科学版研究生教学丛书

应用泛函分析

门少平　封建湖　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书系统地介绍了泛函分析的基础理论知识及其在许多领域中的应用.全书共分9章,包括基础知识,度量空间理论,赋范线性空间与有界线性算子理论,Banach空间的基本理论与主要定理,内积空间与Hilbert空间的理论等.本书基本概念清晰准确,理论分析科学严谨,语言叙述通俗易懂,结构编排由浅入深,注重启发性.书中编写了大量的例题以帮助读者理解、掌握泛函分析的基本思想和基本方法;各章节都配有一定数量的习题供读者练习之用;最后,本书还给出大部分习题的解答以供读者检查自己的学习和知识掌握情况.

本书适用于高等院校工科专业的硕士、博士研究生,数学与应用数学、信息与计算科学专业本科生,从事科学研究的广大科技工作者.

图书在版编目(CIP)数据

应用泛函分析/门少平,封建湖编著.—北京:科学出版社,2005

(科学版研究生教学丛书)

ISBN 7-03-014977-7

Ⅰ.应… Ⅱ.①门… ②封… Ⅲ.泛函分析-研究生-教学参考资料 Ⅳ.O177

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第014163号

责任编辑:杨 波 姚莉丽/责任校对:陈丽珠

责任印制:张克忠/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年7月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2006年2月第二次印刷 印张:13 1/4

印数:3 001—6 000 字数:247 000

定价:18.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

前　　言

泛函分析是一门研究探讨不同领域问题本质和共性的学科.它起源于经典分析,是数学的一个抽象分支.

20 世纪初期,随着线性常微分方程和偏微分方程、变分学、逼近论,特别是线性微积分方程等学科理论的发展及大量研究结果的涌现,数学家们逐渐意识到:在各种看似毫不相干的领域中,许多结果往往具有类似的特征和性质.通过去伪存真、仔细研究与提炼,人们获得了处理这些问题的一些有效且统一的途径.

抽象地处理问题,虽然有不直观的一面,但优越性也是易见的:它把握住了事物最本质的内容,使研究者的观察免受非本质细节的干扰,从而对问题看得更深入、更清晰.同时,由于所得的结果反映了这些事物的本质和共性,所以它又可以应用到大量不同的领域中去.正是由于这些优点,才使得泛函分析成为许多应用学科进行科学研究的必备知识和有力助手.

虽然泛函分析是一门抽象课程,但它的理论仍来自于各种具体模型.本教材通过大量例题说明,用泛函分析的观点思考问题,就会发现许多毫不相干的领域其实有着许多本质的联系.这启发人们在研究某些陌生问题时,应设法把它与熟悉的领域联系起来,并从后者的研究方法和结果中得到启迪和线索.

泛函分析课程的内容是相当丰富的.在假定读者已具备高等数学、线性代数以及集合论等方面的数学基础知识的前提下,本书力争在有限的课时内给读者树立起泛函分析的基本概念,并掌握泛函分析理论的核心内容,如三大空间(度量空间、赋范空间、内积空间)和算子概念,以及线性泛函分析的"四大定理"(延拓定理、逆算子定理、闭图像定理、共鸣定理)等.为方便读者自学,书中大部分习题都给出了解答;同时,为了重点突出,有一些地方被处理成选读内容而打了" * "号,请读者课外选择阅读.

最后,我们还要指出:将抽象方法应用于具体情况,并体会出抽象方法的功效,这并不比当初提炼这些抽象方法容易,因为随情况不同,方法是十分多变的.特别是读者要将泛函分析的抽象理论应用于自己所面对的问题,更不是一件简单直观的事情,它不仅要求研究者具有灵活的思维和丰富扎实的专业知识,而且还需要付出艰苦不懈的科研毅力.

本书是在为工科研究生和高年级本科生讲授的"泛函分析"课程讲义的基础上整理形成的.在出版之前,作者曾经在西北工业大学工科研究生"泛函分析"课程中多次试用,得到了 1999 级～2003 级学生们的许多帮助,作者在此表示衷心感谢.

本书第 1、2 章由封建湖编写,第 3～9 章由门少平编写,西北工业大学数学与信息科学系刘哲、崔学伟、张慧清等三位教师参加了部分习题的编写工作,最后由

门少平统一定稿.

西北大学理学院王成堂教授、西安交通大学理学院马逸尘教授、西北工业大学理学院钮鹏程教授仔细审阅了书稿,提出了许多宝贵的意见.西北工业大学数学与信息科学系、西北工业大学教务处和科学出版社的有关同志对本书的出版给予了极大的支持,我们深表感谢.正是由于有了各方面的共同努力,才使本书得以完成.

尽管对书中进行了多次修改,难免还有疏漏和错误之处,敬请有关专家和读者不吝赐教.

编　者

目　　录

第 1 章　基础知识

1.1　集　　合

1.1.1　集合的几个概念

1. 集合及其运算

首先列出本书中常用的记号及集合运算的有关结论.

$\varnothing$:空集.

"$\in$"和"$\notin$":"属于"和"不属于".表元素与集合的关系.例如:$a\in A$(读作"a属于A")表示a是集合A的元素,$a\notin A$(读作"a不属于A")表示a不是集合A的元素.

"$\subset$"和"$\not\subset$":"包含于"和"不包含于".表集合与集合的关系.例如:$A\subset B$(读作"A包含于B")表示A是B的**子集**,即A的每个元素也是B的元素,也记作$B\supset A$(读作"B包含A").$A\not\subset B$(读作"A不包含于B")表示A不是B的**子集**,即A至少有一个不属于B的元素.

"$\exists$"、"$\exists !$"和"$\nexists$":"存在"、"存在惟一"和"不存在".

结论:$\varnothing$是任何集合的子集.

$A=B$:集A与B**相等**(二集由完全相同元素组成.或者说:二集互相包含).

$A\neq B$:集合A与集合B**不等**(有元素,它只属于两集之中的某一个集).

$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$:A与B的**并集**(由A,B的全体元素所组成的集).

$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$:A与B的**交集**(由A,B的共同元素所组成的集).

$A\cap B=\varnothing$:A与B不相交(二集无公共元素).

$A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$:A与B的**差集**(由A中不属于B的元素所成的集).

$A^c=X-A$:A在X中的**余集**.

集合运算有以下结论(证明略).

(1) $A\cup A=A$, $A\cap A=A$.

(2) $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$.

(3) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$; $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=$

$A\cap B\cap C$.

(4) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$; $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(5) $A\cap B\subset A$, $A\cap B\subset B$.

(6) $A\cup B\supset A$, $A\cup B\supset B$.

(7) $(A^{c})^{c}=A$, $X^{c}=\varnothing$, $\varnothing^{c}=X$.

(8) (De Morgan 法则) $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)^{c}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n^{c}$, $\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)^{c}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n^{c}$.

Cartesian 乘积(或**笛卡儿乘积**)**概念**:设 X 与 Y 是两个非空集合,由所有序对 (x,y)(其中:$x\in X$, $y\in Y$)所成的集,称为 X 与 Y 的 **Cartesian 乘积**,记为 $X\times Y$.

2. 集合的势,可数集与不可数集

设 A 是一个集合,A 中元素的个数,称为 A 的**势**.如果 A 的势是有限数,则称 A 为**有限集**;如果 A 的势不是有限数,则称 A 为**无限集**.

由于$\varnothing$的势为 0,所以$\varnothing$是有限集.

若两个集合的元能建立一一对应的关系,则认为这两个集合的元是一样多的,或者说,它们的势相等.特别,若 A 能与**正整数集**(也称"**自然数集**")一一对应,或者说,**A 的元**(按对应的自然数的顺序)**可用一个排列形式全部列出**,则称 A 为**可列集**或**可数集**;非可数的无限集,称为**不可列集**或**不可数集**.

若 A 的势不超过可数集的势,就称 A 为**至多可数集**.显然,**可数集的子集是至多可数集**.

任意两个可数集,因它们各自都能与自然数集建立一一对应关系,故它们之间也能建立起元素的一一对应关系.所以说,可数集所含的元素是一样多的.

自然数集本身是一个可数集.此外,我们再给出一个重要的命题.

定理 1.1.1 有理数集 Q 是一个可数集.

证 为证 Q 是可数集,只需举出一个能将有理数全部列出的数列即可.下面,我们给出全体非负有理数的一种排列方法,然后通过正负相间,便可得到一个由全体有理数组成的数列.

任何一个非负有理数 r,都可惟一表为一个既约分数$\dfrac{p}{q}$的形式,称 $p+q$ 为 r 的权.比如,权为 1 的有理数只有 $0=\dfrac{0}{1}$,权为 2 的有理数只有 $1=\dfrac{1}{1}$,但权为 3 的有理数有 $0.5=\dfrac{1}{2}$和 $2=\dfrac{2}{1}$,….显然,权相等的有理数是有限多的.

对任何两个非负的有理数 r, s,将其中权小的数排在权大的数前面;如果有理数 r, s 的权相等,将其中分子小的数排在分子大的数前面.按照这种方法,就可将

非负有理数全体用数列的形式表出.□

我们给出可数集的下述性质.

定理 1.1.2 若 A,B 是两个可数集,则 $A\cup B$ 和 $A\times B$ 都是可数集.

