

高等院校教材
国家工科力学教学基地规划教材

材料力学(II)

苟文选 主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书为国家工科力学教学基地规划教材之一。

材料力学是工科院校很多专业中一门重要的专业基础课程。作为模块化教材的拓展模块,本书包括能量原理在杆件位移分析中的应用、能量原理在求解超静定结构中的应用、动载荷、疲劳强度、扭转及弯曲问题的进一步研究、超过弹性极限材料的变形与强度、材料力学行为的进一步认识、实验应力分析概况等内容。各章后均配有适量的思考题及习题,书后附有参考答案。

本书可作为高等工科院校力学、机械、土建及航空类专业的教材,也可作为上述各专业函授、电大的教材及科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学(II)/ 苟文选主编. —北京:科学出版社,2005

(高等院校教材. 国家工科力学教学基地规划教材)

ISBN 7-03-016029-0

I. 材… II. 苟… III. 材料力学-高等院校-教材 IV. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 085559 号

责任编辑:段博原 贾瑞娜 / 责任校对:包志虹

责任印制:钱玉芬 / 封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005 年 8 月第 一 版 开本:B5 (720× 1000)

2005 年 8 月第一次印刷 印张:17 1/8

印数:1—4 000 字数:30 000

定价:20.00 元(上、下册)

(如有印装质量问题,我社负责调换〈科印〉)

材料力学(I)、(II)

编写委员会

主 编 苟文选

副主编 金保森 卫 丰

编 委 (以姓氏笔画为序)

王安强 王锋会 张克实

高雅丽 矫桂琼

前 言

根据教育部“面向 21 世纪力学系列课程教学内容与体系改革的研究与实践”项目及“国家工科基础课程——力学教学基地”建设的要求,我们组织编写了模块化教材《材料力学》(I)、(II),经过几年的教学实践,数易其稿,现在呈现给广大读者。

教材是课程教学内容和课程体系改革的核心。多年来,老师们在材料力学教材建设方面付出了辛勤的劳动。1991 年张剑英教授等编写了《材料力学》教材。几经试用后,在广泛征求师生意见的基础上,于 1994 年由郑斯滔教授主持,对 1991 年版《材料力学》教材作了重大修改并再版,同时编写了《材料力学解题指导》。这些教材与《材料力学四选一题集》、《材料力学实验》组成了一套完整的多学时材料力学课程教材体系。1997 年,根据原国家教委“面向 21 世纪力学系列课程教学内容与体系改革的研究与实践”立项研究的要求,为适应新形势,组织了模块化教材的编写工作,经过近年来大范围、多专业的教学实践,取得了丰富的经验。这套教材就是在此基础上编写而成的。

新的模块化《材料力学》教材包括《材料力学》(I)基础模块、《材料力学》(II)拓展模块和拟议中的《材料力学》(III)研究模块。《材料力学》(III)主要阐述材料力学中的新材料、新理论、新方法,因要贴近学科前沿,适合采用讲座形式介绍,故只能以讲义形式使用。

高等院校的教材应担当起高素质人才培养的责任。教材不仅要帮助学生学会学习、学会创新,而且要寓“思”于教材,寓“观”于教材,努力培养基础扎实、知识面宽、能力强、素质高的具有创新精神的高级人才。在编写这套教材中,我们注重对学生分析问题和解决工程实际问题能力的培养,注意实验技能的训练,为此专列了“实验应力分析概况”一章。在实验方法及叙述中,尽可能与国标统一,使得设计及试验规范统一;突破《材料力学》基本假设的限制,除引用一些非线性例题以拓展知识面外,还撰写了“超过弹性极限后材料的变形与强度”,并对非连续体及各向异性体的力学性质作了简要的阐述。

为推进教学方法和教学手段的改革,应把教师的主导作用和学生的主体作用有机地结合起来,这是教学过程中处理教与学的基本原则。这一原则要求我们必须积极探索启发式教学、探索充分调动学生积极性和主动性的教学方法。用哲学的视角对科学技术知识中一些重要且基本的科学技术规律、概念、方法等做出某种哲理性的点拨,并在思考题、习题中加以体现,启发和促进学生在学习科学技术知识的

同时,学会运用科学的思维方法。本书力图在启发学生的主动思维、揭示本课程的学习规律上有所创新和突破。为了便于学生掌握教材内容和教师组织教学时有灵活的选择性,书中给出了较多的例题,并着重阐述了解题的思路;同时各章后配有思考题和习题。

《材料力学》(I)的主要内容包括:绪论、拉伸与压缩、剪切、扭转、弯曲内力、弯曲应力、弯曲变形、应力状态及应变状态分析、强度理论、组合变形时的强度计算、压杆稳定及附录等,可供 40~ 60 学时的工科院校相关专业选修。其中第 1、2、3 章及附录由苟文选编写,第 4 章由王安强编写,第 5、6、7 章由高雅丽、苟文选编写,第 8、9、10 章由金保森编写,第 11 章由王锋会编写。

《材料力学》(II)主要内容包括:能量原理在杆件位移分析中的应用、能量原理在求解超静定结构中的应用、动载荷、疲劳强度、扭转及弯曲问题的进一步研究、超过弹性极限材料的变形与强度、材料力学行为的进一步认识、实验应力分析概况等内容。作为拓展模块供力学、机械、建工、航空等各专业选修。其中第 1、2、3 章由卫丰编写,第 4 章由王锋会编写,第 5 章由苟文选编写,第 6 章由张克实编写,第 7 章由矫桂琼编写,第 8 章由金保森、苟文选编写。王安强博士用计算机绘制了全书的插图。

全书由苟文选任主编,金保森、卫丰任副主编。

郑斯滔教授和原国家教委工科课程指导委员会委员俞茂宏教授在百忙中审阅了全部书稿,并提出了精辟珍贵的修改意见;西北工业大学教务处教材科的领导和力学与土木建筑学院的领导对本书的出版给予了大力支持,在此一并表示衷心的感谢。

力学系列课程教学内容和课程体系改革是一项重大课题,限于编者的水平,教材中难免有疏漏和不妥之处,希望使用本教材的广大师生及其他读者提出批评意见,以利于教材质量的进一步提高。

编 者

2004 年 10 月

主要使用的量和单位

分类	符 号	名 称	国际单位	备 注
外 力	F	集中载荷	N , kN	1 kgf= 9. 81N
	q	分布载荷集度	N/ m , kN/ m	1 kgf/ m= 9. 81N/ m
	M , M_e	外力偶矩	N · m , kN · m	1 kgf · m= 9. 81N · m
	F_{af}	附加力	N , kN	
	M_{af}, T_{af}	附加力偶矩	N · m , kN · m	
	F_R	约束反力	N , kN	
	$F_A (F_{Ax}, F_{Ay})$	A 点处的支座反力	N , kN	
内 力	F_N	轴力	N , kN	
	F_s, F_{sy}, F_{sz}	剪力	N , kN	
	M_y, M_x	弯矩	N · m , kN · m	
	T, T_x	扭矩	N · m , kN · m	
	$\overline{F_N}$	单位力引起的轴力	N , kN	
	$\overline{F_s}$	单位力引起的剪力	N , kN	
	$\overline{M}, \overline{M_y}, \overline{M_z}$	单位力引起的弯矩	N · m , kN · m	
	\overline{T}	单位力引起的扭矩	N · m , kN · m	
	M_e, T_e	弹性极限弯矩、扭矩	N · m , kN · m	
M_p, T_p	塑性极限弯矩、扭矩	N · m , kN · m		
应 力 、 应 变 、 位 移	σ	正应力	Pa , MPa	1 Pa= 1N/ m ²
	τ	切应力	Pa , MPa	1 kPa= 10 ³ Pa
	σ_{max}	最大正应力	Pa , MPa	1 MPa= 10 ⁶ Pa
	σ_{min}	最小正应力	Pa , MPa	1 GPa= 10 ⁹ Pa
	σ_m	平均应力	Pa , MPa	1 MPa= 1N/ mm ²
	σ_a	应力幅	Pa , MPa	
	σ_r	循环特征为 r 的疲劳极限	Pa , MPa	
	σ_{-1}	对称循环的疲劳极限	Pa , MPa	
	σ_{st}	静应力	Pa , MPa	

续表

分类	符 号	名 称	国际单位	备 注
应力 应变 位移	σ_d	动应力	Pa, MPa	
	$(\sigma_{-1})_d, (\tau_{-1})_d$	光滑试样的疲劳极限	Pa, MPa	
	$(\sigma_{-1})_k, (\tau_{-1})_k$	有应力集中的疲劳极限	Pa, MPa	
	ε	线应变		
	Δ, δ	广义位移	mm, rad	
	δ_{ij}	单位力引起的位移	mm, m	
	Δ_{st}	冲击点静位移	mm, m	
	Δ_d	动位移	mm, m	
材料 特性 等	σ_u	极限应力	Pa, MPa	
	$[\sigma]$	许用应力	Pa, MPa	
	$[\sigma_t], [\sigma_c]$	拉伸、压缩许用应力	Pa, MPa	
	E	弹性模量(杨氏模量)	GPa	
	G	切变模量	GPa	
	$[\sigma_{-1}]$	对称循环的许用应力	Pa, MPa	
	N	累积循环次数、疲劳寿命		
	K	应力强度因子、应力集中因数	$\text{N} \cdot \text{m}^{-\frac{3}{2}}$	
	K_{IC}, K_{IIC}	平面应力、平面应变断裂韧度	$\text{N} \cdot \text{m}^{-\frac{3}{2}}$	
	A	弯曲中心		
	e	偏心距	mm	
	α_k	材料的冲击韧度	J/m^2	
	K_{σ}, K_{τ}	有效应力集中因数		
	$\varepsilon_{\sigma}, \varepsilon_{\tau}$	尺寸因数		
	β	表面质量因数		
	$\psi_{\sigma}, \psi_{\tau}$	不对称循环敏感因数		
	n_{σ}	构件的工作安全因数		
	W	功	J	1J = 1N · m
	V_s	应变能	J	
	v_s	应变能密度	J/m^3	
r	循环特征(应力比)			
ω	角速度	rad/s		
α	角加速度	rad/s^2		
v	速度	m/s		

