 元半天的时间最终结果仍未出来,最后只好停机了事,采用适当的取整的方法来定解。当然,现在随着计算机性能的大大提高,先进的算法不断出现(如线性规划有了内点法,速度比单纯形法要快很多倍),更重要的是许多运筹学方法的软件包的出现,使一般中、小规模问题在一般计算机上都可解决。

4) 解的检验

由于模型毕竟不是现实本身,而只是现实的一个简化的抽象,同时由于算法的程序和数据的问题,得到的解不一定对和好用,这就需要验证(verification)和验实(validation)。前者主要是算法、程序和数据,以至使用的计算机本身的验证,看看求出的解是否正确(在一定误差范围内)。后者主要看是否能解决实际问题,一般要靠用户配合。

5) 解的控制

要保证有高精度的解的使用,其实还有一个解的控制问题。有时用户希望找到的最优解有一个较宽的范围,这样反而好控制。例如,有一个为工厂找最佳温度的优选法试验,当找到最优解时,控制温度的工人希望除了告诉他们最优解外,还希望有一个较宽的带,以便实际控制。因此,有时做一下解的灵敏度分析对解的控制是有用的。

6) 解的实施

由于模型毕竟只反映问题的主要方面,因此用它求出的解不可能被实际部门全部照搬,有时解要修改。例如,我们为一个农业研究部门寻找猪饲料的最佳配方,当我们按照他们提供的各种饲料的营养成分和价格等基本数据,在满足各种营养需求下,求最低成本的饲料组合的构思时,用线性规划方法很快找到了最优解,并将此解提供给用户,谁知用户竟要求我们把次优解和次次优解也给他们。我们问他们为什么不直接用最优解,他们的回答是就是不知道猪爱吃不爱吃。多几个优解好多几个选择。另外一个值得注意的是训练与教育问题,好的东西还要有好的教育相配合。必须让用户能明白我们的解,会使用我们的解。有时还要解决使用我们解的动力。20世纪70年代,我们曾经应国家计委要求推广应用合理下料以节省原材料,同事们采用了整数规划的合理下料模型,应用了 Gomory 的算法,编制了程序,也到北京一个汽车厂去试了点,他们用整张钢板为汽车门的部件下料,由于他们采用的是单一下料法,简单而不省料,而我们用运筹学方法——混合优化下料确实省了材料——钢板。但是后来据说车间没有采用,他们有两个理由:一个是混合下料增加了下料工加工时的难度和强度;另一个理由却是我们无法想到,那就是以前的下料法,去掉的边角料正好是他们附属家属灯具厂的原料,而采用优化方法后的边角料太小,对大厂讲是省了,对小厂讲却不能废物利用了,反而要去买整张的钢板了,最后只好不了了之。这里也反映了要使解能顺利实施必须及早与用户沟通,听取他们的意见和及早让他们了解我们运筹学工作者的意图。

4. 运筹学的主要分支

运筹学发展至今形成很多方面和分支,就运筹数学来讲可分决定性的和随机性的。

决定性的有线性规划,整数规划,非线性规划,多目标规划,动态规划,图与网络,存储论等。

随机性的有排队论,随机规划,对策论,决策分析,维修、更新、可靠性和质量管理,搜索论,模拟等。

1998年,中国运筹学会提出运筹学学科分类意见,在一级学科“运筹学”下设15个二级学科:它的基础学科分支有规划理论、随机运筹理论、组合与网络优化理论、决策理论;它与其他学科的交叉分支有计算运筹学、工程技术运筹学、管理运筹学;它的应用学科分

支有工业运筹学、农业运筹学、金融市场保险运筹学、交通运输运筹学、公用事业运筹学、军事运筹学、资源生态环境运筹学、生命科学运筹学。并在各二级学科下,再列出 40 多个三级学科。

有人曾对美国各个运筹学分支应用情况作了一些统计,由于绝对数随着不同年代和不同人的统计方法不同不一定太准,但是其相对排序还是清晰的,按应用多少排序如下:统计、模拟、网络计划、线性规划、排队论、非线性规划、动态规划和对策论。在中国,随机抽样调查结果基本相同。不过,近年来对策论应用开始增多。