证 设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$,$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$,考虑排列:$a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n, \cdots$,去掉其中重复的元素,就得到了 $A\cup B$ 的一个排列,所以 $A\cup B$是可数集.

设 $r=(a_m, b_n)$是 $A\times B$ 元,称 $m+n$ 为 r 的权.显然,权相等的元在 $A\times B$ 中是有限多的.对 $A\times B$ 中任两个元 r,s,将其中权小的元排在权大的前面;如果 r 与 s 的权相等,就按 A 的排法,将 r 与 s 中第一分量靠前的元排在另一元的前面.由此就可将 $A\times B$ 中元用排列的形式表出,所以 $A\times B$ 是可数集.□

设 A 是任一集合.由 A 的所有子集所组成的集,称为是 A 的**幂集**,记为 2^A.例如,若 $A=\{1,2\}$,则 $2^A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$.**$A$ 的势小于 2^A 的势(即 A 只能与 2^A 的一个真子集建立一一对应关系,但不能与 2^A 建立一一对应关系)**,此结论对 A 为无限集时也成立(其证明可在集合论方面的专著中查找).进而对无限集,虽然它们的势都不是有限正整数,但不能因此认为它们的势都相等.

特别,我们证明以下定理.

定理 1.1.3 开区间(0,1)是不可数集.

证 首先,对$\forall\ x\in(0,1)$,则 x 可能是有限纯小数、也可能是无限循环或不循环的纯小数.对有限纯小数,将它改写为以 9 为循环节的无限循环小数形式.例如,将 0.5 表成 0.499….这样,对任何 $x\in(0,1)$,x 都可惟一地表成无限循环或不循环纯小数“$0.r_1r_2\cdots r_n\cdots$”的形式,其中整数 r_n 不全为 9(否则 $x=1\notin(0,1)$),并且有无限多个 r_n 不为 0.

若(0,1)中的数可用某个数列形式全部排出,设为数列 $A=\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$,其中,

$$x_1=0.r_1^1r_2^1\cdots r_n^1\cdots,\quad x_2=0.r_1^2r_2^2\cdots r_n^2\cdots,\quad \cdots,\quad x_n=0.r_1^nr_2^n\cdots r_n^n\cdots,\quad \cdots.$$

然而我们下面可证明有 $x\in(0,1)$,但 x 不在数列 A 中,从而与 A 是(0,1)中全部数的排列的假设矛盾,这便证明了(0,1)中的数是无法用数列形式全部排出的.

若 $r_i^i\neq 5$,取 $r_i=5$;若 $r_i^i=5$,取 $r_i=6(i=1,2,\cdots)$,再令 $x=0.r_1r_2\cdots r_n\cdots$.显然 $x\in(0,1)$,但不与$\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$中任何数相等,故 x 不在 A 中.□

任何无限集都含有可数子集,从这个意义上说,可数集是势最小的无限集.特别,若把可数集的势记为$\aleph_0$、开区间(0,1)的势记为$\aleph$,则由定理 1.1.3,知有$\aleph_0<\aleph$.

由定理 1.1.1~定理 1.1.3,便可知在开区间(0,1)中,无理数点不但存在,而且比有理数点要多得多.这是一个不能靠直观想像、而只能用严格论证才能得到的

结论.

1.1.2　实数集

1. 实数集上的距离、实数集的完备性以及实数集的其它重要性质

记 $\mathbf{R}^1$ 为实数集.对 $\mathbf{R}^1$ 中的任意两个数 x, y,称 $d(x, y)=|x-y|$ 为 x 与 y 之间的距离.显然 $\mathbf{R}^1$ 上的距离 d 满足以下性质:

① $\forall x, y\in\mathbf{R}^1$,都有 $d(x, y)\geqslant 0$,且 $d(x, y)=0$ 当且仅当 $x=y$(称为"**非负性**");

② $d(x, y)\leqslant d(x, z)+d(y, z)$, $\forall x, y, z\in\mathbf{R}^1$(称为"**三角不等式**").

设$\{x_n\}$是一数列,若有 $x\in\mathbf{R}^1$,使得当 $n\to\infty$时,有$|x_n-x|\to 0$,则称$\{x_n\}$是 $\mathbf{R}^1$ 中一个**收敛列**,并称 x 为$\{x_n\}$的**极限**,记为 $x_n\to x$ 或$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$.

设$\{x_n\}$是一数列,若它具有如下性质:

"对任意 $\varepsilon>0$,都存在 $N=N(\varepsilon)$,当 $m, n>N$ 时,恒有 $|x_m-x_n|<\varepsilon$ 成立."

则称$\{x_n\}$是 $\mathbf{R}^1$ 中的**基本列**或**柯西**(Cauchy)列.

定义 1.1.1　设 A 是 $\mathbf{R}^1$ 的子集,若 A 中任意的基本列都在 A 中有极限,则称 A 为 $\mathbf{R}^1$ 的一个**完备子集**.□

例如,闭区间[0,1]是 $\mathbf{R}^1$ 中一完备子集,而开区间(0,1)不是 $\mathbf{R}^1$ 中的完备子集,因为$\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots\right\}$是(0,1)中的基本列,但它的极限 0 不在(0,1)中.

特别,实数集本身是 $\mathbf{R}^1$ 中的完备子集,这就是下面的定理.

定理 1.1.4(柯西收敛准则)　若$\{x_n\}$是 $\mathbf{R}^1$ 中基本列,则$\{x_n\}$在 $\mathbf{R}^1$ 中收敛.□

定理 1.1.4 指出了实数集的一个重要性质,这个性质称为**实数集的完备性**.

定义 1.1.2　设 A 是 $\mathbf{R}^1$ 的子集.若有常数 $M>0$,使得 A 中的任意数 x 到 0 的距离$|x-0|=|x|$都不大于 M,则称 A 为 $\mathbf{R}^1$ 的**有界子集**;若存在 $x\in\mathbf{R}^1$,且存在 A 中数列$\{x_n\}$($x_n\neq x$),使得 $x_n\to x$,则称 x 为 A 的**聚点**;若 A 包含它的所有聚点,则称 A 为 $\mathbf{R}^1$ 中一个**闭集**;若 A 的任意数列中都含有基本子列,则称 A 为**致密集**;若 A 是一个完备的致密集,则称 A 为**紧集**.**规定任意有限集都是紧集**.□

显然,若 A 是紧集,则 A 中任意序列都存在在 A 中收敛的子列.

我们已经熟知一些常见的致密集和紧集的例子.比如,闭区间[0,1]和开区间(0,1)都是 $\mathbf{R}^1$ 中的有界集,并都是致密集;因[0,1]是完备集,故它也是紧集.

定理 1.1.5　$\mathbf{R}^1$ 中任意有界集都是致密集,而有界闭集都是紧集.

证　只考虑无限集情况,且只证前半命题.设 A 是 $\mathbf{R}^1$ 中一有界无限集,$\{x_n\}$是 A 中任取的数列,则由 A 的有界性,有有界区间$[-M, M]$,使$\{x_n\}\subset[-M, M]$.将$[-M, M]$平分为两个小区间$[-M, 0]$和$[0, M]$,因$\{x_n\}$是无限

集,必有其中一个小区间(记为$[a_1,b_1]$)含有$\{x_n\}$中无限多个数,在$[a_1,b_1]\cap\{x_n\}$中取定一个数,记为x_{11};再将$[a_1,b_1]$平分为两个小区间,仍由于$\{x_n\}$是无限集,必有一个小区间(记为$[a_2,b_2]$)含有$\{x_n\}$中无限多个数,在$[a_2,b_2]\cap\{x_n\}$中取定一个排在x_{11}后面的数,记为x_{12};….以这种方法,我们得到$\{x_n\}$中一个子列$\{x_{1n}\}$及一组区间$[a_n,b_n]$,满足:

(1) 区间长度$b_n-a_n=\frac{1}{2^{n-1}}M\to 0$;

(2) 当$m>n$时,有$x_{1m}\in[a_n,b_n]$.

由(1),可知对任意$\varepsilon>0$,都存在N,使得$b_N-a_N<\varepsilon$;由(2),便知当$m,n>N$时,有$|x_{1n}-x_{1m}|\leqslant b_N-a_N<\varepsilon$.这说明$\{x_{1n}\}$是$\{x_n\}$中一个基本列,故由定义,得知$A$是致密集.□

用上面定理证明中使用的方法以及实数集的完备性,能证得在$\mathbf{R}^1$中成立着下面的闭区间套定理.

定理 1.1.6(闭区间套定理) 设$[a_n,b_n]$是$\mathbf{R}^1$中一列闭区间,满足下列条件:

(1) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$, $n=1,2,\cdots$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}|b_n-a_n|=0$.

则存在惟一的$x\in\mathbf{R}^1$,使得$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{x\}$.□

2. 实数集的稠密子集

定义 1.1.3 设M,A是$\mathbf{R}^1$中任意两个子集.如果对任意$x\in M$,及任意$\delta>0$,都存在$y\in A$,使得不等式$|y-x|<\delta$成立,则称A在M中**稠密**.特别,如果A在$\mathbf{R}^1$中稠密,则称A为$\mathbf{R}^1$的一个**稠密子集**.□

定义 1.1.3 的一个等价说法是:若A在M中稠密,则对M中任一取定的实数x,及$\delta>0$,在该x的δ-**邻域**$O(x,\delta)=\{y\in\mathbf{R}^1:|y-x|<\delta\}$中,都含有$A$中的数.