续表

分类	符 号	名 称	国际单位	备 注
材 料 特 性 等	a	加速度	m/s^2	
	g	重力加速度	m/s^2	
	K_d	动荷因数		
	E	能(量)	J	
	$E_P(V)$	势能,位能	J	
	$E_K(T)$	动能	J	

注:① 国际单位中的空栏为“无量纲”。

② 主要使用的量和单位表的编写依据是“中华人民共和国国家标准 GB/T 3100—1993 国际单位制及其应用”,GB/T 3101—1993 中“有关量、单位和符号的一般原则”,GB/T 3102.3—1993 中“力学的量和单位”。对标准中无规定的符号,使用依据是高等教育出版社的“材料力学主要符号表”。

目 录

前言

主要使用的量和单位

第 1 章 能量原理在杆件位移分析中的应用	1
1.1 杆件应变能	1
1.2 杆件应变能的普遍表达形式	7
1.3 卡氏定理	10
1.4 莫尔积分	17
1.5 图形互乘法	24
1.6 虚功原理	28
1.7 功的互等定理	31
思考题	34
习题	35
第 2 章 能量原理在求解超静定结构中的应用	41
2.1 概述	41
2.2 超静定结构分析基础	43
2.3 力法正则方程	51
2.4 对称性条件及其在求解超静定结构中的应用	60
2.5 三弯矩方程	68
思考题	73
习题	74
第 3 章 动载荷	82
3.1 概述	82
3.2 直线等加速度直线运动及匀速转动时构件的动应力计算	82
3.3 冲击问题	88
3.4 冲击韧度	100
3.5 提高构件抗冲击能力的措施	102
3.6 考虑被冲击构件质量的冲击应力	104
思考题	107
习题	108
第 4 章 疲劳强度	116

4.1	概述	116
4.2	交变应力的循环特征	118
4.3	疲劳极限	119
4.4	影响疲劳极限的因素	122
4.5	构件的疲劳强度计算	127
4.6	弯扭组合作用下构件的疲劳强度计算	134
4.7	抗疲劳设计	137
4.8	提高构件疲劳强度的措施	139
	思考题	141
	习题	142
第5章	扭转及弯曲问题的进一步研究	146
5.1	薄壁杆件的自由扭转	146
5.2	开口薄壁杆件的弯曲切应力及弯曲中心	152
5.3	平面曲杆的正应力	160
5.4	用共轭梁法求梁的变形	168
5.5	梁变形的普遍方程——奇异函数法	173
	思考题	183
	习题	184
第6章	超过弹性极限材料的变形与强度	188
6.1	概述	188
6.2	金属材料在简单拉压载荷下的塑性变形	188
6.3	纯弯曲梁的塑性变形	192
6.4	横力弯曲梁的塑性弯曲	195
6.5	圆轴的极限扭矩	199
6.6	简单桁架的弹塑性变形分析	201
	思考题	205
	习题	205
第7章	材料力学行为的进一步认识	206
7.1	温度对材料力学性能的影响	206
7.2	应变速率对材料力学性能的影响	207
7.3	材料的黏弹性特性简介	207
7.4	线弹性断裂力学简介	210
7.5	复合材料力学简介	213
	思考题	217
	习题	217

第 8 章 实验应力分析概况	219
8.1 概述	219
8.2 电测法的基本原理	220
8.3 应变测量与应力换算	224
8.4 光弹性实验方法及平面偏振光	230
8.5 平面受力模型在平面偏振光场中的效应	231
8.6 平面受力模型在圆偏振光场中的效应	235
8.7 材料条纹值的测定	238
8.8 光弹性方法的应用	240
思考题	242
习题	242
习题答案	244
参考文献	251

第 1 章 能量原理在杆件位移分析中的应用

1.1 杆件应变能

在工程结构分析中,经常需要计算结构和构件的变形。使用一般的方法,如积分法,变形计算时需要分析结构和构件的具体变形形式,需要大量的计算工作。特别是对于刚架、桁架和曲杆等变形复杂的超静定结构,一般方法根本无法完成。工程上通常采用能量原理完成结构和构件的变形分析。

在固体力学领域,泛指利用功和能的相关定理分析问题的方法为能量方法或者能量原理。能量原理除了变形和超静定结构分析有广泛的应用之外,也应用于工程结构的稳定和冲击等问题分析。能量原理在结构或者构件的变形分析中,不涉及具体的变形过程,因此具有简单和方便等优点。能量原理的另一个优点是公式统一,适于编程利用计算机处理。以能量原理为基础的有限元方法,目前已经成为应用最为广泛的工程结构分析工具。

能量原理的主要基础为:物体在外力作用下发生变形,因此外力在变形过程中做功,这一外力功将转化为其他形式的能量。对于弹性物体,由于变形的可逆性,这个能量转化的过程是相对简单的。由于弹性变形过程中,可以忽略其他形式的能量,如动能、热能等的损耗,所以外力功 W 全部转化为应变能 V_s 存储于弹性体的内部。即

$$W = V_s \quad (1-1)$$

在弹性范围内,应变能与外力功是可逆的。这就是说,当外力增加时,外力功可以转化为应变能存储于弹性体内部,而外力减小时,应变能又可以转化为功。

本章介绍的有关能量法的基本原理和方法,如果没有特别的说明,材料的应力应变关系满足胡克定理,限于线性弹性问题。外力为静载荷,即外力从零开始缓慢地增加直到终值,弹性体在外力的作用下将发生变形,弹性体的变形也从零开始直到对应的数值。

以下首先分析杆件基本变形的应变能表达形式。

1.1.1 轴向拉伸或压缩

在线弹性条件下,即应力应变关系满足胡克定理,外力在杆件上所做功在数值上等于存储于杆件内部的应变能。在《材料力学》(I)的 2.10 节已经证明,拉伸曲线与横轴所围面积为外力功。因此,如图 1-1 所示,三角形 OAB 的面积在数值上等于

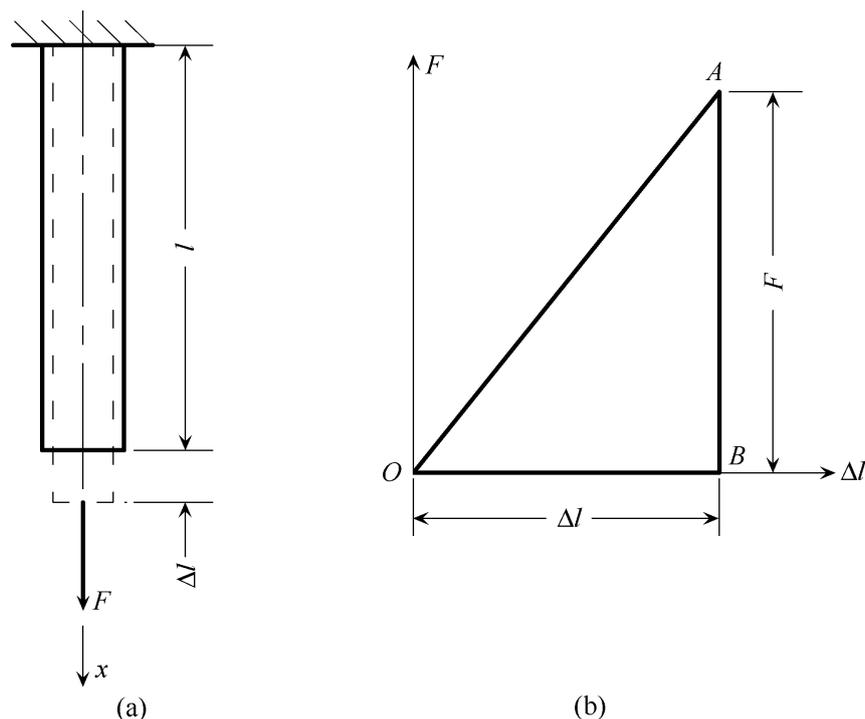


图 1-1

外力所做的功。有

$$W = \frac{1}{2} F \Delta l \quad (1-2)$$

因为

$$F_N = F, \quad \Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

根据能量原理公式(1-1),则应变能为

$$V_s = \frac{1}{2} F \Delta l = \frac{F_N^2 l}{2EA} \quad (1-3)$$

式(1-3)为等截面直杆在轴力为常量条件下的应变能计算公式。如果杆件为变截面杆件,或者轴力是变化的,可以考虑 dx 微段的应变能为

$$dV_s = \frac{F_N^2(x)}{2EA(x)} dx$$

积分可得整个杆件的应变能 V_s 为

$$V_s = \int_l \frac{F_N^2(x)}{2EA(x)} dx \quad (1-4)$$

1.1.2 扭转

圆轴扭转时,如果材料应力应变关系处于线弹性范围,则扭矩 T 与扭转角 φ 的关系也是一条直线,如图 1-2(b)所示。仿照杆件拉伸应变能的证明,则变形过程中扭矩所做的功在数值上等于三角形 OAB 的面积。有