5. 运筹学的进展

美国前运筹学会主席邦迪(S. Bondar)曾提出运筹学可以分成三大方面:运筹数学、运筹应用及运筹理论,并强调发展后两者。从整体来讲这三个方面应协调发展,才能解决经济、技术、社会、心理、生态和政治等综合因素交叉在一起的复杂系统。也就是要从运筹学进展到系统分析,并与未来学紧密结合以解决人类所面临的困境。解决问题的过程是决策者和分析者发挥其创造性的过程,这也就是进入 20 世纪 70 年代以来人们越来越对人机对话的算法感兴趣的原因。在 20 世纪 80 年代一些重要的与运筹学有关的国际会议中,大多数人认为决策支持系统(decision support system, DSS)是使运筹学发展的一个好机会。总之,运筹学仍在不断的发展,新的思想、观点和方法层出不穷^[9]。

20 世纪 80 年代到 90 年代对于运筹学有两个重要进展必须提到,一个是软运筹学(soft OR)的崛起,以切克兰特(P. Checkland)的软系统方法论和罗森海特(J. Rosenhead)的问题结构法等为代表的一批新的方法论出现,一直到 1989 年罗森海特编的书,由于囊括了一批与软运筹学有关的论文,后来被称为软运筹学的圣经^[10]。顺便指出美国运筹学界总体讲不太愿意提软运筹学,前不久英国运筹学界和国际上,包括美国部分学者还批评了美国运筹学杂志不太愿意发表软运筹学方面的文章。不过后来美国运筹学杂志表示接受这个批评。

另一个是软计算(soft computing)的崛起,它允许不太精确、不确定性、部分真理和近似等。软计算可以以比较低的代价提供一定程度的可用解。软计算与过去计算方法的不同之处在于吸取了人的智慧和判断(各种启发式(heuristic)方法、模糊逻辑(fuzzy logic),生物方面的知识(遗传算法(genetic algorithm)、进化规划(evolutionary programming)、蚁群算法(ant colony optimization, ACO)、人工神经网络(artificial neural network)),物理方面的知识(模拟退火法(simulated annealing, SA)。扎德(L. Zadeh)在 1991 年指出人工神经网络、模糊逻辑及遗传算法与传统计算模式的区别,将它们命名为软计算。近年来,文献中将混沌理论、模拟退火算法和概率推理(probabilistic reasoning)等也归入软计算,在运筹学中更关心它们在优化问题中的应用,因此为区别于比较好的有解析表达式时用的优化方法而称之为软优化。^[11]

6. 运筹学应用举例

运筹学早期应用主要偏向军事方面。第二次世界大战后,向更宽的领域发展,如民用企业,公共事业,生产管理,大型设备的设计、制造和管理,以及地区发展战略。另外,也更

紧密地与计算机和通信系统等结合。例如,存储理论的应用已经从车间、工厂规模转向整个从用户、零售、批发、中间运输一直到工厂生产供应,形成现在的供应链的设计、管理和应用。在武器和大型装置方面,不单研究其运用方面,更转向设计和规划等方面。此外,在银行、医院、经济、运输、信息系统、电子商务和电子政务等方面也都有了新的应用。由于涉及面太多,我们只想用美国运筹学和管理学研究协会组织办的埃德曼(Franz Edelman)奖的几个例子供大家参考。该奖由世界著名的运筹和管理科学家埃德曼于1971年创立。这个奖每年评一次,先评出一批候选奖,然后选出5或6名提名奖,最后从中评出一个最佳奖。埃德曼奖的评选原则包括对运筹学和管理科学理论和方法的创新、应用工作对企业创造的直接经济效益,以及对社会和人类生活所作的积极贡献。评选的程序相当严格,竞争也非常激烈。全世界各个国家的科学家和企业家都可以申请这一奖项,如2002年有30多个项目进入了初评。经过严格的筛选,法国标致汽车公司、美国糖果制造巨商玛氏公司、美国大陆航空公司、德国雷纳尼亚(Rhenania catalog house)、美国迅达电梯公司,以及美国先正达农业企业得到提名,进入终评。在这6个项目的激烈角逐后,于刚教授领导的项目小组由于在大陆航空公司等民用航空企业所创造的实实在在的经济效益和对社会和人们生活所作出的贡献,成为2002年度大奖的获得者。于刚教授提交的项目内容主要是当民航航班受到各种干扰之后,航班机组人员如何以最快的时间和最佳的组合来使航班恢复正常运营。他领导开发的实时决策支持系统多年来已在美国的联合航空公司、大陆航空公司、西北航空公司和西南航空公司运行。这些系统在一系列影响航班正常运营的重大事件时起到了极大的作用,如2000年12月和2001年3月美国北部的暴风雪、2001年休斯敦的大洪水,这些对航班运营和管理所造成的重大影响都在于刚教授所领导开发的系统的支持下,将损失降到最低程度。特别是对于2001年“9·11事件”所造成的影响,于刚教授和他创办的CALEB公司为美国大陆航空公司挽回了至少3000万美元的损失。而他在2001年全年为该公司所创造的实际价值就超过了6000万美元^[12]。下面我们再介绍2008年度的6个最终提名奖以及该年度大奖获得者荷兰铁路及其主要成果^[13,14]。