定理 1.1.7 有理数集$\mathbf{Q}$是实数集$\mathbf{R}^1$中的一个稠密子集(由此也可知$\mathbf{Q}$在$\mathbf{R}^1$的任一集合M中都稠密).

证 对$\mathbf{R}^1$中任取定的x,有整数n,使$x\in[n,n+1]$.考虑x的任一δ-邻域$O(x,\delta)$,它是一个x为中心、长2δ的开区间.显然有整数m,使$\frac{1}{m}<\delta$.将闭区间$[n,n+1]$作m等分,则分点$n+\frac{i}{m}$($i=0,1,\cdots,m$)都是有理数.由于相邻分点的距离为$\frac{1}{m}<\delta$,故必有分点含于$O(x,\delta)$中,从而在x的任意邻域中,都含有有理数.□

3. 实数子集的上确界和下确界

设 M 是 $\mathbf{R}^1$ 中的子集,若有 $b\in\mathbf{R}^1$,使对一切 $x\in M$,都有 $x\leqslant b$,则称 b 为实数集 M 的一个**上界**;M 的最小上界称为 M 的**上确界**,记为 $\sup M$.类似地,若有 $a\in\mathbf{R}^1$,使对一切 $x\in M$,都有 $x\geqslant a$,则称 a 为实数集 M 的一个**下界**;M 的最大下界称为 M 的下确界,记为 $\inf M$.

例 1.1.1　设 $M_1=\left\{3-\dfrac{1}{n}:n=1,2,\cdots\right\}$, $M_2=(-1,4)$, $M_3=[-1,+\infty]$,即 M_1 是数列, M_2, M_3 分别是有界和无界区间.则 $\inf M_1=2$, $\sup M_1=3$; $\inf M_2=-1$, $\sup M_2=4$; $\inf M_3=-1$, $\sup M_3=+\infty$.

可以看到,数集的上确界与数集中的最大数是不同的概念.数集中若有最大数,则它一定是该集的上确界,但反之并不成立.比如上例中, M_1 的上确界是 3,但最大数却不存在.

定理 1.1.8　$r=\inf M$ 的充分必要条件是它满足下面两个条件:

(1) r 是实数集 M 的下界;

(2) 存在 $\{m_n\}\subset M$,使得 $m_n\to r$.

证　($\Rightarrow$)只证 $r\neq-\infty$ 情况. r 显然是实数集 M 的下界.又对 $\forall\ \varepsilon>0$,在开区间 $(r,r+\varepsilon)$ 中必有 M 中的数(否则 $r+\varepsilon$ 是 M 的下界,与 r 是最大下界的假设矛盾),于是当 $\varepsilon\to0$ 时,容易找到 $\{m_n\}\subset M$,满足 $m_n\to r$.

($\Leftarrow$)设 r 是实数集 M 的下界,且存在 $\{m_n\}\subset M$,使得 $m_n\to r$.则对任意 $s>r$, s 都不可能是 M 的下界(由于 $m_n\to r$,故必有其中的点 m_n,满足 $m_n<s$),所以 r 是 M 的最大下界,即 $r=\inf M$.□

特别,如果 r 是实数集 M 的下界,且 $r\in M$,则取 $m_n\equiv r$,由定理 1.1.8,便知 r 是 M 的下确界,并且 r 也是 M 中的最小元.上面的 M_1 和 M_3 就都是这样的集合.

同样,有“$r=\sup M\Leftrightarrow r$ 是 M 的上界,且存在 $\{m_n\}\subset M$,使 $m_n\to r$”成立.

定理 1.1.9　若数集 M 有有限下(上)界,则必有有限下(上)确界.

证　只证明下界命题.设 $a>-\infty$ 是 M 的一个下界,在 M 中任取定一数 x_1,则 $a\leqslant x_1$.若 $a=x_1$,则 a 就是 M 的下确界;若 $a<x_1$,考虑闭区间 $[a,x_1]$ 的中点 p,若 p 是 M 的下界,则令区间 $[m_1,n_1]=[p,x_1]$;若 p 不是 M 的下界,则有 $x_2\in M$,使得 $x_2<p$,此时令区间 $[m_1,n_1]=[a,p]$.总之我们得到一个闭区间 $[m_1,n_1]$,它的长度是闭区间 $[a,x_1]$ 的一半,且左端点 m_1 是 M 的下界,右端点 n_1 不是 M 的下界.同样,我们又可以得到闭区间 $[m_2,n_2]$,它的长度是闭区间 $[m_1,n_1]$ 的一半,且左端点 m_2 是 M 的下界,右端点 n_2 不是 M 的下界.依次类

推,可得到一组闭区间$[m_k, n_k]$, $k=1,2,\cdots$,其左端点 m_k 是 M 的下界,右端点 n_k 不是 M 的下界,且满足

(1) $[m_{k+1}, n_{k+1}]\subset[m_k, n_k]$, $k=1,2,\cdots$;

(2) $\lim\limits_{k\to\infty}|m_k-n_k|=0$.

由闭区间套定理,存在惟一 $r\in\mathbf{R}^1$,使得$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}[m_k, n_k]=\{r\}$.显然有$\lim\limits_{k\to\infty}m_k=\lim\limits_{k\to\infty}n_k=r$.

由于 m_k 是 M 的下界,及 $m_k\to r$,用反证法可首先证得 r 是 M 的下界(留作习题).其次,由于 n_k 不是 M 的下界,有 $x_k\in M$,使 $r\leqslant x_k<n_k$ 成立.令 $k\to\infty$,便得到 $x_k\to r$.据定理 1.1.8,便证得 r 是 M 的下确界.□

下面的结论是明显的.

定理 1.1.10 若实数集 A, B 满足 $A\subset B$,则

$$\inf B\leqslant\inf A\leqslant\sup A\leqslant\sup B.$$ □

习题 1.1

1. 证明集合运算的性质(1)～(8).
2. 证明开区间(0,1)与实数集 $\mathbf{R}^1$ 的势相等.
3. 设 f 是 $\mathbf{R}^1$ 上的单调函数,证明 f 的不连续点全体是至多可数集.
4. 设$\{A_n\}$中每个 A_n 都是可数集,证明 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 及 $B=A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 都是可数集.
5. 举例说明 $\mathbf{R}^1$ 中的闭集不全是致密集.
6. 闭区间套定理中的闭区间序列能否换成一列开区间?
7. 证明$\sup\limits_{n\geqslant1}\left\{(-1)^n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right\}=1$.
8. 若 a_n 是实数集 M 的下界,且 $a_n\to a$.证明 a 也是 M 的下界.问:a 是否就是下确界?

9*. 若 $x\in A$ 满足条件:存在 x 的某个邻域 $O(x,\delta)$,使得 $O(x,\delta)\subset A$,则称 x 为实数集 A 的一个**内点**.若实数集 A 的每个点都是 A 的内点,则称 A 为一个**开集**.证明:开区间(0,1)是一个开集.

1.2 连续函数的性质及其黎曼积分

1.2.1 连续函数的性质

设 $f(t)$是 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数,则 $f(t)$具有下述性质.

(1) **保号性**.若 $t_0\in\mathbf{R}^1$ 使得 $f(t_0)>0$,见图 1.1,则存在 $\delta>0$,使有 t_0 的邻域 $O(t_0,\delta)$, $\forall t\in O(t_0,\delta)$,都有

$$f(t)>0.$$

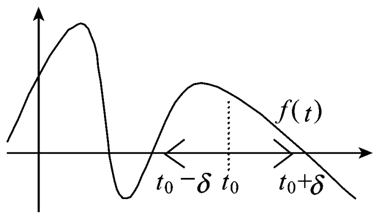


图 1.1

(2) **介值定理**. 设 M 是 $\mathbf{R}^1$ 中任一区间,若 c 满足 $\inf\limits_{t\in M} f(t)<c<\sup\limits_{t\in M} f(t)$,则存在 $t_0\in M$,使 $f(t_0)=c$.

(3) 对任意 $r\in\mathbf{R}^1$,记 $Er=\{t\in\mathbf{R}^1: f(t)>r\}$,则 Er 是 $\mathbf{R}^1$ 中的开子集.

(4) 若 $f(t)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则存在 t_0, $\bar{t}_0\in[a,b]$,使得 $f(t_0)=\inf\limits_{t\in[a,b]} f(t)$, $f(\bar{t}_0)=\sup\limits_{t\in[a,b]} f(t)$ 成立.

我们只证明性质(3)和性质(4).

先证性质(3),根据习题 1.1 第 9 题,只需证 Er 中的点都是内点. $\forall\ t_0\in Er$,则有 $f(t_0)>r$. 令 $h(t)=f(t)-r$,则 $h(t)$ 连续,且 $h(t_0)>0$. 由连续函数的保号性质,有 t_0 的邻域 $o(t_0,\delta)$,使得 $\forall\ t\in o(t_0,\delta)$,都有 $h(t)>0$,进而可得 $O(t_0,\delta)\subset Er$,所以 t_0 是 Er 中的内点. 再由 $t_0\in Er$ 的任意性,便证得 Er 是开集.