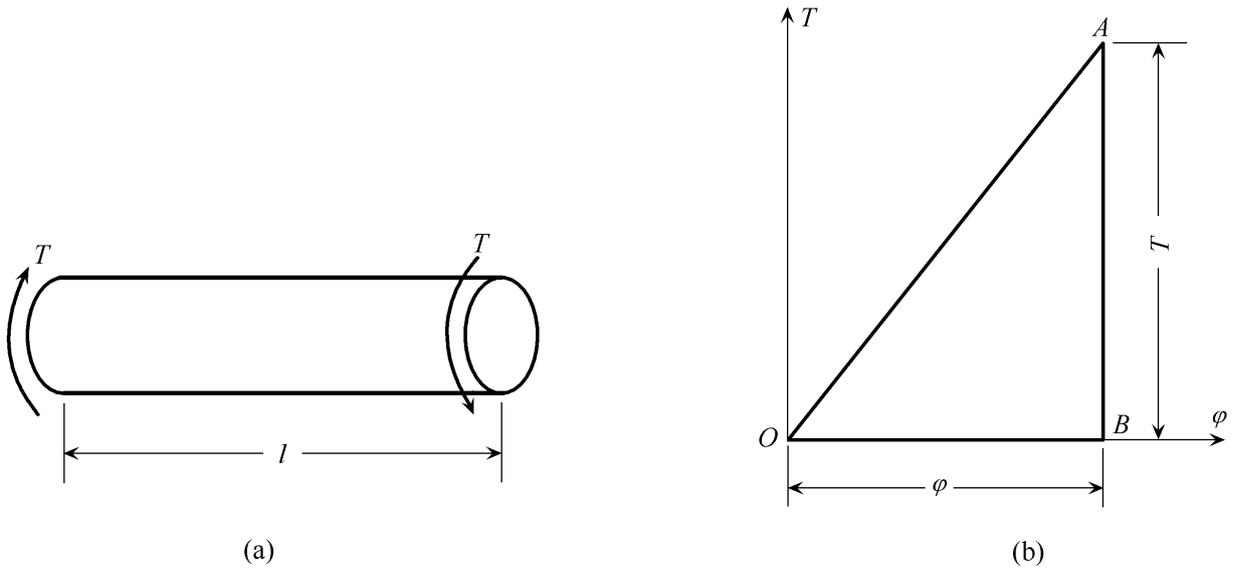


图 1-2

$$W = \frac{1}{2} T \varphi \quad (1-5)$$

由于

$$\varphi = \frac{T l}{G I_p}$$

所以,圆轴扭转应变能 V_s 为

$$V_s = \frac{1}{2} T \varphi = \frac{T^2 l}{2G I_p} \quad (1-6)$$

如果圆轴的扭矩或者极惯性矩沿杆件的轴线为变量,则扭转应变能 V_s 为

$$V_s = \int_l \frac{T^2(x)}{2G I_p(x)} dx \quad (1-7)$$

对于非圆截面杆的扭转,则需将式(1-7)中截面二次极矩 I_p 换为 I_n 。

1.1.3 弯曲

首先讨论纯弯曲梁的应变能。对于等截面梁,设梁的两端面作用弯矩 M , θ 为两个端面之间的相对转角,如图 1-3(a)所示。根据几何关系

$$\theta = \frac{l}{\rho}$$

由于

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E I_z}$$

所以

$$\theta = \frac{M l}{E I_z}$$

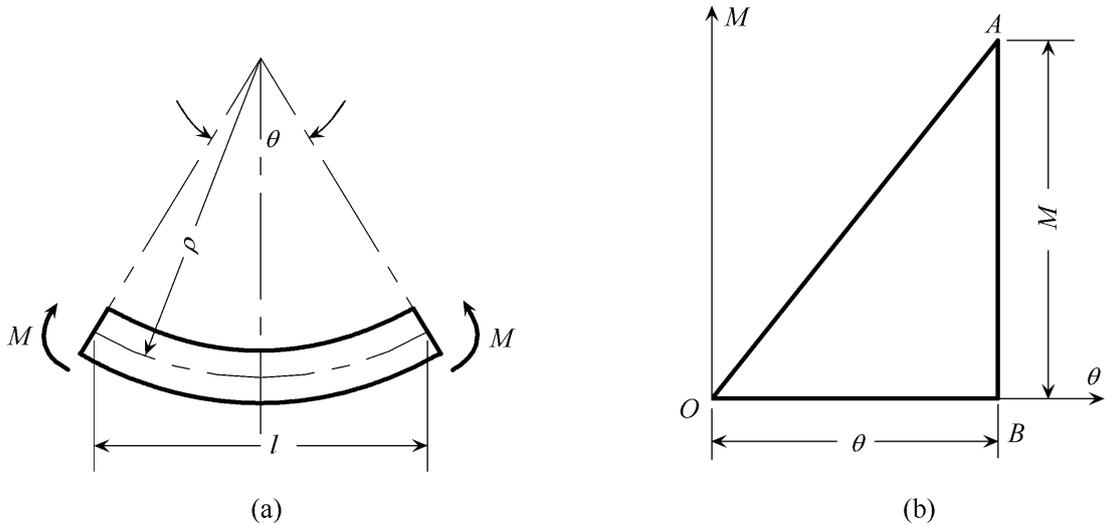


图 1-3

在线弹性条件下,梁的弯矩 M 与端面转角 θ 之间的关系曲线也是一条直线,如图 1-3(b)所示。弯矩 M 所做的功在数值上等于三角形 OAB 的面积。即

$$W = \frac{1}{2} M \theta \quad (1-8)$$

所以,纯弯曲问题的应变能 V_s 为

$$V_s = \frac{1}{2} M \theta = \frac{M^2 l}{2EI_z} \quad (1-9)$$

对于剪切弯曲问题,必须分别考虑弯矩和剪力产生的应变能。由于剪切弯曲时,内力弯矩不再是常量,因此取 dx 微段,如图 1-4(b)所示,则外力功 dW 为

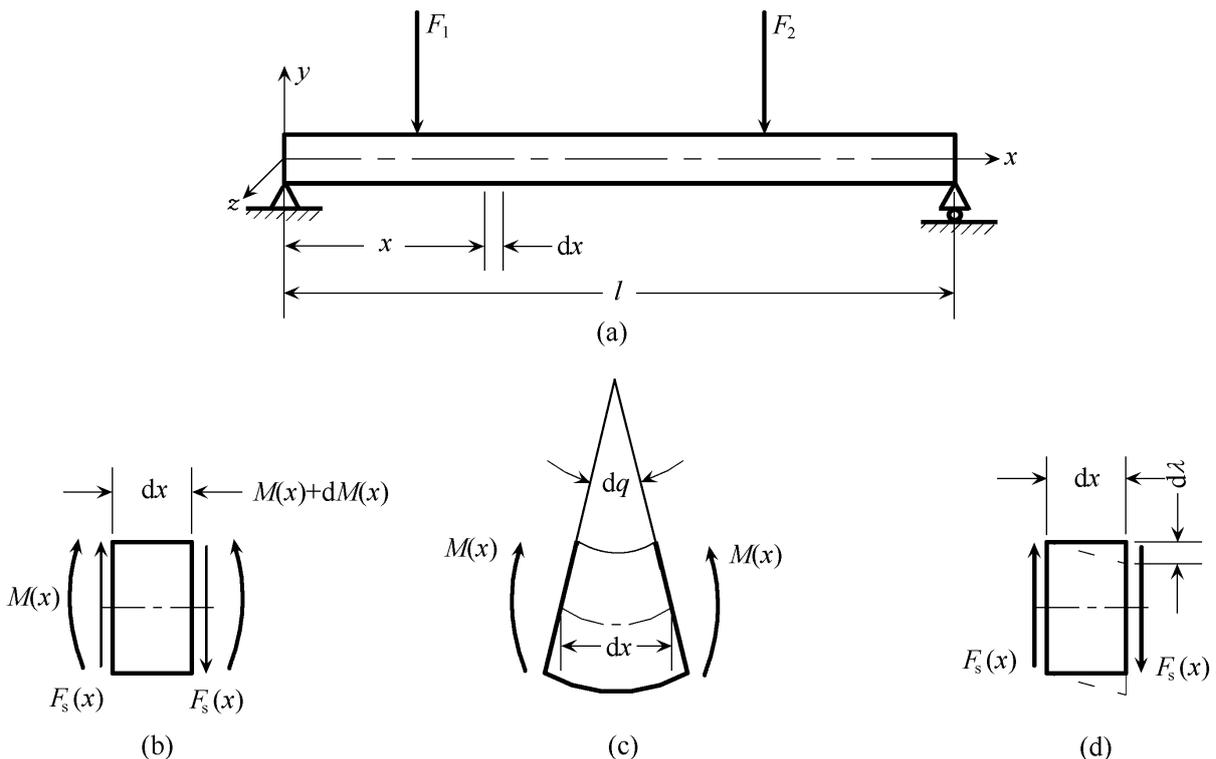


图 1-4

$$dW = \frac{1}{2}M(x)d\theta$$

dx 微段的应变能为

$$dV_s = \frac{1}{2}M(x)d\theta = \frac{M^2(x)dx}{2EI_z}$$

所以,整个梁的弯曲应变能 V_s 为

$$V_s = \int_l \frac{M^2(x)dx}{2EI_z} \quad (1-10)$$

对于剪切应变能,可以从剪切应变能密度入手讨论。根据《材料力学》(I),剪切应变能密度 v_s 为

$$v_s = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{\tau^2}{2G} \quad (1-11)$$

由于在 F_s 作用下的切应力为

$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{bI_z}$$

所以弯曲剪切应变能密度为

$$v_s = \frac{1}{2G} \left[\frac{F_s S_z^*}{bI_z} \right]^2$$

整个梁的剪切应变能 V_s 为

$$V_s = \int_l v_s dV = \int_l \left[\int_A \frac{1}{2G} \left[\frac{F_s S_z^*}{bI_z} \right]^2 dA \right] dx = \int_l \frac{F_s^2}{2GI_z^2} \left[\int_A \left[\frac{S_z^*}{b} \right]^2 dA \right] dx \quad (1-12)$$

设

$$k = \frac{A}{I_z^2} \int_A \left[\frac{S_z^*}{b} \right]^2 dA \quad (1-13)$$

记号 k 只与梁的横截面形状有关,称为剪切形状系数。对于矩形截面, $k = \frac{5}{6}$; 对于圆形截面, $k = \frac{10}{9}$; 薄壁圆环截面, $k = 2$ 。对于其他形状的横截面,剪切形状系数 k 可以根据公式(1-13)计算。