1) 美国联邦航空局(Federal Aviation Administration, FAA)

(1) 所提出报奖项目:空域流的规划“Airspace Flow Programs”(AFP)。

(2) 问题:联邦航空局经常发现由于天气不好使飞行空域的能力下降,局里希望在保证安全的前提下要求有效的管理,使整个空中交通量被打断得最少。而在2006年6月前局里还缺少一个合适的工具。

(3) 运筹学解决方法:2006年6月,局里采用了一个叫空域流规划的工具。这个工具使局方有能力在拥挤的空域中使每架飞机在地面延误减少,使得在空域中飞行转移数保持在一个可接受的水平。

(4) 价值:分析表明在2006年有19天、2007年有25天用来对付恶劣的天气。最终每天可减少近270万美元的延误费。这样在2006年得益5050万美元,2007年得益6750万美元,而开发整个软件却少于200万美元。

2) 荷兰铁路(Netherlands Railways)

荷兰铁路是欧洲最忙的路。

(1) 所提出报奖项目:荷兰火车新时刻表:一场运筹学革命“The New Dutch Timetable; The O. R. Revolution”。最后该提名奖获得 2008 年年度大奖。

(2) 问题:到 2006 年,荷兰的铁路从 1970 年的 80 亿人千米增加到 154 亿人千米。在不改变时刻表的结构情况下,要求计划有更多的火车发出。2006 年,荷兰铁路要求开发一个新的时刻表。

(3) 运筹学解决方法:运筹学工作者构建了一个改进的、循环的时刻表,它每一小时可以重复。构造这样的时刻表是需要求解一个复杂的组合优化问题,设计了 4 个求解程序:①CADANS 求解网络时刻表问题;②STATIONS 找出火车通过各个站时详细的路径;③ROSA 处理铁路车辆的周转;④TURNI 对乘员的时刻表安排。

(4) 价值:从 2007 年对旅客数进行全时的记录。随着最大的时刻表的改进,旅客数增加了 10%~15%。在时刻表的规定时间内,火车准点到达率(指误差在 3min 之内)从 2006 年的 84.8%提高到了 2007 年的 87.0%。调查表明,公众意见很快从负面转向正面肯定,每年增加了 4000 万欧元的利润。估计明年可增加到 1 亿零 500 万欧元,在现有网络下还有可能减少拥堵和污染。

3) 挪威国家石油海德罗(StatoilHydro)

挪威国家石油海德罗是一家挪威能源公司,由挪威国家石油和挪威海德罗公司油气部门于 2007 年合并建立。它是世界上最大的离岸石油天然气公司,也是北欧地区收入最高的公司。公司生产点分布在 18 个国家,销售则在 8 个国家进行。

(1) 所提出报奖项目:优化北海的天然气海岸管道系统“Optimizing the Offshore Pipeline System for Natural Gas in the North Sea”。