再证性质(4). 设 $c=\inf\limits_{t\in[a,b]} f(t)$,则存在 $\{t_n\}\subset[a,b]$,使得

$$f(t_n)\to c,\tag{1.1}$$

由定理 1.1.5, $[a,b]$ 是紧集,故在 $\{t_n\}$ 中有收敛子列(不妨设为它自己),且极限(设为 t_0) 属于 $[a,b]$. 在(1.1)中令 $n\to\infty$,便得到 $f(t_0)=c$. 同理可证有 $\bar{t}_0\in[a,b]$,使 $f(\bar{t}_0)=\sup\limits_{t\in[a,b]} f(t)$ 成立. □

性质(4)说明,有界闭区间上的连续函数能达到**最小值**和**最大值**,分别将它们记为 $\min\limits_{a\leqslant t\leqslant b} f(t)$ 和 $\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b} f(t)$.

1.2.2　连续函数序列的极限

设 $f(t)$ 和 $f_n(t)$ $(n=1,2,\cdots)$ 都是 $[a,b]$ 上的函数,若 $\forall\ t\in[a,b]$ 及 $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ N=N(\varepsilon,t)>0$,当 $n>N$ 时,有 $|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon$,则称函数列 $f_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上**处处收敛**于 $f(t)$;若 $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ N=N(\varepsilon)$(**$N$ 与 t 无关**)>0,当 $n>N$ 时,对 $\forall\ t\in[a,b]$,有 $|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon$,则称函数列 $f_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上**一致收敛**于函数 $f(t)$.

函数列的一致收敛在分析数学中是一个十分重要的概念,下面给出此方面的一些结论(有关证明可在"高等数学"或"数学分析"等书籍中查找),这些结论在本书后面的讨论中都有重要应用.

定理 1.2.1　若在 $[a,b]$ 上函数列 $\{f_n(t)\}$ 的每一项 $f_n(t)$ 都连续,且 $f_n(t)$ 一致收敛于 $f(t)$,则函数 $f(t)$ 也在 $[a,b]$ 上连续. □

定理 1.2.2　若在 $[a,b]$ 上函数列 $\{f_n(t)\}$ 的各项 $f_n(t)$ 都连续可导,且 $\{f_n(t)\}$ 收敛于 $f(t)$, $\{f'_n(t)\}$ 一致收敛于 $g(t)$,则 $f(t)$ 也在 $[a,b]$ 上可导,且

$f'(t)=g(t)$,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_n(t)=g(t)=f'(t)$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lim_{n\to\infty}f_n(t))(\textbf{即极限号与求导数号可以交换})$$

又,此时$\{f_n(t)\}$在$[a,b]$上也是一致收敛于$f(t)$的. □

我们强调,定理1.2.1的条件不能减弱为处处收敛.

例1.2.1 令$f_n(t)=t^n$,则$f_n(t)$在$[0,1]$上处处收敛于函数

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{当 } 0\leqslant t<1 \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } t=1 \text{ 时},\end{cases}$$

但$f(t)$在$[0,1]$上不连续.

1.2.3 黎曼积分

定义1.2.1 设$f(t)$是$[a,b]$上的函数.给$[a,b]$加入分点D:$x_0=a<x_1<\cdots<x_i<\cdots<x_n=b$,这些点将$[a,b]$分成了$n$个小区间$[x_{i-1},x_i]$($i=1,2,\cdots,n$);在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上取$\xi_i$和$\eta_i$,使$f(\xi_i)$和$f(\eta_i)$分别为$f(t)$在$[x_{i-1},x_i]$上的最大值和最小值,再令

$$\Lambda(D)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),\qquad \lambda(D)=\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)(x_i-x_{i-1}),$$

分别称$\Lambda(D)$和$\lambda(D)$为$f(t)$关于分法D的**达布大和**和**达布小和**;如果存在**有限**实数I,使得对任意分法D,只要分点越来越密、最长的小区间长度趋于0时,都有$\Lambda(D)\to I$及$\lambda(D)\to I$成立,则称$f(t)$在$[a,b]$上黎曼(Riemann)可积,并称I为$f(t)$在$[a,b]$上的黎曼积分,记为$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.□

上述积分过程可简单记忆为**分割**、**作和**、**求极限**.

$[a,b]$上的连续函数都是黎曼可积函数.非黎曼可积函数也是存在的.

例1.2.2 设

$$\pi(t)=\begin{cases}0, \text{当 } t \text{ 是}[0,1] \text{ 中的无理数时},\\ 1, \text{当 } t \text{ 是}[0,1] \text{ 中的有理数时},\end{cases}$$

则有$\Lambda(D)\equiv1$,$\lambda(D)\equiv0$,因此$\pi(t)$在$[0,1]$上不是黎曼可积函数.

定理1.2.3 若连续函数序列$\{f_n(t)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(t)$,则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b \lim_{n\to\infty}f_n(t)\mathrm{d}t(\textbf{即积分号与极限号可以交换}),$$

且$\forall\, t\in[a,b]$,有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^t f_n(s)\mathrm{d}s=\int_a^t f(s)\mathrm{d}s=\int_a^t \lim_{n\to\infty}f_n(s)\mathrm{d}s. \qquad \square$$

习题 1.2

1．证明连续函数的保号性质．

2．求证：方程 $x^3+x-1=0$ 在区间(0,1)中至少有一个根．

3．若 $t\to t_0$(或∞)时，有 $f(t)\to c$，则对一切 $t_n\to t_0$(或∞)，都有 $f(t_n)\to c$．利用这个结论，证明$\lim\limits_{t\to\infty}\cos t$ 不存在．

4．(夹逼原理)　若在 t_0 的某去心邻域内，有 $f(t)\leqslant g(t)\leqslant h(t)$且$\lim\limits_{t\to t_0}f(t)=\lim\limits_{t\to t_0}h(t)=A$ 成立，则有$\lim\limits_{t\to t_0}g(t)=A$．

请应用夹逼定理，证明$\lim\limits_{t\to 0}t\left[\dfrac{1}{t}\right]=1$，其中$\left[\dfrac{1}{t}\right]$表示实数$\dfrac{1}{t}$的整数部分．

5．证明$[a,b]$上的连续函数列 $f_n(t)$一致收敛于 $f(t)$的充要条件是 $\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|f_n(t)-f(t)|\to 0$．

6．用上题的结论证明：$f_n(t)=\sin(\pi t^n)$ 在$[0,1]$上处处收敛于常函数 $f_0(t)=0$，但不一致收敛于常函数 0．

7．证明：若函数列 $f_n(t)$一致收敛于 $f(t)$，则 $f_n(t)$必处处收敛于 $f(t)$，反之不一定成立．

1.3　勒贝格测度与勒贝格积分

1.3.1　集合的测度

在高等数学中，经常提到直线上一个集合为“可求长度”、平面上一个子集为“可求面积”等概念．比如，对于直线上的一个区间 A(开、闭、半开半闭均可)，A 的“长度”$\mu(A)$就是 A 的右端点与左端点之差．

考察计算“区间长度”的“函数”μ，它的“定义域”$\mathscr{B}$是由“区间或有限个区间的并集”所组成，并且 μ 满足下面的条件：

(1) 对$\mathscr{B}$中的任意集合 A，都有 $\mu(A)\geqslant 0$；

(2) 若 A 是$\mathscr{B}$中两个不相交区间 B 和 C 的并集(称 B,C 为 A“构成区间”)，则 $\mu(A)=\mu(B)+\mu(C)$；若 $B,A\in\mathscr{B}$满足 $B\subset A$，则 $\mu(A-B)=\mu(A)-\mu(B)$(这特别意味着 $\mu(\varnothing)=0$)．

特别指出，并不是任意实数集都是“可求长”的．设 A 为开区间(0,1)中无理数的全体，则 A 就不是可求长的集合，即 A 不在 μ 的定义域$\mathscr{B}$中．

一般的，我们把一个自变量取为集合的实函数称为“集函数”．特别，若集函数还满足上面两个条件，就称该集函数为一个“测度”函数．上面的 μ 就是一个测度函数，通常称为“**黎曼测度**”．能用黎曼测度求出“长度”的集合称为“**黎曼可测集**”，

而 μ 的定义域 $\mathscr{B}$ 就是黎曼可测集的集合，它关于集合的有限并和差运算是封闭的，即，若 $B, A \in \mathscr{B}$，则 $A \cup B$ 和 $A - B$ 都在 $\mathscr{B}$ 中.

黎曼测度有时还不能满足研究的需要，主要是其中的黎曼可测集还不够多，所以人们还努力寻找了一些其它测度函数，最重要的一个便是勒贝格(Lebesgue)测度函数.下面对一般可测集、测度、测度空间等概念，特别是勒贝格测度作一简介，它们都属“实变函数论”课程的内容，欲了解更多情况，请阅文献[1](上册).