引用记号 k ,则公式(1-12)可以简化为

$$V_s = \int_l \frac{kF_s^2}{2GA} dx \quad (1-14)$$

对于细长梁,剪切应变能远小于弯曲应变能,因此作工程结构分析时,一般对于剪切应变能略去不计。只有在某些特殊形式下,如工字钢等薄壁截面梁,才需要考虑剪切应变能。

根据上述分析,由于构件应变能在数值上等于外力功。在线弹性范围,式(1-2)、式(1-5)和式(1-8)表示的静载荷外力功可以写作统一表达式

$$W = \frac{1}{2} F \delta \quad (1-15)$$

式中, F 为广义力; 而 δ 为与广义力对应的位移, 称为广义位移。

广义位移是广义力作用点, 而且与广义力方向一致的位移。如果广义力为轴力或者横向力, 则广义位移为对应的线位移; 如果广义力为力偶, 则广义力为对应的转角。

应该注意, 在线弹性条件下, 广义力与广义位移之间呈线性关系。对于非线性弹性问题, 尽管是弹性变形, 能量关系(1-1)仍然成立, 但是应力应变关系不再满足线性条件, 其应变能 V_s 计算公式为

$$V_s = W = \int_l F d\delta \quad (1-16)$$

由于非线性弹性问题, $F-\delta$ 曲线不再是直线, 因此式(1-16)计算所得应变能的系数不再是 $\frac{1}{2}$ 。

例 1-1 简支梁 AB 在 C 处作用集中力 F , 如图 1-5 所示。已知梁的抗弯刚度 EI 为常量, 试求梁的应变能 V_s , 并且计算 C 点的挠度 y_c 。

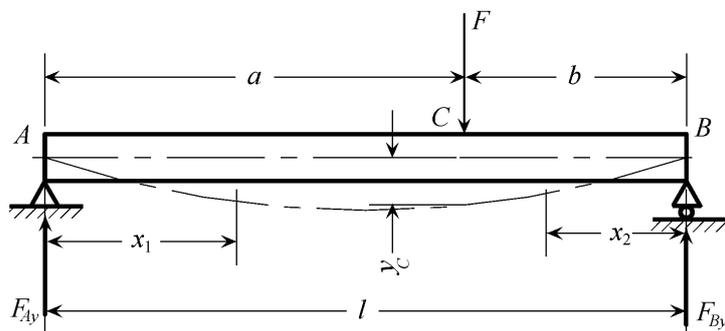


图 1-5

解 根据平衡条件 $\sum M_B = 0$ 和 $\sum M_A = 0$, 可得支座反力

$$F_{Ay} = F \frac{b}{l}, \quad F_{By} = F \frac{a}{l}$$

对于图示坐标系, AC 段弯矩为

$$M_1(x_1) = F_{Ay} x_1 = F \frac{b}{l} x_1 \quad (0 \leq x_1 \leq a)$$

CB 段弯矩为

$$M_2(x_2) = F_{By} x_2 = F \frac{a}{l} x_2 \quad (0 \leq x_2 \leq b)$$

由于在梁 AC 和 CB 段弯矩方程是通过不同的函数描述的, 因此应用公式(1-10)计算应变能时, 必须分段计算然后求和。即

$$V_s = \int_l \frac{M^2(x) dx}{2EI} = \int_0^a \frac{M_1^2(x_1) dx_1}{2EI} + \int_0^b \frac{M_2^2(x_2) dx_2}{2EI}$$

$$= \frac{1}{2EI} \left[\int_0^a \left(F \frac{b}{l} x_1 \right)^2 dx_1 + \int_0^b \left(F \frac{a}{l} x_2 \right)^2 dx_2 \right] = \frac{F^2 a^2 b^2}{6EI l}$$

在变形过程中,外力 F 做功为

$$W = \frac{1}{2} F y_c$$

根据能量原理, $W = V_s$, 有

$$y_c = \frac{F a^2 b^2}{3EI}$$

计算所得的 y_c 为正值, 表示位移与外力 F 方向一致。

从以上例题的分析中可以看到, 由于能量原理应用不涉及变形的具体过程, 因此可以不必采用统一坐标系。例题中梁的 AC 和 CB 段弯矩是通过不同形式的坐标系描述的, 这对于复杂结构的变形分析更具有优越性。但是根据上述分析, 只有弹性体作用一个广义力, 而且是分析广义力作用点的广义位移才能够直接应用能量原理。为了能够将能量原理应用于结构和构件的变形分析, 必须进一步讨论能量关系, 建立求解变形的能量方法。

1.2 杆件应变能的普遍表达形式

本节根据杆件基本变形的应变能表达式, 推导杆件应变能的普遍表达形式。对于组合变形杆件, 横截面同时作用多个内力分量, 为了方便的讨论, 取杆件的 dx 微段分析, 如图 1-6 所示。

设 dx 微段的两端横截面的内力分别为轴力 $F_N(x)$ 、扭矩 $T(x)$ 、剪力 $F_s(x)$ 和弯矩 $M(x)$, 其中剪力产生的应变能可以忽略不计。上述内力, 对于所研究的对象 dx 微段而言均为外力。设 dx 微段的两个端面的相对轴向位移为 $d(\Delta l)$, 相对扭转角为 $d\varphi$, 相对转角为 $d\theta$ 。

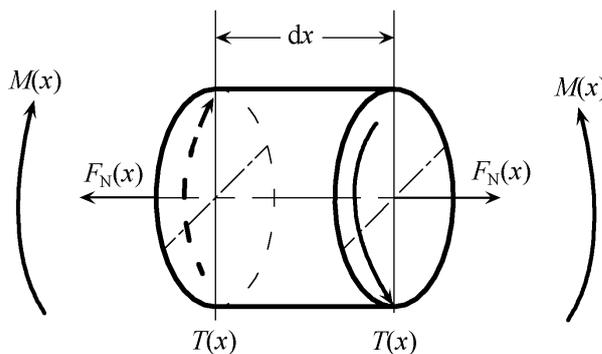


图 1-6

由于 dx 微段的上述广义位移是正交的, 因此各个外力所做的功是相互独立的, 互不影响。例如, 轴力 $F_N(x)$ 在相对扭转角 $d\varphi$ 和相对转角 $d\theta$ 上不做功, 而扭矩 $T(x)$ 和弯矩 $M(x)$ 在轴向位移 $d(\Delta l)$ 上也不做功。因此, 外力功为

$$dW = \frac{1}{2} F_N(x) d(\Delta l) + \frac{1}{2} T(x) d\varphi + \frac{1}{2} M(x) d\theta$$

上述外力功等于存储于 dx 微段内的应变能, 因此

$$\begin{aligned} dV_s &= dW = \frac{1}{2}F_N(x)d(\Delta l) + \frac{1}{2}T(x)d\varphi + \frac{1}{2}M(x)d\theta \\ &= \frac{F_N^2(x)}{2EA}dx + \frac{T^2(x)}{2GI_p}dx + \frac{M^2(x)}{2EI}dx \end{aligned}$$

积分可得整个杆件的应变能为

$$V_s = \int_l \frac{F_N^2(x)}{2EA}dx + \int_l \frac{T^2(x)}{2GI_p}dx + \int_l \frac{M^2(x)}{2EI}dx \quad (1-17)$$

式(1-17)为圆截面杆件的应变能表达式,对于非圆截面杆件,应变能的普遍表达式为

$$V_s = \int_l \frac{F_N^2(x)}{2EA}dx + \int_l \frac{T^2(x)}{2GI_n}dx + \int_l \frac{M_y^2(x)}{2EI_y}dx + \int_l \frac{M_z^2(x)}{2EI_z}dx \quad (1-18)$$

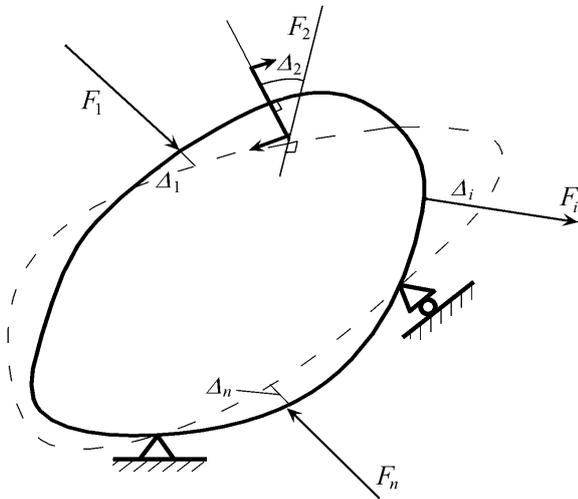


图 1-7

弹性体作用多个外力时,由于构件变形而外力作用点产生位移,载荷在这一位移上做功,其数值等于弹性体内部存储的应变能。因此也可以利用外力做功求解弹性体的应变能。

弹性体在外力 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_i, \dots, F_n$ 的共同作用下处于平衡状态。这就是说弹性体的约束条件使得弹性体只有变形位移,而没有刚体位移,如图 1-7 所示。如果设外力 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_i, \dots, F_n$ 为广义力,则对应的广义位移为 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_n$ 。这里的广义位移分别表示外力作用点并且于外力方向一致的位移。

设外力 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_i, \dots, F_n$ 按照同一比例从零开始缓慢加载直至终值。如果变形很小而且材料是线性弹性的,则弹性体的位移与外力之间的关系也是线性的。这就是说广义位移 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_n$ 也将与外力同样按照比例增加。为了表示外力与位移的这一关系,引入一个由 0 到 1 的参数 k 。这样在加载过程中,各个外力可以表示为 $kF_1, kF_2, kF_3, \dots, kF_i, \dots, kF_n$,而由于外力与位移的线性关系,广义位移可以表示为 $k\Delta_1, k\Delta_2, k\Delta_3, \dots, k\Delta_i, \dots, k\Delta_n$ 。因此外力按照比例从零开始缓慢加载相当于参数 k 由 0 至 1。引入参数 k 的增量 dk 表示这个加载过程,则由 k 到 $k+dk$ 时,外力做功为

$$\begin{aligned} dW &= kF_1\Delta_1dk + kF_2\Delta_2dk + kF_3\Delta_3dk + \dots + kF_i\Delta_idk + \dots + kF_n\Delta_ndk \\ &= (F_1\Delta_1 + F_2\Delta_2 + F_3\Delta_3 + \dots + F_i\Delta_i + \dots + F_n\Delta_n)kdk \end{aligned}$$