(2) 问题:挪威大陆架上的天然气运输网络是世界上最大的海岸管道系统。它承担着欧洲 15%的天然气流量。公司希望保证天然气的供应安全,要求为管道的网络的分析 and 最佳运行提供一个更好的工具。

(3) 运筹学解决方法:运筹学工作者开发了一个被称为 GassOpt 的工具,它用于提供中长期计划的决策支持,内容涉及核定天然气质量范围,检查不同天然气流混合的可能方案,支持在保证天然气的质与量的情况下,年运行和维修计划的制订。

(4) 价值:这个运筹学工具为系统运行提供了模型,应用它累计节省了大约 18 亿美元。

4) 瑞典斯德哥尔摩市

(1) 所提出报奖项目:运筹学改进社会医疗和家庭帮助的质量和效率“Operations Research(O. R.)Improves Quality and Efficiency in Social Care and Home Help”。

(2) 问题:由于瑞典老年人口占总人口比例越来越大,老年医疗系统面临的耗费日增。瑞典的体制是靠公共财政支出,到 2005 年,纳税人已为之支付 130 亿美元,经费主要用于调度去家庭帮助照顾的工人以满足病人的各种需求。

(3) 运筹学解决方法:在 2002 年,为瑞典 Danderyd 市曾开发了一个利用运筹学的模型,叫 Laps Care 的系统,后来在瑞典将近 200 个单位使用。到 2006 年,在斯德哥尔摩市全部采用。

(4) 价值:将近 200 多个单位每天都在用来规划近 4000 个家庭医疗人员的调度和指定路程,运行效率提高了 10%~15%。这相当于每年节省 2000 万~3000 万欧元。在 2008 年应用单位将会超过 1200 个,涉及雇员将近 2 万人,中等的估计可节省 7500 万~1 亿零 500 万美元。

5) 美国环境保护署(The U. S. Environmental Protection Agency)

(1) 所提出报奖项目:减少美国饮水系统的安全风险“Reducing Security Risks in American Drinking Water Systems”。

(2) 问题:横跨美国的饮水系统的物理布局极易受恐怖活动的损害,如毒剂的污染可以导致大量的伤亡事故和经济损失。

(3) 运筹学解决方法:作为威胁效果致命性评估(threat ensemble vulnerability assessment, TEVA)研究计划的一部分,开发了一个传感器布放优化工具 TEVA-SPOT,它使用的整数规划启发式算法可用于设计污染警报系统,它可以很快地侦察出可能的恐怖行动,以及其他对国家水供应的威胁。

(4) 价值:美国环境保护署已经开发了 TEVA-SPOT 软件工具可用于很多大型设备,也为 8 个大型设备设计了污染警报系统。一些超过上百万用户的市也应用该软件工具,这个工具可以在台式计算机上运算,时间从几分钟到几小时。设计好的污染警报系统可以减少恐怖威胁对健康的影响达 90%,且可以减少数十亿美元的经济损失。

6) 施乐(Xerox)

(1) 所提出报奖项目:精益文件生产-印刷工业的生产率大幅度地改进“LDP Lean Document Production®-Dramatic Productivity Improvements for the Printing Industry”。

(2) 问题:在美国,每年印刷工业产生价值达上千亿美元,但是生产实践表明,随着需求的增加,品种增多且工序复杂,已经跟不上形势,其结果是印刷厂生产率和效率十分低下。

(3) 运筹学解决方法:施乐的精益文件生产是一种基于模拟的印刷生产运行框架,它利用自治小组的概念和层次动态时间表结构来安排任务的路径和过程。

(4) 价值:施乐的精益文件生产使生产率提高,成本减少。实施至今已提高生产率 40%,劳动力节省了 20%,循环时间减少超过 50%。自从用了施乐的精益文件生产后,给施乐带来的利润约 2 亿美元。此外,施乐由此而申请的专利有 48 项,其中 11 项已经发表。