① 设 X 是 $\mathbf{R}^1$ 的一个子集，$\mathscr{B}$ 是由 X 的某些子集所成的**非空集类**(即 $\mathscr{B}$ 是由 X 的**某些子集为元素**所成的集合).如果对于任意 $E_1, E_2 \in \mathscr{B}$，都有 $E_1 \cup E_2 \in \mathscr{B}$，及 $E_1 - E_2 \in \mathscr{B}$(注：由此可知空集 $\varnothing \in \mathscr{B}$)，则称 $\mathscr{B}$ 是一个**环**；如果对于任意一列 $E_i \in \mathscr{B}$($i = 1, 2, \cdots$)，都有 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathscr{B}$(注：为与上面**有限并**区别，称这里为**可数并**或**可列并**)，以及 $E_1 - E_2 \in \mathscr{B}$，则称 $\mathscr{B}$ 是一个 **σ-环**.

② 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的某些子集所成的环，μ 是定义在 $\mathscr{B}$ 上的函数(即 μ 的定义域是 $\mathscr{B}$，或者说，函数 μ 所取的自变量是 X 的某些子集)，并满足如下条件：

i) $\mu(\varnothing) = 0$；

ii) $\forall E \in \mathscr{B}, \mu(E) \geqslant 0$ (**非负性**)；

iii) $\forall E_i \in \mathscr{B}$($i = 1, 2, \cdots$)，如果 $E_i \cap E_j = \varnothing$($i \neq j$)，且 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathscr{B}$，就有

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \qquad \text{(可列可加性)},$$

那么就称 μ 为 $\mathscr{B}$ 上的**测度**.

由以上三条不难推出测度还有下述性质：

vi) (**单调性**) 若 $A \subseteq B$，则 $\mu(A) \leqslant \mu(B)$；

v) (**半可加性**) $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$(不要求有条件 $E_i \cap E_j = \varnothing$($i \neq j$)).

例 1.3.1 设 $X = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$，$\mathscr{B} = \{A : A \text{ 是 } X \text{ 的子集}\}$.令 $\mu : \mathscr{B} \to \mathbf{R}^1$，$\mu(A) = A$ 中元素的个数.则可验证②中条件 i)～iii)成立，即 μ 是 $\mathscr{B}$ 上的测度.

例 1.3.2 设 $\mathscr{B}$ 是由数轴 $\mathbf{R}^1$ 上区间(包括无穷区间)以及它们的有限并和有限差为元素所成的环(它不是 σ-环).对 $\mathscr{B}$ 中任意元素 A，规定：$\mu(A) =$ 组成 A 的各构成区间的长度之和.则 μ 是 $\mathscr{B}$ 上的一个测度，即“**黎曼测度**”.

③ 设 μ 是环 $\mathscr{B}$ 上的测度.若 $E \in \mathscr{B}$ 满足 $\mu(E) < \infty$，则称 E 是测度有限的；如果 $E \in \mathscr{B}$，且有一列 $E_i \in \mathscr{B}$($i = 1, 2, \cdots$)，每个 E_i 都是测度有限的，而 $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$，那么称 E 的测度是 σ-有限的；如果每个 $E \in \mathscr{B}$ 都是 σ-有限的，就称测度 μ 是 σ-有限的.

④ 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的某些子集作成的环.如果 $X = \bigcup_{E \in \mathscr{B}} E$，就称$(X, \mathscr{B})$是一个**可测空间**，而 $\mathscr{B}$ 中的每个元(是集合)都称为是可测空间$(X, \mathscr{B})$中的**可测集**.

⑤ 设$(X,\mathscr{B})$是一可测空间，μ 是 $\mathscr{B}$ 上的一个测度，则称$(X,\mathscr{B},\mu)$为**测度空间**，简称 X 是测度空间. 如果 μ 还是 σ-有限的，就称(X,B,μ)为 σ-有限测度空间.

1.3.2　勒贝格可测空间、勒贝格测度、勒贝格可测函数以及勒贝格积分浅述

本小节简要介绍一维点集的勒贝格(Lebesgue)测度与勒贝格可测函数理论，它不仅是建立勒贝格积分的必要准备，而且在其它学科(如概率论与随机过程)中也经常用到.

1. 勒贝格可测集与勒贝格测度

设 $P(\mathbf{R}^1)=\{E: E$ 是 $\mathbf{R}^1$ 的子集$\}$. 显然，若有以 $P(\mathbf{R}^1)$为定义域的测度，那么这个测度的应用范围将是最广泛的. 可惜，在《实变函数论》中证明了一个结论：不存在以 $P(\mathbf{R}^1)$为定义域的测度.

能否在 $P(\mathbf{R}^1)$中取出足够多的集，使它们成一 σ-环，并在该环上有测度?

设 E 是 $P(\mathbf{R}^1)$中任一元素. 对于每一列覆盖 E 的开区间$\{(a_i,b_i)\}$(即 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\supset E$)，作它们的长度之和 $\mu=\sum\limits_{i=1}^{\infty}(b_i,a_i)$($\mu$可以等于 ∞). 不同的开区间列 μ 值一般是不同的. 所有这样的 μ 值全体组成一个非负数的集合，其下确界称为 E 的勒贝格外测度，记为 $\mu^*(E)$，即 $\mu^*(E)=\inf\limits_{E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)}\sum\limits_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)$(注 μ^* 只是定义在 σ-环 $P(\mathbf{R}^1)$ 上的**集函数**，**它在 $P(\mathbf{R}^1)$ 上不具有可列可加性**，故 μ^* 在 $P(\mathbf{R}^1)$ 上不是测度). 再取 $P(\mathbf{R}^1)$ 中满足**Carathéodory条件**的集合 E 全体(若 $E\in P(\mathbf{R}^1)$ 满足条件：$\forall F\in P(\mathbf{R}^1)$，都成立着

$$\mu^*(F)=\mu^*(F\cap E)+\mu^*(F-E),$$

则称 E 满足 Carathéodory 条件)作成 $P(\mathbf{R}^1)$的子集 L. 可证：L 是一个 σ-环，并且 μ^* 是 L 上的测度(即 μ^* **在 L 上具有可列可加性**)，将 μ^* 仍简记为 μ. 则称$(\mathbf{R}^1,L,\mu)$为**勒贝格测度空间**，L 中元素称为**勒贝格可测集**，μ 称为**勒贝格测度**.

以上结论，详细证明可见《实变函数论》等专著.

在 $\mathbf{R}^1$ 中哪些是勒贝格可测集，或者说，L 中都有哪些元素? 此问题在《实变函数论》中也有论述. 大体地说，**勒贝格可测集包括了所有的开集、闭集以及黎曼可测集等集合**. 特别，**单点集都是勒贝格可测集**，进而作为**可数个**互不相交的单点集的并集，**任一可数集都是勒贝格可测集**，因此勒贝格可测集还包括许多非区间形式的集；再由 L 关于可列运算以及差运算的封闭性，知**由可数个勒贝格可测集所产生的并集**(简称为**可数并**)**或交集**(简称为**可数交**)**还是勒贝格可测集；任意勒贝格可测集在 $\mathbf{R}^1$ 中的余集，也是勒贝格可测集**.

特别指出,**黎曼可测集的勒贝格测度与用黎曼测度所计算的结果是相等的**.因此勒贝格测度是黎曼测度从$\mathscr{B}$到 L 上的扩张,这就是我们将勒贝格测度仍用黎曼测度符号 μ 来表示的原因.

既然可数集是勒贝格可测集.我们自然要考虑可数集的勒贝格测度.

定理 1.3.1 若 A 是实数集 $\mathbf{R}^1$ 中的可数集,则 $\mu(A)=0$.

证 显然单点集的测度是 0(自证).设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$,则 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$.因 $i\neq j$ 时,$\{x_i\}\cap\{x_j\}=\varnothing$,由测度性质(iii),得 $\mu(A)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(\{x_i\})=\sum\limits_{i=1}^{\infty}0=0$.

(还可考虑用定义"$\mu^*(A)=\inf\left\{\mu=\sum\limits_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i):A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\right\}$"来直接证明这个结论.设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$,易知有

$\forall\ \varepsilon>0$,令 $B=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\left(x_i-\dfrac{\varepsilon}{2^{i+1}},x_i+\dfrac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right)$,则 $A\subset B$,且相应的 μ 值为

$$\mu=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\left(x_i+\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right)-\left(x_i-\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right)\right]=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^i}=\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0$,便得到

$$0\leqslant\mu^*(A)=\inf\left\{\mu=\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i):A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\right\}=0,$$

所以 A 的勒贝格测度为 0.证毕.) □

由定理 1.3.1 知有理数集的勒贝格测度为 0,由此说明,勒贝格测度的定义域 L 确实比黎曼测度的定义域大.其实,正如复函数 $w=\mathrm{e}^z$ 是实函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的**扩张函数**一样,勒贝格测度是黎曼测度的扩张函数.

勒贝格测度为 0 的集,简称为零集.由测度的单调性,知零集的任意子集还是零集;由测度的半可加性,知零集的有限并或可列并也都是零集.除可数集都是零集外,还有一些不可数集也是零集(参阅文献[1](上册)中介绍的**康托集**).**零集都是勒贝格可测集**.另外,**$P(\mathbf{R}^1)$中非勒贝格可测集也是存在的**.

因此 L 确实是由 $P(\mathbf{R}^1)$中部分元素组成的一个 σ-环,同时也确实包含着较为广泛的集合.