积分上式,可得

$$W = (F_1\Delta_1 + F_2\Delta_2 + F_3\Delta_3 + \dots + F_i\Delta_i + \dots + F_n\Delta_n) \int_0^1 kdk$$

$$= \frac{1}{2}F_1\Delta_1 + \frac{1}{2}F_2\Delta_2 + \frac{1}{2}F_3\Delta_3 + \cdots + \frac{1}{2}F_i\Delta_i + \cdots + \frac{1}{2}F_n\Delta_n$$

因此根据能量关系表达式(1-1),线性弹性体的应变能为

$$V_s = W = \frac{1}{2}F_1\Delta_1 + \frac{1}{2}F_2\Delta_2 + \frac{1}{2}F_3\Delta_3 + \cdots + \frac{1}{2}F_i\Delta_i + \cdots + \frac{1}{2}F_n\Delta_n \quad (1-19)$$

式(1-19)表明,对于线性弹性物体,应变能等于每一外力与其对应的位移乘积的1/2的总和。公式(1-19)又称为克拉珀龙(Clapeyron)原理。

由于位移 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_n$ 与外力 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_i, \dots, F_n$ 之间满足线性关系,所以克拉珀龙公式如果采用外力表示,则应变能为外力的二次齐次函数;同理也可以表示为位移的二次齐次函数。由于应变能是外力或者位移的二次函数,因此应变能不满足叠加原理。

上述分析是在外力等比例加载条件下推导得到的。对于非比例加载问题,根据功的基本定义,仍然可以证明外力功与载荷的加载次序无关。即应变能仅仅与载荷的终值有关,而与载荷的加载次序无关,克拉珀龙原理仍然成立。

例 1-2 刚架 ABC 在自由端 C 处作用集中力 F ,如图 1-8 所示。已知刚架的抗弯刚度 EI 和抗拉刚度 EA 为常量,试求刚架的应变能 V_s ,并且计算 C 点的铅垂位移。

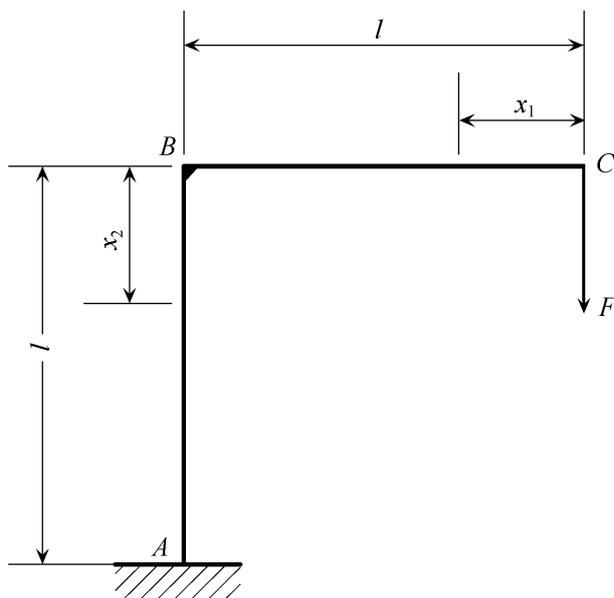


图 1-8

解 刚架的应变能由杆件 AB 和 BC 应变能组成,因此

$$V_s = V_{s,AB} + V_{s,BC}$$

选择图中所示坐标系,则 BC 杆的内力弯矩方程为

$$M_1(x_1) = -Fx_1$$

BA 杆件的弯矩方程为

$$M_2(x_2) = -Fl$$

$$F_{N2} = -F$$

刚架应变能

$$V_s = V_{s,AB} + V_{s,BC} \\ = \int_0^l \frac{M_1^2(x_1)}{2EI} dx_1 + \int_0^l \frac{M_2^2(x_2)}{2EI} dx_2 + \int_0^l \frac{F_{N2}^2(x_2)}{2EA} dx_2$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^l \frac{(-Fx_1)^2}{2EI} dx_1 + \int_0^l \frac{(-Fl)^2}{2EI} dx_2 + \int_0^l \frac{(-F)^2}{2EA} dx_2 \\
 &= \frac{F^2 l^3}{6EI} + \frac{F^2 l^3}{2EI} + \frac{F^2 l}{2EA} = \frac{2F^2 l^3}{3EI} + \frac{F^2 l}{2EA}
 \end{aligned}$$

根据能量原理, $W = V_s$, 有

$$y_c = \frac{4F l^3}{3EI} + \frac{Fl}{EA}$$

根据上述结果可见, C 点的垂直位移是由两个部分组成的, 一部分是弯矩引起的弯曲位移 y_{c1} , 另一部分是轴力引起的拉压位移 y_{c2} , 刚架的弯曲位移和拉压位移分别为

$$y_{c1} = \frac{4F l^3}{3EI}, \quad y_{c2} = \frac{Fl}{EA}$$

两者之比为

$$\frac{y_{c1}}{y_{c2}} = \frac{\frac{4F l^3}{3EI}}{\frac{Fl}{EA}} = \frac{4A l^2}{3I} = \frac{4}{3} \left(\frac{l}{i} \right)^2$$

式中, i 为横截面的惯性半径。对于细长杆件, 惯性半径 i 远远小于杆的长度。这就是说对于刚架类结构, 拉压变形远远小于弯曲变形。因此在工程结构分析中, 通常忽略轴力对于变形的影响。

1.3 卡氏定理

通过例题 1-2, 可以看到应变能表达式为 $V_s = \frac{2F^2 l^3}{3EI} + \frac{F^2 l}{2EA}$, 而外力 F 对应的广义位移为 $y_c = \frac{4F l^3}{3EI} + \frac{Fl}{EA}$ 。如果将应变能看作外力的函数, 则应变能函数对于外力的导数 $\frac{dV_s}{dF} = \frac{4F l^3}{3EI} + \frac{Fl}{EA}$ 就是外力对应的广义位移 y_c 。

现在的问题是, 上述分析是否具有普遍意义, 而且对于多个载荷作用的弹性体这一性质是否也是成立的。本节将讨论结构位移分析的一个重要定理——卡氏定理。

卡氏定理可以通过不同的方法证明, 以下将利用弹性体应变能与载荷加载次序的无关性, 即应变能仅仅取决于载荷终值的性质加以推导证明。

为了简化问题, 以简支梁表示弹性体, 假设有任何一组载荷 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_i, \dots, F_n$ 作用于结构, 如图 1-9 所示。在这一组载荷作用下, 外力 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_i, \dots, F_n$ 对应的广义位移分别为 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_n$ 。根据能量原理, 外力做功等于梁的应变能。设梁的应变能 V_s 为外力 $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n$ 的函数。有

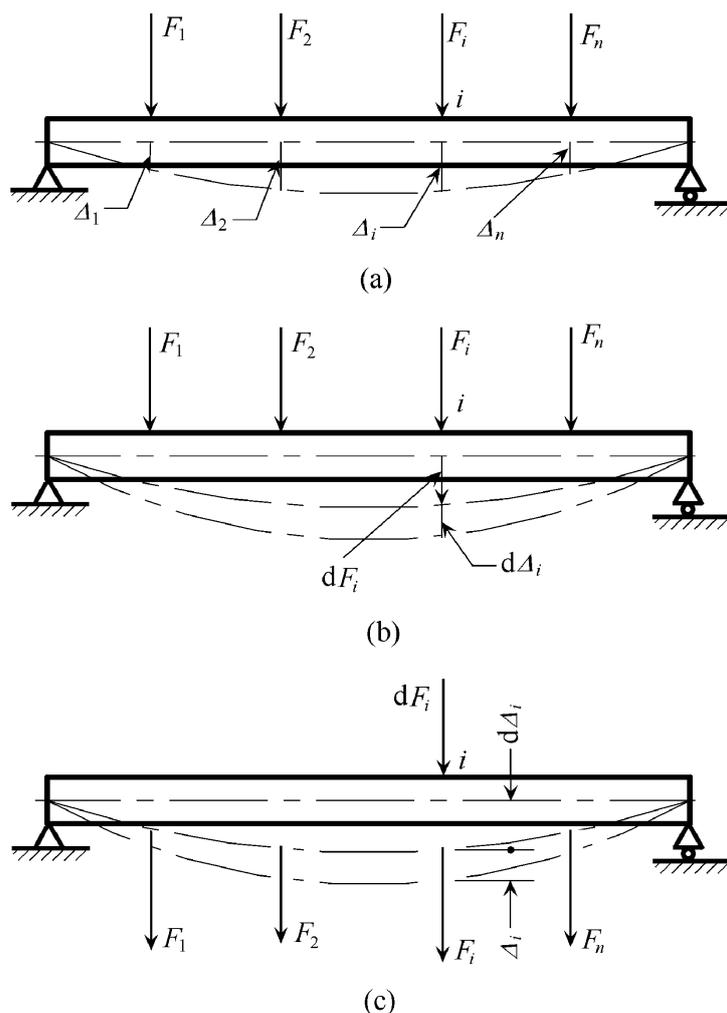


图 1-9

$$V_s = f(F_1, F_2, F_3, \dots, F_i, \dots, F_n) \quad (1-20)$$

如果任意一个外力 F_i 有增量 dF_i , 则应变能也有对应的增量。应变能增量可以表示为

$$V_s + dV_s = V_s + \frac{\partial V_s}{\partial F_i} dF_i \quad (1-21)$$

由于弹性体的应变能与外力的加载次序是无关的, 因此可以将上述两组载荷的作用次序颠倒。首先在弹性体上作用第一组 F_i 的增量 dF_i , 然后再作用第二组外力 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_i, \dots, F_n$ 。由于弹性体满足胡克定理和小变形条件, 因此两组外力引起的变形是很小的, 而且相互独立互不影响。