中国的运筹学在 20 世纪 50 年代就有了很好的应用,其中最著名的“粮食调运”、“打麦场设计”、“中国邮路问题”是典型的成果。当时发现了粮食部门调度系统职工自己发明的图上作业法快速简便,其结果与西方的运输问题解出的一样,后来中国学者又集体地证明了图上作业法在数学上的正确性。中国邮路问题受到国际上的关注和认可。中国的农业运筹学应用也受到了国际同行的称颂。在 60 年代,华罗庚在全国各地推广的优选法和统筹法又走出了一条发动群众来搞运筹学的出色的应用范例。顾基发在 1975 年的国际运筹学协会年会上介绍优选法在中国的应用,受到与会代表很高的赞誉,因为没有一种运筹学方法在国际上能得到这么多普通群众如此广泛的认同和应用。自从国际运筹学协会 1987 年设立发展中国家的运筹学奖(简称“运筹学进展奖”)后,中国已有王毓云的论文

“中国黄淮海农业与资源的布局与发展”获提名奖(1987),章祥逊、崔晋川的论文“中国经济信息系统的项目评估系统”获一等奖(1996),刘光中、徐玖平等的论文“长江上游生态发展”获二等奖(1996),陈锡康等的“中国粮食产量预测”获一等奖(1999),赵庆楨、王长钰等的“运筹学在农业管理中的应用”获二等奖(1999),沈吟东、夏家宏的“基于区域运营模式的北京公交集团整体公交调度计划”获二等奖(2005)^[15]。2000年,刘源张获亚太质量组织授予的“哈灵顿-石川”奖,以表彰他在理论与实践上为质量工程和管理所作的贡献。

近年来,中国运筹学工作者继续坚持运筹学研究与经济建设等重大问题紧密结合。例如,在山东省与大连市经济发展计划的制订,兰州铁路局铁路运输的优化安排,中外合资经营项目的经济评价,若干国家重大工程中的综合风险分析等方面,中国运筹学工作者都发挥了积极作用。此外,他们还关注到信息科学、生命科学等现代高科技中一些运筹学起作用的新的工作方向。例如,将全局最优化、图论、神经网络等运筹学理论及方法应用于分子生物信息学中的DNA与蛋白质序列比较、芯片测试、生物进化分析、蛋白质结构预测等问题的研究;在金融管理方面,将优化及决策分析方法应用于金融风险控制与管理、资产评估与定价分析模型等;在网络管理上,利用随机过程方法,研究排队网络的数量指标分析;在供应链管理问题中,利用随机动态规划模型,研究多重决策最优策略的计算方法。在这些重要的新方向上,中国运筹学工作者都取得了可喜的进展及成绩,其中有一些成果已进入国际先进水平的行列。^[16]

参 考 文 献

- [1] Morse P, Kimball G E. Methods of Operations Research. New York: John Wiley & Sons, 1951. 莫尔斯 P, 金博尔 G. 运筹学方法. 吴沧浦译. 北京: 科学出版社, 1988.
- [2] Kirby M. K. Operational Research in War and Peace: The British Experience from the 1930s to 1970. London: Imperial College Press, 2003. —Reviewed by William M. McBride.
- [3] Beasley J E. OR-Notes. <http://people.brunel.ac.uk/~mastijb/jeb/or/contents.html>. 2010-07-27
- [4] Gass S I. Side story: great moments in History. OR/MS Today, October 2002.
- [5] 中国科学院力学所运筹学组. 一门崭新的科学-运筹学. 北京: 科学普及出版社, 1958.
- [6] 互动百科: 作业研究-起源. <http://www.hudong.com/wiki/%E4%BD%9C%E4%B8%9A%E7%A0%94%E7%A9%B6>. 2010-07-27
- [7] 近藤次郎. オペレーションズ・リサーチ入門. 东京: 日本放送出版协会, 1978.
- [8] Churchman C W, Ackoff R L, Arnoff E L. Introduction to Operations Research, New York: John Wiley, 1957.
- [9] MBA 智库百科: 作业研究. <http://wiki.mbalib.com/wiki/%E4%BD%9C%E4%B8%9A%E7%A0%94%E7%A9%B6>.
- [10] Rosenhead J. Rational Analysis for a Problematic World: Problem Structuring Methods for Complexity, Uncertainty and Conflict. New York: John Wiley, 1989. 2nd revised edition in 2001.
- [11] 软计算. <http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%BD%AF%E8%AE%A1%E7%AE%97>. 2010-05-07
- [12] 热烈祝贺于刚教授荣获 Franz Edelman 奖. web.gdut.edu.cn/~liuhw/course/or/1.1.html.
- [13] The Edelman Award. <http://www.scienceofbetter.org/Edelman>. 2010-07-27