2. 勒贝格可测函数

定义 1.3.1 若在定义域 X 中去掉一零集后,$f(t)$成为一个处处有有限值的函数,则称 $f(t)$为**几乎处处有限**函数;若在 X 中去掉一零集后,$f(t)=g(t)$ 处处成立,则称 f,g 为**几乎处处相等**,记为 $f=g(\text{a.e.})$(almost everywhere 的缩写);若在 X 中去掉一零集后,函数列 f_n 处处收敛于函数 f,则称 f_n **几乎处处收敛**于 f,

记为 $f_n \to f$(a.e.)或 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$;若在 X 中去掉一零集后,函数列 f_n 一致收敛于函数 f,则称 f_n **几乎一致收敛**于 f,记为 $f_n \rightrightarrows f$(a.e.).□

定义 1.3.2　设 f 是定义在某可测集 E 上的实函数,若对任一给定实数 r,E 的子集$\{x\in E: f(x)<r\}$(记为 $E[f<r]$)都是可测集(即都是 $\mathscr{B}$中的元),则称 f 是(勒贝格)**可测函数**.□

例 1.3.3　设

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数},\end{cases}$$

求证 f 是 $\mathbf{R}^1$ 上的可测函数.

证　对任一给定实数 r,考察 $E[f<r]$:

(1) 当 $r>1$ 时,对 $\forall\, x\in\mathbf{R}^1$,都有 $f(x)<r$,故此时 $E[f<r]=\mathbf{R}^1$,是勒贝格可测集;

(2) 当 $0<r\leqslant 1$ 时,则只有当 x 为无理数时,才有 $f(x)<r$,故此时 $E[f<r]=\mathbf{R}^1-\mathbf{Q}$,仍然是勒贝格可测集;

(3) 当 $r\leqslant 0$ 时,则 $\forall\, x\in\mathbf{R}^1$,$f(x)<r$ 不成立,因此 $E[f<r]=\varnothing$,还是勒贝格可测集.

通过以上讨论,知对任意实数 r,$E[f<r]$都是可测集,故 f 是可测函数.证毕.

可测函数还有**其它等价判断方法**.可以证明:若以下条件中任一个成立,则 f 都是 E 上的可测函数.

A. 对任一给定实数 r,$E[f\leqslant r]$都是可测集.

B. 对任一给定实数 r,$E[f>r]$都是可测集.

C. 对任一给定实数 r,$E[f\geqslant r]$都是可测集.

D. 对任两给定的不相等实数 r,s(不妨设 $s<r$),$E[s\leqslant f<r]$都是可测集.

我们只证明 A,D,其它请读者考虑.

证 A　只需证条件 A 中的条件与定义中"对任一给定实数 r,$E[f<r]$都是可测集"条件等价.

先证明由定义 1.3.2 中的条件可得到条件 A.为此,我们先证明**集合等式**:

$$E[f\leqslant r]=\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left[f<r+\frac{1}{n}\right]$$

(用"**等式两边的集合是互相包含的**"来证明).

任取 $x\in E[f\leqslant r]$,则 $f(x)\leqslant r$,显然对任意整数 n,有 $f(x)<r+\dfrac{1}{n}$,故 $x\in E\left[f<r+\dfrac{1}{n}\right]$对 n 都成立,即 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E\left[f<r+\dfrac{1}{n}\right]$,再由 x 在 $E[f\leqslant r]$中的

任意性,得到$E[f\leqslant r]\subset\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E\left[f<r+\dfrac{1}{n}\right]$;

其次,任取 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E\left[f<r+\dfrac{1}{n}\right]$,则 $f(x)<r+\dfrac{1}{n}$对一切 n 成立,令 $n\to\infty$,便得 $f(x)\leqslant r$,即 $x\in E[f\leqslant r]$,再由 x 在$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E\left[f<r+\dfrac{1}{n}\right]$中的任意性,得$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E\left[f<r+\dfrac{1}{n}\right]\subset E[f\leqslant r]$.

因此等式两边的集合是互相包含的,故等式成立.

进而,若"对任意实数 r, $E[f<r]$是可测集",则由上面集合等式,因右边是一列可测集的交,便得到:"对任意实数 r, $E[f\leqslant r]$是可测集".这就由定义 1.3.2 中的条件得到了条件 A.

反之,根据另一个集合等式

$$E[f<r]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left[f\leqslant r-\frac{1}{n}\right]\quad(\text{请读者自证}),$$

我们也可由条件 A 也可以得到定义 1.3.2 中的条件.

因此,我们证得条件"对任意实数 r, $E[f\leqslant r]$可测"与条件"对任意实数 r, $E[f<r]$可测"是等价的.故条件 A 也可以作为可测函数的定义.

证 D 我们证明,条件"对任意实数 r, $E[f<r]$可测"与条件"对任两给定的不相等实数 $r,s(s<r)$, $E[s\leqslant f<r]$是可测集"也是等价的.先由前者推后者.此时,对任意 $r,s\ (s<r)$,由于 $E[f<r]$和 $E[f<s]$都可测,又因为 $E[s\leqslant f<r]=E[f<r]-E[f<s]$是可测集之差,故 $E[s\leqslant f<r]$是可测集.

再由后者推前者.由于有 $E[f<r]=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E[r-n\leqslant f<r-n+1]$,而后者是可测集的可列并,故得知前者是可测集.证毕.

定理 1.3.2 可测函数作线性运算(即函数加法和数乘运算)仍得可测函数.

证 设 f 是可测集 E 上的可测函数,a 为任意给定的实数.先证 af 是可测函数.当 $a=0$ 时,$af\equiv 0$(零常函数)显然是可测函数(请自己证明);当 $a\neq 0$ 时,不妨设 $a>0$,则对任意实数 r,有等式 $E[af<r]=E[f<r/a]$,后者是可测集,故$E[af<r]$可测;同样,当 $a<0$ 时,对任意实数 r,有 $E[af<r]=E[f>r/a]$,仍是可测集.因此,我们证得对任意实数 a, af 都是可测函数.

设 f,g 是可测集 E 上两个可测函数,欲证 $f+g$ 可测.考察集合 $E[f+g<r]$的可测性,其中 r 是任一取定实数.因有理数集 $\mathbf{Q}$ 是一可数集,由集合等式

$$E[f+g<r]=\bigcup_{q\in\mathbf{Q}}\{E[f<q]\cap E[g<r-q]\}$$

(留作练习),注意到右端是**可测集的可数并**,故 $E[f+g<r]$是可测的.进而由 r 的任意性,便得知 $f+g$ 是可测函数.□

最后再举几个可测函数的例子.以下,E 是任意一个可测集.

例 1.3.4　E 上的简单函数(即"分段"函数,并在每个可测集"段"上是常函数)是 E 上的可测函数.

本例题的证法与例 1.3.3 是一样的.

例 1.3.5　E 上的连续函数一定是 E 上的可测函数.

因为若 f 连续,则据连续函数的性质(3),对任一给定实数 r,$E[f<r]$都是开集,故都是可测集.

例 1.3.6　设 f_n 是单调递增可测函数列,且在 E 上有 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$,则 f 是可测函数.

本题证明提示:先记 E 中不满足 $f_n(x)\to f(x)$的点 x 的集合为 E_1,则 E_1 是零集.进而对任意实数 r,$E_1[f>r]$ 是可测集;再设 $E_2=E-E_1$,则 E_2 也是可测集(以上结论请读者思考其根据).因为 f_n 是可测函数,所以 $E_2[f_n>r]$是可测集,还因为对任一给定实数 r,有集合等式

$$E[f>r]=E_1[f>r]\cup\{\bigcup_{n=1}^{\infty}E_2[f_n>r]\}$$

(要用到 f_n 的单调递增性)成立,所以,$E[f>r]$可表为一列可测集的可列并集,故它是可测集,再由 r 的任意性,便知 f 是可测函数.

注　即使去掉本例中$\{f_n\}$的单调性条件,仍可证极限 f 是可测函数.

3. 可测函数的构造——鲁津(Лузин)定理

我们从例 1.3.5 看到,可测集上的连续函数一定是可测函数.反过来,虽然一般的可测函数不一定连续,但也"差不多"是连续的,这就是下面著名的鲁津定理所给出的结果,它刻画了一般可测函数的构造,这里将证明略去.

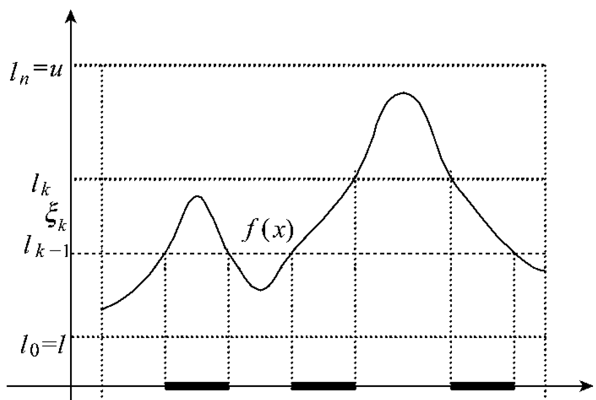
定理 1.3.3(鲁津定理)　设 f 是 E 上几乎处处有界的可测函数,则对任意 $\delta>0$,存在闭集 $F\subset E$,及在整个 $\mathbf{R}^1$ 上连续的函数 g(F 及 g 依赖于 δ),满足在 F 上 $f=g$,及 $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}^1}g(x)=\sup\limits_{x\in F}f(x)<\infty$,$\inf\limits_{x\in\mathbf{R}^1}g(x)=\sup\limits_{x\in F}f(x)>-\infty$,且 $\mu(E-F)<\delta$.□

因 f 与 g 仅在 $E-F$ 上不等,而 $E-F$ 测度又很小,故我们称 f"差不多"连续.