当作用第一组增量 dF_i 时, dF_i 作用点沿力作用方向的位移为 $d\Delta_i$, 如图 1-9 (b) 所示, 外力功为 $\frac{1}{2} dF_i d\Delta_i$ 。作用第二组载荷 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_i, \dots, F_n$ 时, 尽管弹性体已经有 dF_i 作用, 但是弹性体在外力作用下的广义位移 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_n$ 并不会因为 dF_i 的作用而发生变化。因此第二组载荷 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_i, \dots, F_n$ 产生的应变能仍然为 V_s 。只是 dF_i 在第二组载荷作用时在位移 Δ_i 上做功, 如图 1-9

(c)所示。因此,梁的应变能由 3 个部分组成,有

$$\frac{1}{2}dF_i d\Delta_i + V_s + dF_i \Delta_i \quad (1-22)$$

根据应变能与载荷加载次序的无关性,由式(1-21)和式(1-22),有

$$V_s + \frac{\partial V_s}{\partial F_i} dF_i = \frac{1}{2}dF_i d\Delta_i + V_s + dF_i \Delta_i$$

略去高阶小量,可得

$$\Delta_i = \frac{\partial V_s}{\partial F_i} \quad (1-23)$$

公式(1-23)说明,应变能对于任意一个外力 F_i 的偏导数等于 F_i 作用点沿 F_i 方向的位移。公式(1-23)通常称为卡氏(Castigliano)定理。实际该定理是卡氏第二定理,而卡氏第一定理为:弹性杆件的应变能对于杆件上某一位移的变化率,等于该位移相应的荷载,即 $F_i = \frac{\partial V_s}{\partial \Delta_i}$ 。这里不再详述。Alberto Castigliano,意大利工程师,他于 1873 年在他的学位论文中得到了以上定理。

卡氏定理对于任意弹性体都是成立的。卡氏定理中的外力 F_i 可以看作广义力,则 Δ_i 为广义位移。显然,如果 F_i 为集中力,则 Δ_i 为与集中力方向一致的位移;如果 F_i 为力偶,则 Δ_i 为与力偶方向一致的角位移。

将公式(1-15)表示的弹性体应变能代入公式(1-23),则

$$\Delta_i = \frac{\partial V_s}{\partial F_i} = \frac{\partial}{\partial F_i} \left[\int_l \frac{F_N^2(x)}{2EA} dx + \int_l \frac{T^2(x)}{2GI_n} dx + \int_l \frac{M_y^2(x)}{2EI_y} dx + \int_l \frac{M_z^2(x)}{2EI_z} dx \right]$$

由于上式的积分是对杆件轴线坐标 x 的,而偏导数运算是对于广义力 F_i 的,因此可以先求偏导数然后积分。这样位移计算公式可以写作

$$\begin{aligned} \Delta_i = \frac{\partial V_s}{\partial F_i} &= \int_l \frac{F_N(x)}{EA} \frac{\partial F_N(x)}{\partial F_i} dx + \int_l \frac{T(x)}{GI_n} \frac{\partial T(x)}{\partial F_i} dx \\ &+ \int_l \frac{M_y(x)}{EI_y} \frac{\partial M_y(x)}{\partial F_i} dx + \int_l \frac{M_z(x)}{EI_z} \frac{\partial M_z(x)}{\partial F_i} dx \end{aligned}$$

例 1-3 桁架由杆件 BC 和 BD 组成,在结点 B 作用有铅垂载荷 F ,如图 1-10(a)所示。已知两杆的抗拉刚度 EA 相同并且为常量,试求 B 点的水平和铅垂位移。

解 桁架为拉压杆件组成的杆系结构,桁架的总应变能为

$$V_s = \sum_{i=1}^n \frac{F_{Ni}^2 l_i}{2EA}$$

根据卡氏定理,铅垂位移

$$y^B = \frac{\partial V_s}{\partial F_y}$$

水平位移

$$x_B = \frac{\partial V_s}{\partial F_{af}}$$

根据题意需要计算 B 点的水平位移,而结构中并没有对应的广义力。因此在应用卡氏定理时需要施加一个虚拟的广义力 F_{af} ,如图 1-10(b)所示。

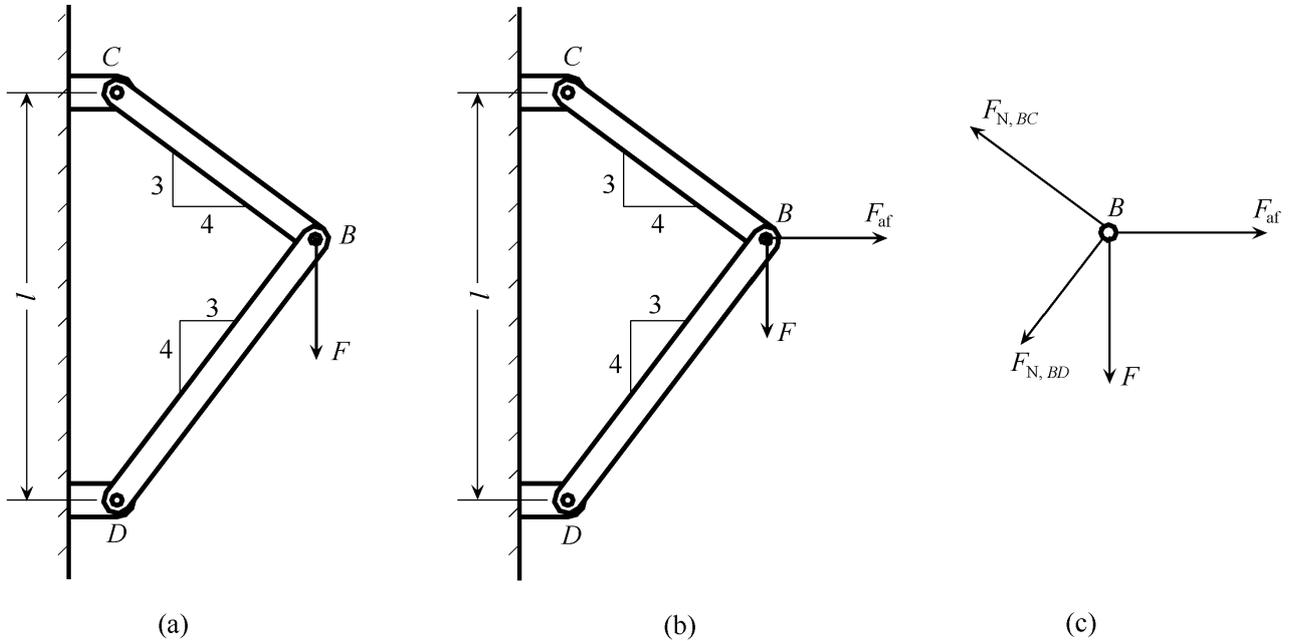


图 1-10

根据平衡关系可得两杆的内力,如图 1-10(c)所示,即

$$F_{N,BC} = 0.6F + 0.8F_{af}$$

$$F_{N,BD} = -0.8F + 0.6F_{af}$$

因此,桁架的应变能为

$$V_s = \frac{F_{N,BC}^2 l_{BC}}{2EA} + \frac{F_{N,BD}^2 l_{BD}}{2EA}$$

结点位移为

$$x_B = \frac{\partial V_s}{\partial F_{af}} = \frac{F_{N,BC} l_{BC}}{EA} \frac{\partial F_{N,BC}}{\partial F_{af}} + \frac{F_{N,BD} l_{BD}}{2EA} \frac{\partial F_{N,BD}}{\partial F_{af}}$$

$$y_B = \frac{\partial V_s}{\partial F} = \frac{F_{N,BC} l_{BC}}{EA} \frac{\partial F_{N,BC}}{\partial F} + \frac{F_{N,BD} l_{BD}}{2EA} \frac{\partial F_{N,BD}}{\partial F}$$

$$\frac{\partial F_{N,BC}}{\partial F_{af}} = 0.8, \quad \frac{\partial F_{N,BD}}{\partial F_{af}} = 0.6$$

因为

$$\frac{\partial F_{N,BC}}{\partial F} = 0.6, \quad \frac{\partial F_{N,BD}}{\partial F} = -0.8$$

偏导数求解完成后,令内力表达式中的虚拟广义力 F_{af} 为 0,则将上述结果代入位移表达式,可得

$$x_B = -0.096 \frac{Fl}{EA}, \quad y_B = 0.728 \frac{Fl}{EA}$$

根据虚拟广义力 F_{af} 的方向,可知 B 点的水平位移是向左的;而铅垂位移是向下的。

例 1-4 悬臂梁 AB 作用载荷如图 1-11(a) 所示。已知梁的抗弯刚度 EI 为常量,试求 A 点的挠度 y_A 和截面的转角 θ_A 。轴力和剪力对于变形的影响忽略不计。