- [14] World's Best Analysts-Edelman Prize Competition in Operations Research & Analytics. <http://www.informs.org/article.php?id=1356>. 2008-02-07
- [15] IFORS prize for OR development. http://www.ifors.org/contents/prize_for_OR_development.html. 2010-07-12
- [16] 陈建平. 运筹学基础. http://www.hpcollege.net/ycx/index_1.html. 2010-04-08

基 础 篇

第一章 线性规划

线性规划(linear programming)是运筹学的一个重要分支。它是由于生产中计划安排、资源分配及军事后勤等实际问题需要而形成的一类规划方法。1939年,苏联数学家康托洛维奇(L. V. Kantorovich)最早发表了《生产组织与计划中的数学方法》一书^①,首次提出了用线性方程表达的优化问题,并提出一种称解乘数的方法来求解这类问题。以后美国学者希奇柯克(F. L. Hitchcock, 1940)^②和柯普曼(T. C. Koopman, 1949)^③又独立地提出了运输问题,也是用线性方程表达的优化问题。特别是美国学者丹齐克为了帮助空军解决一些后勤运输、训练、人员安排等军事上称为“programming”方面的问题,而用更完整的数学形式表达出来,后来柯普曼在1948年丹齐克访问美国著名的顾问公司“兰德公司”(RAND Corporation)时,就称之为线性规划。丹齐克特别提出了单纯形法来求解这类规划问题^④,由此线性规划在理论上趋向成熟。1963年丹齐克写成 *Linear Programming and Extension* 一书。线性规划的算法后来也有不少新的发展,不过基本上是以单纯形法为核心作出不同的改进而已。线性规划的计算需要计算机的帮助,随着应用范围越来越宽,问题的规模越来越大,解线性规划问题所占的机时越来越多,有一个说法是它占了计算机算题所有机时的一半。但是有人后来发现从计算复杂性角度来研究,线性规划问题单纯形法也可能是属于非多项式算法,这样随着求解问题的规模增大,计算时间会以指数增长。1979年,苏联年轻的科学家哈奇扬(L. Khachian)提出了解线性规划的一个新算法——“椭球法”,而且理论上证明是多项式算法,但是实际计算时发现椭球法并不理想,还不如单纯形法好用。1984年,在美国贝尔实验室工作的印度科学家卡玛卡(N. Karmarkar)提出了另一个新的多项式算法——“投影梯度法”,有人称它内点法,也称Karmarkar算法,其计算速度比单纯形法快数十倍,这使得线性规划问题无论在理论上还是在算法上都取得了重大的进展,只是方法的程序一直不肯公开,因此目前国际上大家仍然首推单纯形法,而且它的计算机软件较为公开好用。

线性规划通常研究资源的最优利用、设备的最佳运行等问题。例如,当任务或目标确定后,如何统筹兼顾,合理安排,用最少的资源(如资金、设备、原材料、人工、时间等)去完成确定的任务和目标;企业在一定的资源条件限制下,如何组织安排生产获得最好的经济效益。

① Kantorovich L. V. *Mathematical Methods of Organizing and Planning Production*, Management Science, 1960, 6:366~422. 康托洛维奇. 生产组织与计划中的数学方法. 中国科学院力学研究所运筹室译. 北京:科学出版社,1959.

② Hitchcock F. L. Distribution of a product from several sources to numerous localities. *Journal of Mathematical Physics*, 1940, 20:224~230.

③ Koopman T. C. Optimum utilization of the transportation system. *Proceedings of the International Statistical Conferences*, 1949, 5:136~145.

④ Dantzig G. B. Programming in a linear structure. *Econometrica*, 1949, 17:73~74.