4. 勒贝格积分及其性质

定义 1.3.3[①] 设 E 是一个可测集，f 是定义在 E 上有界的可测函数，即存在确定的实数 $l, u(l \leqslant \inf f \leqslant \sup f < u)$ 使 $f(E) \subseteq [l, u]$.在闭区间$[l, u]$中任取一分点组 $D: l = l_0 < l_1 < l_2 < \cdots < l_n = u$，记 $\delta(D) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n}(l_k - l_{k-1})$，$E_k = E[l_{k-1} \leqslant f < l_k]$，再任取一组插值 $P = \{\xi_k\}$(即 ξ_k 满足 $l_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant l_k$)，作和式 $S(D, P) = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \mu(E_k)$，称它为分点组 D 和插值 P 下的一个“和数”，见图 1.2.如果存在数 s，它满足条件：

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，对任意分点组 D 和插值 P，只要 $\delta(D) < \delta$，就恒有 $|S(D, P) - s| < \varepsilon$，则称 f 在 E 上关于测度 μ 是**可积分**的，并称 s 是 f 在 E 上关于测度 μ 的**积分**.记做 $s = \int_E f \mathrm{d}\mu$.特别，**如果 μ 是勒贝格测度，且 f 关于 μ 可积，则称 f 是 E 上勒贝格可积函数**，并称 s 是 f 在 E 上的**勒贝格积分**，记为$(L)\int_E f \mathrm{d}\mu$.□



(图中可测集E_k是三条黑粗线的集合)

图 1.2

对照定义，勒贝格积分与黎曼积分的区别在于：前者是对值域作分割；而后者是对定义域作分割，进而**后者要求被积函数在几乎每个小区间上的“振幅”能充分小**.正是由此，导致了“黎曼可积函数没有勒贝格可积函数多”的结果.

例 1.3.7 设 $\mathbf{N} = \{1, 2, \cdots\}$ 是自然数集，$f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}^1$(此时每个 f 等价于一个数列).再令 $\mathbf{N}$ 上测度 μ 为 $\mu(A) = A$ 的势.则当 f 满足 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |f(i)|^p$ 收敛(p 为一

---

① 这里给出的定义仅限于 E 为测度有限且 f 为有界可测函数的情况.在一般勒贝格积分讨论中，这两个限制是可以被去掉的.特别，在后面集合 $L[a, b]$ 中，还包含了许多几乎处处有界的函数.

确定的正数）时，有

$$\int_E |f(t)|^p \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{\infty} |f(i)|^p \mu(\{i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} |f(i)|^p.$$

例 1.3.8　设 $a<b$，$\pi(t)$是区间$[a,b]$上的简单函数（即“分段”常函数）.不妨设

$$\pi(t)=\begin{cases} c_1, & t\in E_1, \\ \quad\cdots\cdots \\ c_n, & t\in E_n, \end{cases}$$

其中$\{E_i\}$是$[a,b]$中互不相交的可测子集，且$\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i=[a,b]$.则据定义 1.3.3，有

$$\int_{[a,b]} \pi(t)\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \mu(E_i) \quad（这里\ \mu 是[a,b]上的任意一个测度）.$$

利用这个结果可得：若 $\pi(t)$为$[a,b]$中有理数集 $\mathbf{Q}$ 的**特征函数**，即 $\pi(t)$为

$$\pi(t)=\begin{cases} 1, & t\in[a,b]\cap\mathbf{Q}, \\ 0, & t\in[a,b]-\mathbf{Q}, \end{cases}$$

则它的勒贝格积分为 0，计算如下

$$\begin{aligned}(L)\int_{[a,b]} \pi(t)\mathrm{d}\mu &= 0\cdot \mu\{[a,b]-\mathbf{Q}\}+1\cdot \mu\{[a,b]\cap\mathbf{Q}\} \\ &= 0\times(b-a)+1\times 0=0.\end{aligned}$$

注　以上证明了 π 在$[a,b]$上是勒贝格可积的.但是，π 在$[a,b]$上不是黎曼可积的（见定理 1.2.3 上面的论述）！

勒贝格积分具有以下性质（证明皆从略）.

(1) 设 $\mu(E)<\infty$，那么 E 上一切有界可测函数 f 关于测度 μ 必可积.

(2) 若 f 在 E 上可积，则$|f|$在 E 上可积；反之亦然.并且成立着

$$\left|\int_E f(t)\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_E |f(t)|\mathrm{d}\mu.$$

(3) 设 f 是 E 上有界可测函数，$\mu(E)<\infty$.如果将 E 分解成有限个互不相交的可测集$\{E_i\}$的和：$E=\bigcup\limits_{i=1}^{m} E_i$，那么

$$\int_E f\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{m}\int_{E_i} f\mathrm{d}\mu.$$

(4) 若 f，g 都在 E 上可积，且在 E 上成立着 $f\leqslant g$(a.e.)，则有

$$\int_E f(t)\mathrm{d}\mu \leqslant \int_E g(t)\mathrm{d}\mu.$$

(5) 积分具有线性性质，即

①$\int af\mathrm{d}\mu = \int f\mathrm{d}\mu$,其中 a 任意实数.

②$\int (f+g)\mathrm{d}\mu = \int f\mathrm{d}\mu + \int g\mathrm{d}\mu$.

(6) 积分还具有全连续性质,即,若 f 是 E 上可积函数,则有 $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0$,对任意可测集 $e\subset E$,当 e 满足 $\mu(e)<\delta$ 时,则成立着

$$\left|\int_e f(t)\mathrm{d}\mu\right| < \varepsilon.$$

记$[a,b]$上勒贝格可积函数全体为 $L[a,b]$,则 $L[a,b]$还有以下性质.

定理 1.3.4　设 $f\in L[a,b]$,则对任意 $\varepsilon>0$,有连续函数 g,使得

$$\int_{[a,b]} |f(t)-g(t)|\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

证　设 $f\in L[a,b]$,首先由积分的全连续性质,知对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,对任意可测集 $e\subset E=[a,b]$,当 $\mu(e)<\delta$ 时,成立着

$$\int_e |f(t)|\mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1.1}$$

其次,因 f 几乎处处有限,对上面的 $\delta>0$,存在 $N>0$,使 $E_1 \overset{\text{def}}{=} E[|f|>N]$有

$$\mu(E_1)<\delta. \tag{1.2}$$

令 $E_2=E-E_1$,由定理 1.3.3,对上述 $\varepsilon>0$ 和 $N>0$,存在闭集 $E_3\subset E_2$,以及在整个 $\mathbf{R}^1$ 上连续的函数 g,使在 E_3 上恒有 $f=g$,并还成立着(记 $E_4=E_2-E_3$)

$$\mu(E_4)<\frac{\varepsilon}{4N} \tag{1.3}$$

和

$$\sup_{t\in\mathbf{R}^1}|g(t)| = \sup_{t\in E_2}|f(t)| \leqslant N. \tag{1.4}$$

由 E_1, E_2 的定义及(1.4),可知在 E_1 上有$|f(t)-g(t)|\leqslant|f(t)|+|g(t)|\leqslant 2|f(t)|$,而在 E_4 上有$|f(t)-g(t)|\leqslant|f(t)|+|g(t)|\leqslant 2N$,从而由(1.1)、(1.2)和(1.3),得到

$$\begin{aligned}
&\int_{[a,b]}|f(t)-g(t)|\mathrm{d}\mu\\
&=\int_{E_1}|f(t)-g(t)|\mathrm{d}\mu+\int_{E_4}|f(t)-g(t)|\mathrm{d}\mu\\
&\leqslant 2\int_{E_1}|f(t)|\mathrm{d}\mu+2N\int_{E_4}1\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

$$<2\times\frac{\varepsilon}{4}+2N\times\frac{\varepsilon}{4N}=\varepsilon. \tag{1.5}$$

故命题成立.□

下面的性质证略.