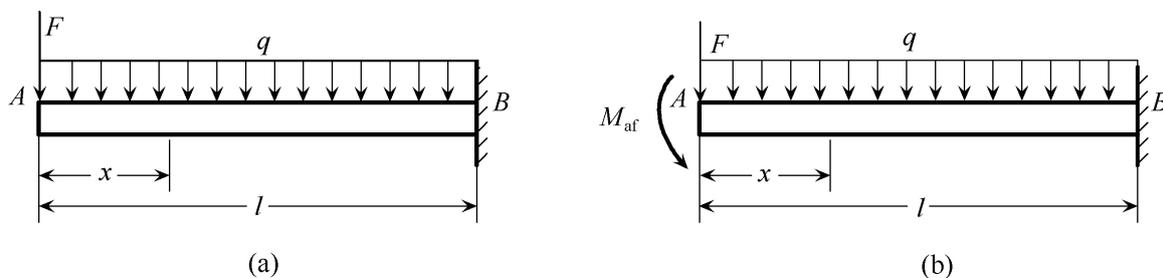


图 1-11

解 1) 首先求 A 点的挠度 y_A 。

写出梁的弯矩方程

$$M(x) = -Fx - \frac{1}{2}qx^2 \quad (0 \leq x \leq l)$$

弯矩对于集中力 F 的偏导数为

$$\frac{\partial M(x)}{\partial F} = -x$$

根据卡氏定理,有

$$\begin{aligned} y_A &= \frac{\partial V_s}{\partial F} = \int_0^l \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial F} dx = \int_0^l \frac{1}{EI} \left[-Fx - \frac{1}{2}qx^2 \right] (-x) dx \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3}Fl^3 + \frac{1}{8}ql^4 \right] \end{aligned}$$

结果为正,表示挠度与外力 F 方向一致。

2) 求解 A 截面的转角 θ_A 。

由于 A 截面没有作用外力偶,因此不能直接应用卡氏定理。假设在 A 截面作用一个虚拟的外力偶 M_{af} ,如图 1-11(b) 所示。这个虚拟的外力偶 M_{af} 称为附加力偶,通过应变能对于附加力偶的偏导数可以计算截面转角。

悬臂梁在外力和附加力偶共同作用下的弯矩方程为

$$M(x) = -Fx - \frac{1}{2}qx^2 - M_{af} \quad (0 \leq x \leq l)$$

弯矩对于附加力偶的偏导数为

$$\frac{\partial M(x)}{\partial M_{af}} = -1$$

将上述两式代入卡氏定理表达式(1-23),并且令虚拟的附加力偶 M_{af} 为 0,则

$$\begin{aligned}\theta_A &= \frac{\partial V_s}{\partial M_{af}} = \int_l \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial M_{af}} dx = \int_l \frac{1}{EI} \left[-Fx - \frac{1}{2}qx^2 \right] (-1) dx \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2}Fl^2 + \frac{1}{6}ql^3 \right]\end{aligned}$$

应该注意,计算弯矩的偏导数需要附加力偶,而一旦偏导数求解完成,就可以令附加力为零。不要在积分之后才令附加力为零,那样增加了计算工作量。

上述两个例题均采用虚拟的广义力作为附加力计算结构位移,这种方法也称为附加力法。

例 1-5 刚架 ABC 作用载荷如图 1-12 所示。已知刚架所有杆件的抗弯刚度 EI 为常量并且相等,试求 A 点的垂直位移 y_A 。轴力和剪力对于变形的影响忽略不计。

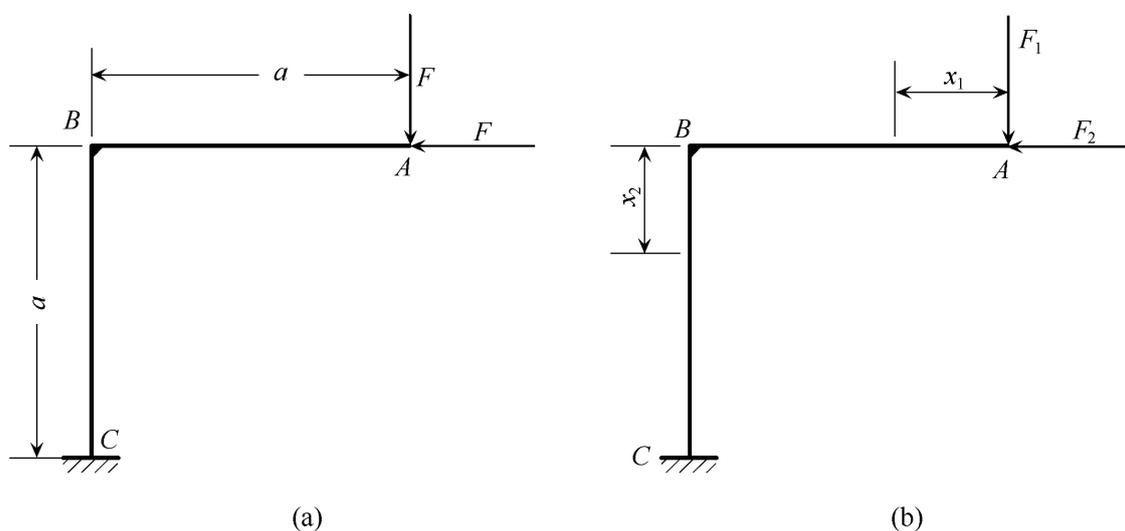


图 1-12

解 根据卡氏定理,整个应变能对于 A 点垂直方向的外力 F 的偏导数就是 A 点的垂直位移 y_A 。但是对于本题, A 点的水平载荷也是 F ,因此为了避免求解偏导数时混淆,这两个外力必须加以区别。否则,笼统地对 F 求偏导数,将得到在两个 F 力作用下沿铅垂和水平方向的位移之和,如果 A 截面作用弯矩 $M = Fa$,笼统地对 F 求偏导数后,将还包含 A 面的转角在内。设铅垂力为 F_1 ,水平载荷为 F_2 ,如图 1-12(b)所示。

刚架的弯矩方程如下:

AB 段

$$M_1(x_1) = -F_1x_1 \quad (0 \leq x_1 \leq a)$$

BC 段

$$M_2(x_2) = -F_1a + F_2x_2 \quad (0 \leq x_2 \leq a)$$

依题意,要求 A 面垂直位移,故对铅垂方向的力 F_1 求偏导数,即

$$\frac{\partial M_1(x_1)}{\partial F_1} = -x_1, \quad \frac{\partial M_2(x_2)}{\partial F_1} = -a$$

代入卡氏定理表达式,可得

$$\begin{aligned} y_A &= \int_0^a \frac{M_1(x_1)}{EI} \frac{\partial M_1(x_1)}{\partial F_1} dx_1 + \int_0^a \frac{M_2(x_2)}{EI} \frac{\partial M_2(x_2)}{\partial F_1} dx_2 \\ &= \int_0^a \frac{1}{EI} (-F_1 x_1)(-x_1) dx_1 + \int_0^a \frac{1}{EI} (-F_1 a + F_2 x_2)(-a) dx_2 \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} F_1 a^3 + F_1 a^3 - \frac{1}{2} F_2 a^3 \right] \end{aligned}$$

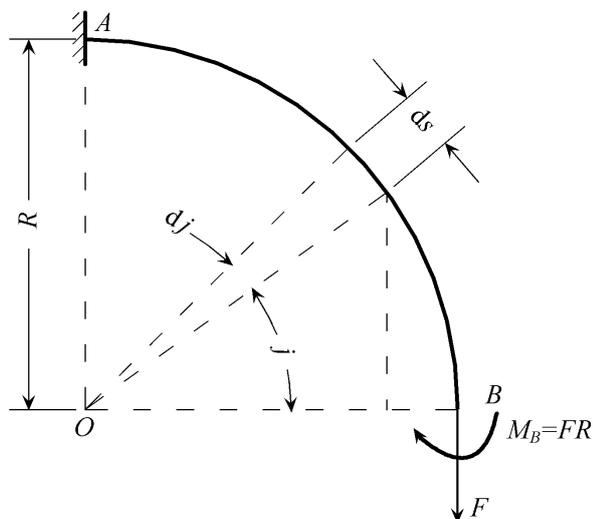


图 1-13

求完偏导数后,即可弃掉附加的下角标然后进行积分,也可积分后再弃之。

令 $F_1 = F_2 = F$, 则位移 y_A 为

$$y_A = \frac{5Fa^3}{6EI}$$

例 1-6 半径为 R 的圆弧形曲杆 AB , 角 AOB 为 90° , 作用载荷如图 1-13 所示。已知曲杆的抗弯刚度 EI 为常量, 试求 B 截面的垂直位移 y_B 和转角 θ_B , 轴力和剪力对于变形的影响忽略不计。

解 1) 求 B 截面的垂直位移 y_B 曲杆

弯矩方程为

$$M(\varphi) = FR(1 - \cos\varphi) + M_B \quad \left[0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \right]$$

为了避免混淆, 不要将 M_B 的显式代入。有

$$\frac{\partial M(\varphi)}{\partial F} = R(1 - \cos\varphi)$$

所以

$$\begin{aligned} y_B &= \int_s \frac{M(\varphi)}{EI} \frac{\partial M(\varphi)}{\partial F} ds = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [FR(1 - \cos\varphi) + M_B] R(1 - \cos\varphi) R d\varphi \\ &= \frac{1}{EI} \left[FR^3 \left[\frac{3}{4}\pi - 2 \right] + M_B R^2 \left[\frac{1}{2}\pi - 1 \right] \right] = \frac{1}{EI} FR^3 \left[\frac{5}{4}\pi - 1 \right] \end{aligned}$$

2) 求 B 截面的转角 θ_B 。

曲杆弯矩方程与求解垂直位移 y_B 相同, 而

$$\frac{\partial M(\varphi)}{\partial M_B} = 1$$

所以

$$\theta_B = \int_s \frac{M(\varphi)}{EI} \frac{\partial M(\varphi)}{\partial M_B} ds = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [FR(1 - \cos\varphi) + M_B] R d\varphi$$

$$= \frac{1}{EI} \left[FR^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{\pi}{2} M_B R \right]$$

回代 $M_B = FR$, 可得

$$\theta_B = \frac{1}{EI} FR^2 (\pi - 1)$$

运用卡氏定理时,问题的解就不再受直接用能量原理时外力必须单一的限制,而适用于对任意多个载荷的弹性系统,求任意截面处的挠度和转角。在没有作用载荷或没有与所求位移对应载荷的截面时,只需添加一个与所求位移对应的附加力,并写出包含附加力在内的内力方程,在求完偏导数之后,令附加力为零。运用卡氏定理即可求得该截面对应的位移。