从数学上讲,线性规划是研究线性不等式组的理论,或者说是研究线性方程组非负解的理论,或者说是研究(高维空间中)凸多面体的理论,是线性代数的应用和发展。从经济应用讲,它推动了应用,也推动了经济理论的发展。康托洛维奇和柯普曼在 1975 年都获得了诺贝尔经济奖。因为没有诺贝尔数学奖,丹齐克在 1975 年获得了运筹学的冯·诺依曼奖,在 1976 年获得美国总统的国家科学奖等多项大奖。

第一节 线性规划问题及其数学模型

一、线性规划问题的实例

【例 1.1】 资源利用问题。

某工厂计划期内要安排生产 A、B 两种产品。已知生产单位产品的利润与所需的劳动力、设备台时及原材料的消耗,见表 1.1。问该厂应如何组织生产才能使获利最大?

表 1.1 单位产品的利润与所需的劳动力、设备台时及原材料的消耗

	产品 A	产品 B	资源限制
劳动力/工时	9	4	360
设备台时	4	5	200
原材料/kg	3	10	300
利润/(元/件)	70	120	

解 将一个实际问题转化为线性规划模型,通常有以下几个步骤。

(1) 确定决策变量(decision variable)。决策变量是模型所要决定的未知量,也是模型最重要的参数。这里,工厂要确定各种产品的生产数量,因此可设 x_1, x_2 分别表示工厂在计划期内生产产品 A、B 的产量。

(2) 确定目标函数(objective function)。目标函数就是将决策者所追求的目标表示为决策变量的函数。它决定了线性规划优化的方向,是线性规划的重要组成部分。这里追求所获利润 S 应是最大(maximize,简写为 max)。

$$\max \quad S = 70x_1 + 120x_2$$

(3) 确定约束条件(constraint conditions)。考虑到劳动力总工时,设备允许加工的台时和原材料资源的限制等都会有一定的约束,这些约束条件可用含有决策变量的等式或不等式表示,参照表 1.1 的数值有

$$9x_1 + 4x_2 \leq 360$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 200$$

$$3x_1 + 10x_2 \leq 300$$

(4) 变量非负限制(nonnegative constraint)。一般情况,决策变量只取正值(非负值): $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ 。

综上所述,满足所有条件(subject to,简写为 s. t.)下求利润最大可得到如下数学模型:

$\max$

$S = 70x_1 + 120x_2$

$s. t.$

$9x_1 + 4x_2 \leq 360$

$4x_1 + 5x_2 \leq 200$

$3x_1 + 10x_2 \leq 300$

$x_1, x_2 \geq 0$

目标函数是线性函数,约束条件是线性等式和不等式,这样的模型称为线性规划的数学模型,它一般由决策变量、约束条件、目标函数三个部分组成,也称为线性规划的三要素。

【例 1.2】 营养配餐问题。

假定一个成年人每天需要从食物中获得 3000 千卡(1 卡=4. 1868 焦耳)的热量、55 克的蛋白质和 800 毫克的钙。如果市场上只有 4 种食品可供选择,它们每千克所含的热量、营养成分和市场价格见表 1.2。问如何选择才能在满足营养的前提下使购买食品的费用最小?

表 1.2 四种食品所含的热量、营养成分和市场价格

序 号	食品名称	热量/千卡	蛋白质/克	钙/毫克	价格/元
1	猪肉	1000	50	400	14
2	鸡蛋	800	60	200	6
3	大米	900	20	300	3
4	白菜	200	10	500	2

解 设 x_j 为第 j 种食品每天的购入量,在满足热量和其他营养成分前提下,要求所付购买食品费用最小(minimize,简写为 min),则配餐问题的线性规划模型为

$\min$

$Z = 14x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4$

$s. t.$

$1000x_1 + 800x_2 + 900x_3 + 200x_4 \geq 3000$

$50x_1 + 60x_2 + 20x_3 + 10x_4 \geq 55$

$400x_1 + 200x_2 + 300x_3 + 500x_4 \geq 800$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

【例 1.3】 投资证券组合问题。

某人有一笔 50 万元的资金可用于长期投资,可供选择的投资机会包括购买国库券、公司债券,投资房地产,购买股票或银行保值储蓄等。不同的投资方式的具体参数见表 1.3。投资者希望投资组合的平均年限不超过 5 年,平均的期望年收益率不低于 13%,平均风险系数不超过 4,平均收益的增长潜力不低于 10%。问在满足上述要求的前提下,投资者该如何选择投资组合使平均年收益率最高。