定理 1.3.5　设 $f\in L[a,b]$,则对任意 $\varepsilon>0$,有简单函数 π,使得

$$\int_{[a,b]}|f(t)-\pi(t)|\mathrm{d}\mu<\varepsilon. \qquad \square$$

定理 1.3.6　$[a,b]$上黎曼可积函数 f 皆是勒贝格可积函数,且积分值相等,即

$$(R)\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=(L)\int_{[a,b]}f(t)\mathrm{d}\mu. \qquad \square$$

定理 1.3.7(勒贝格控制收敛定理)　设 $f_k(t)\in L[a,b]$($k=1,2,\cdots$)且存在 $m(t)\in L[a,b]$,使得

$$|f_k(t)|\leqslant m(t),\qquad t\in[a,b],k=1,2,\cdots.$$

如果等式

$$\lim_{k\to\infty}f_k(t)=f(t)$$

除某零测度集外处处成立(即 f_k 几乎处处收敛于 f),那么 $f(t)\in L[a,b]$,并且

$$\int_{[a,b]}f(t)\mathrm{d}\mu=\lim_{k\to\infty}\int_{[a,b]}f_k(t)\mathrm{d}\mu. \qquad \square$$

定理 1.3.8(莱维(Levi)定理)　设非负函数列 $f_k(t)\in L[a,b]$满足条件:$f_k(t)\leqslant f_{k+1}(t)$($k=1,2,\cdots$),令 $f(t)=\lim\limits_{k\to\infty}f_k(t)$,则

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[a,b]}f_k(t)\mathrm{d}\mu=\int_{[a,b]}f(t)\mathrm{d}\mu. \qquad \square$$

定理 1.3.9(法图(Fatou)引理)　设 $f_k(t)\in L[a,b]$是一列非负函数,则有

$$\int_{[a,b]}\underline{\lim}_{k\to\infty}f_k(t)\mathrm{d}\mu\leqslant\underline{\lim}_{k\to\infty}\int_{[a,b]}f_k(t)\mathrm{d}\mu. \qquad \square$$

定理 1.3.7,1.3.8 以及 1.3.9 其实是等价的.它们是勒贝格积分中三个重要的极限定理,标志着积分极限问题在勒贝格积分范围内得到了远比黎曼积分更为圆满的解决,这正是勒贝格积分的最大成功之处.

在结束本节之前,我们再对勒贝格积分作以回顾和小结.由定理 1.3.6,知黎曼可积函数都是勒贝格可积的,且两种积分值相等;反之,例 1.3.8 说明,勒贝格可积函数却不一定是黎曼可积的.因此,我们得到以下结论.

(1) 勒贝格可积函数比黎曼可积函数的**存在性**要更加广泛一些,因此勒贝格积分也比黎曼积分在**应用范围**上要广泛一些;

(2) 欲求一个函数的勒贝格积分,如果该函数是黎曼可积的,则可通过计算它的黎曼积分,得到它的勒贝格积分值.进而,黎曼积分中的**牛顿-莱布尼茨公式**在勒贝格积分中也可以得到某种程度上的应用,这对一些函数的勒贝格积分计算带来方便,避免了用定义 1.3.3 中那种"分割、作和、求极限"的较麻烦的计算方法.

注　在"实变函数论"中,对牛顿-莱布尼茨公式中涉及到的导函数问题也作了深入的分析,并研究了在勒贝格积分中牛顿-莱布尼茨公式成立的条件,从而对该公式进行了推广,使得对一些不为黎曼可积的勒贝格可积函数,也可用"牛顿-莱布尼茨公式"计算积分值.

我们再把黎曼积分中关于极限号与积分号可交换的条件(见定理 1.2.3),与在勒贝格积分中,极限号与积分号可交换的条件(定理 1.3.7 等)进行对比,又可得到以下结论.

(3) 在勒贝格积分中,极限号与积分号可交换的条件比黎曼积分要弱一些.

经过上述粗略对比,就可发现勒贝格积分不论是在应用范围上,还是在推理运算的灵活程度上,都比黎曼积分有着较大的优越性.

勒贝格积分是 1902 年由法国数学家勒贝格建立的,它克服了黎曼积分的某些缺陷,使积分运算在更广泛的领域中得到了应用,并给分析数学本身也带来了一系列深刻的变化.

习题 1.3

1. 证明集合等式 $E[f<r]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left[f\leqslant r-\dfrac{1}{n}\right]$.
2. 证明集合等式 $E[f+g<r]=\bigcup_{q\in\mathbf{Q}}\{E[f<q]\cap E[g<r-q]\}$.
3. 证明:若 f 连续,则对任一给定实数 r, $E[f<r]$都是开集.
4. 设 $\mu(E)\neq 0$, f 在 E 上可积.如果对任意有界可测函数 ψ,都有

$$\int_E f(t)\psi(t)\mathrm{d}\mu=0,$$

则 $f(t)=0$, a.e., $t\in E$.

5. 用例 1.3.3 中给出的可测函数 f 来验证定理 1.3.3.
6. 试从 $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$, $0\leqslant x\leqslant 1$,求证

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots.$$

第 2 章　度量空间

2.1　度量空间的概念及例子

2.1.1　度量空间的基本概念

第 1 章中讨论了 $\mathbf{R}^1$ 上的距离与性质，本章讨论一般度量空间概念及其性质.

定义 2.1.1　设 E 是一非空集合.若对 E 中任一对元素 x, y，都有相应**有限**实数 $d(x, y)$与它们对应（或者说，d 是 E 上**真**的二元实函数），且 d 适合如下条件：

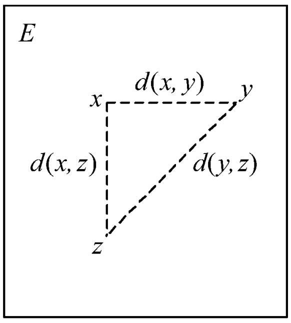


图 2.1

（1）$d(x, y) \geqslant 0$，并且 $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$（此条件称为"**非负性**"）；

（2）成立着**三角不等式**（见图 2.1），即

$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(y, z), \quad \forall\, x, y, z \in E,$$

则称 $d(x, y)$是元素 x, y 之间的**度量**或**距离**，并称 E 按 $d(x, y)$成为**度量空间**或**距离空间**，记为(E, d)或简记为 E. E 中的元素称为**点**.□

由性质(1)，(2)，令 $z = x$，可推出距离还有**对称性**，即

（3）$d(x, y) = d(y, x)$.

另外，还有与(2)等价的三角不等式：

（4）$|d(x, y) - d(y, z)| \leqslant d(x, z)$（任意两边之差小于第三边）.

下面举一些度量空间的例子，这些空间大部分在以后的研究中也都是基本对象而显得比较重要.

例 2.1.1　设平面 $\mathbf{R}^2$（类似地，$\mathbf{R}^N$），对 $\forall\, P_1 = (x_1, y_1)$，$P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2$，令

$$d_0(P_1, P_2) = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$d_1(P_1, P_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\},$$

$$d_2(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|,$$

$$d_3(P_1, P_2) = \frac{|x_1 - x_2|}{1 + |x_1 - x_2|} + \frac{|y_1 - y_2|}{1 + |y_1 - y_2|},$$

$$d_4(P_1, P_2) = [|x_1 - x_2|^{\frac{1}{2}} + |y_1 - y_2|^{\frac{1}{2}}]^2,$$

可证:$\mathbf{R}^2$(类似地,$\mathbf{R}^N$)按 d_0, d_1, d_2, d_3 皆分别成为度量空间(其中 d_0 就是常见的度量).这里只证 d_3 是一个度量.显然 d_3 是真函数且满足条件(1),故我们只需再证明它满足条件(2)即可.为此,我们首先说明:对任意实数 a, b,都有

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}. \tag{2.1}$$

事实上,当 $x \geqslant 0$ 时,函数 $\varphi(x) = \dfrac{x}{1+x}$ 单调增,故由不等式 $|a+b| \leqslant |a| + |b|$,得

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|}$$
$$\leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|},$$

因此(2.1)得证.

设 $P_3 = (x_3, y_3)$.令 $a = x_1 - x_2$, $b = x_2 - x_3$,代入(2.1),得

$$\frac{|x_1 - x_3|}{1+|x_1 - x_3|} \leqslant \frac{|x_1 - x_2|}{1+|x_1 - x_2|} + \frac{|x_2 - x_3|}{1+|x_2 - x_3|}. \tag{2.2}$$

同理,有

$$\frac{|y_1 - y_3|}{1+|y_1 - y_3|} \leqslant \frac{|y_1 - y_2|}{1+|y_1 - y_2|} + \frac{|y_2 - y_3|}{1+|y_2 - y_3|}. \tag{2.3}$$

将式(2.2),(2.3)相加,便得

$$d_3(P_1, P_3) \leqslant d_3(P_1, P_2) + d_3(P_2, P_3),$$

因此 d_3 满足条件(2),证毕.

这里指出,d_4 不是 $\mathbf{R}^2$ 上的度量.只要取 $P_1 = (1,0)$, $P_2 = (0,0)$, $P_3 = (0,1)$,计算便可得知三角不等式不成立.

例 2.1.1 说明,在一个集合上可以定义不止一种度量,使它成为度量空间.通常情况下,记号 $\mathbf{R}^2$(类似地,$\mathbf{R}^N$)将专指平面 $\mathbf{R}^2$(集合 $\mathbf{R}^N$)按 d_0 所成的度量空间.

例 2.1.2 设 a, b 是任意两个有限实数,其中 $a < b$. $C[a, b]$表示闭区间$[a, b]$上连续实(或复)函数的集合.$\forall\ x, y \in C[a, b]$(注意 x, y 是两个函数),定义

$$d_0(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|,$$

$$d_1(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, \mathrm{d}t,$$

$$d_2(x, y) = \left[\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}},$$

则 $C[a, b]$分别按 d_0, d_1, d_2 都成为度量空间.