1.4 莫尔积分

基于能量原理的结构变形分析方法是多样的,本节介绍莫尔积分方法。莫尔积分又称为单位载荷法,与卡氏定理方法比较,单位载荷法具有计算工作量小和简单的特点。

以下通过应变能概念推导莫尔积分。为了简化推导过程,以简支梁弯曲变形为例说明莫尔积分的基本概念。然后根据能量关系,很容易推广到任意的杆系结构。

假设简支梁在载荷 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_i, \dots, F_n$ 作用下发生弯曲变形,如图 1-14(a)所示。梁的应变能 V_s 为

$$V_s = \int_l \frac{M^2(x)}{2EI} dx$$

式中,弯矩 $M(x)$ 为载荷 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_i, \dots, F_n$ 共同作用下的简支梁横截面内力。

现在的问题是在上述载荷的作用下,如何确定梁的任意截面挠度 Δ_i 。

首先假设在上述载荷 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_i, \dots, F_n$ 作用之前,在 C 点沿 Δ_i 方向作用一个单位力 F_0 ($F_0 = 1$),如图 1-14(b)所示。在单位力 F_0 作用下,设梁的弯矩为 $\bar{M}(x)$,则简支梁内存贮的应变能 V_{s0} 为

$$V_{s0} = \int_l \frac{\bar{M}^2(x)}{2EI} dx$$

然后再作用载荷 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_i, \dots, F_n$ 于简支梁,如图 1-14(c)所示。如果材料服从胡克定理,而且结构为小变形,那么各个外力

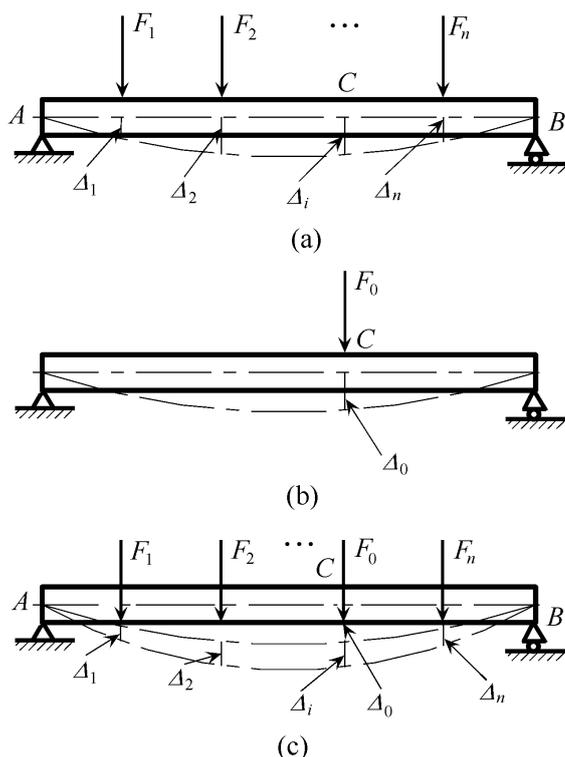


图 1-14

产生的变形是相互独立的,内力计算可以应用叠加方法。因此梁的应变能 V_{s1} 为

$$V_{s1} = \int_l \frac{[M(x) + \overline{M}(x)]^2}{2EI} dx$$

外力功 W_1 为

$$W_1 = \frac{1}{2}F_0\Delta_0 + W + F_0\Delta_i$$

式中, Δ_0 为仅作用 F_0 时梁的 C 点沿 F_0 方向的位移。 W 为载荷 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_i, \dots, F_n$ 所作外力功,数值上等于梁的应变能 V_s , 即 $W_1 = V_s$ 。

令 V_{s1} 等于 W_1 , 则

$$\int_l \frac{[M(x) + \overline{M}(x)]^2}{2EI} dx = \frac{1}{2}F_0\Delta_0 + W + F_0\Delta_i$$

由于 $\frac{1}{2}F_0\Delta_0$ 为仅有 F_0 作用时的外力功, $\frac{1}{2}F_0\Delta_0 = V_{s0}$ 。所以上式简化为

$$F_0\Delta_i = \int_l \frac{M(x)\overline{M}(x)}{EI} dx$$

注意到 $F_0 = 1$, 所以

$$\Delta_i = \int_l \frac{M(x)\overline{M}(x)}{EI} dx \quad (1-24)$$

式(1-24)称为莫尔积分。如果积分为正,说明单位力做正功,也就是说, Δ_i 与单位力方向一致;反之,积分为负,则 Δ_i 与单位力方向相反。

应该注意莫尔积分中 $M(x)$ 为载荷 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_i, \dots, F_n$ 引起的弯矩;而单位力 F_0 作用下,梁的弯矩为 $\overline{M}(x)$ 。

对于组合变形杆件,莫尔积分的一般表达式为

$$\begin{aligned} \Delta_i = & \int_l \frac{F_N(x)\overline{F}_N(x)}{EA} dx + \int_l \frac{T(x)\overline{T}(x)}{GI_n} dx \\ & + \int_l \frac{M_y(x)\overline{M}_y(x)}{EI_y} dx + \int_l \frac{M_z(x)\overline{M}_z(x)}{EI_z} dx \end{aligned}$$

莫尔积分也可以用于刚架、桁架和曲杆等结构的变形分析。对于桁架结构,由于各个杆件的轴力是常量,上式可以改写作

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n \frac{F_{Nj}\overline{F}_{Nj}l_j}{E_jA_j}$$

式中, F_{Nj} 为桁架第 j 杆中外力引起的轴力; \overline{F}_{Nj} 为单位力引起的轴力。

在莫尔积分公式推导中应用了叠加原理和以胡克定理为基础的应变能表达式(1-19),因此公式(1-24)适用于线弹性结构。但是应该注意的是莫尔积分并不是仅仅适用于线弹性问题,对于非线性弹性物体也是成立的,其表达式为

$$\Delta_i = \int_l \overline{F}_N(x) d\delta + \int_l \overline{T}(x) d\varphi + \int_l \overline{M}_y(x) d\theta_y + \int_l \overline{M}_z(x) d\theta_z \quad (1-25)$$

式中, $\overline{F_N}(x), \overline{T}(x), \overline{M_y}, \overline{M_z}(x)$ 为单位力引起的内力; $d\delta, d\varphi, d\theta, d\theta_z$ 为实际作用载荷引起的变形。

例 1-7 桁架结构如图 1-15(a) 所示。已知桁架各个杆件的抗拉压刚度 EA 均相同, 试求结点 B 的铅垂位移 y_B 。

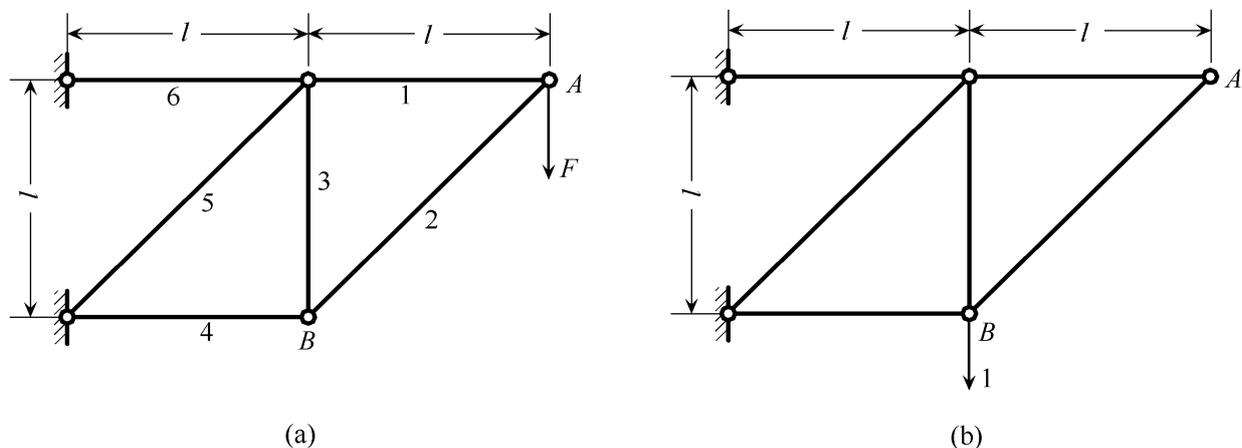


图 1-15

解 由于桁架各个杆件的抗拉压刚度 EA 均相等, 根据公式(1-24)需要计算 $F_{Nj}, \overline{F_{Nj}}$ 和杆的长度 l_j 。由于桁架具有的杆件比较多, 为了避免混淆, 首先将杆件编号, 计算杆的长度 l_j , 并且将计算结果列在表 1-1。然后根据图 1-15(a) 计算 F_{Nj} ; 其次在 B 处施加铅垂单位力, 如图 1-15(b) 所示, 计算 $\overline{F_{Nj}}$ 。

表 1-1 例 1-6 中 B 点位移的莫尔积分参数

杆编号	杆长 l_j	F_{Nj}	$\overline{F_{Nj}}$	$F_{Nj}\overline{F_{Nj}}l_j$
1	l	F	0	0
2	$\sqrt{2}l$	$-\sqrt{2}F$	0	0
3	l	F	1	$F l$
4	l	$-F$	0	0
5	$\sqrt{2}l$	$-\sqrt{2}F$	$-\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}F l$
6	l	$2F$	1	$2F l$

根据公式(1-24), 有

$$\begin{aligned} \Delta_B &= \frac{1}{EA} \sum_{j=1}^n F_{Nj} \overline{F_{Nj}} l_j \\ &= \frac{1}{EA} (F l + 2\sqrt{2}F l + 2F l) = \frac{[3 + 2\sqrt{2}] F l}{EA} \end{aligned}$$

计算结果为正, 说明 B 的铅垂位移 Δ_B 与单位力方向一致, 铅垂向下。

例 1-8 作用均匀分布载荷 q 的简支梁 AB , 如图 1-16 所示。已知梁的抗弯刚