表 1.3 不同的投资方式的具体参数

序 号	投资方式	投资年限/年	年收益率/%	风险系数	增长潜力/%
1	国库券	3	11	1	0
2	公司债券	10	15	3	15
3	房地产	6	25	8	30
4	股票	2	20	6	20

续表

序 号	投资方式	投资年限/年	年收益率/%	风险系数	增长潜力/%
5	短期存款	1	10	1	5
6	长期储蓄	5	12	2	10
7	现金存款	0	3	0	0

解 设 x_i 为第 i 种投资方式在总投资额中的比例,则模型如下:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & S = 11x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 20x_4 + 10x_5 + 12x_6 + 3x_7 \\
 \text{s. t.} \quad & 3x_1 + 10x_2 + 6x_3 + 2x_4 + x_5 + 5x_6 \leq 5 \\
 & 11x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 20x_4 + 10x_5 + 12x_6 + 3x_7 \geq 13 \\
 & x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 6x_4 + x_5 + 2x_6 \leq 4 \\
 & 15x_2 + 30x_3 + 20x_4 + 5x_5 + 10x_6 \geq 10 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
 \end{aligned}$$

模型的目标函数反映的是平均年收益率最大,前 4 个约束分别是对投资年限、平均收益率、风险系数和增长潜力的限制,最后一个约束是全部投资比例的总和,必须等于 1。

二、线性规划问题的数学模型

上述例子的共同点是:求一组非负变量,满足一定的约束条件(该条件是线性方程组或线性不等式组),使一个线性函数取得极值(最大或最小),这样的问题称为线性规划问题,其数学模型一般为如下形式:

$$\begin{aligned}
 \max(\min) \quad & S = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \\
 \text{s. t.} \quad & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \leq (=, \geq) b_1 \\
 & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \leq (=, \geq) b_2 \\
 & \cdots \cdots \cdots \\
 & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \leq (=, \geq) b_m \\
 & x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0
 \end{aligned}$$

一般来说,一个问题是否能化成线性规划问题来求解,需符合如下 4 个假定:

(1) 比例性假定:决策变量的变化所引起的目标函数的改变量和决策变量的改变量成比例,同样,每个决策变量的变化所引起的约束方程左端值的改变量和该变量的改变量成比例。

(2) 可加性假定:每个决策变量对目标函数和约束方程的影响是独立于其他变量的,目标函数值是每个决策变量对目标函数贡献的总和。

(3) 连续性假定:线性规划问题中的决策变量应取连续值。

(4) 确定性假定:线性规划问题中的所有参数都是确定的参数,线性规划问题不包含随机因素。

三、线性规划问题的标准形式

为讨论的方便起见,人们将下列形式规定为线性规划问题的标准形式,其表示方式有

3 种。

线性规划标准问题的一般形式

$$\begin{aligned} \max \quad & S = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \\ \text{s. t.} \quad & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ & \cdots \cdots \cdots \\ & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \\ & x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

其中, $b_i \geq 0, i=1, 2, \cdots, m$ 。

线性规划标准问题的简缩形式

$$\begin{aligned} \max \quad & S = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i=1, 2, \cdots, m \\ & x_j \geq 0, j=1, 2, \cdots, n \end{aligned}$$

线性规划标准问题的矩阵形式

$$\begin{aligned} \max \quad & S = CX \\ \text{s. t.} \quad & AX = b \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

四、线性规划问题的标准化

非标准型的线性规划问题化为标准型线性规划问题的处理方法有以下几种情况:

(1) 若目标函数是求最小值 $\min Z = CX$, 令 $S = -Z$, 则 $\max S = -CX$ 。因此, 只需要改变目标函数的符号就可以在最大与最小之间转换。

(2) 若约束条件是不等式, 只需要在约束条件中加上或减去一个松弛变量就可以化为等式约束。

① 若约束条件是“ $\leq$ ”不等式, 则

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i = b_i$$