数学卷

中国科学技术经·典·文·库

组 合 论（下册）

魏万迪 著

科学出版社
www.sciencep.com

中国科学技术经典文库·数学卷

组　合　论

(下册)

魏万迪　著

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书是《组合论》一书的下册. 上册侧重于组合论课题中的计数方面，下册论述组合论的重要分支，即组合设计的理论和方法. 本书以一般理论的叙述为主，结合介绍历史上一些著名问题的研究和解决情况，力求用统一的观点来处理所论述内容，把纷繁的材料系统化，且力求反映这一学科的主要方向和近期发展状况.

本书可作为组合数学方面的教学用书，也可供数字通讯、试验设计、数论的应用、代数学的应用、有限几何学的应用以及组合数学等方面的工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

组合论. 下册/魏万迪著. —北京：科学出版社，2010
(中国科学技术经典文库・数学卷)
ISBN 978-7-03-029291-9

I. ①组… II. ①魏… III. ①组合数学 IV. ①0157

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第203990号

责任编辑：张鸿林 杜小杨 陈玉琢/责任校对：朱光兰
责任印制：钱玉芬/封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社编务公司排版制作
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
1987年12月第 一 版 开本：B5 (720 × 1000)
2010年11月第三次印刷 印张：29
字数：575 000

定价：98.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

本书共分为上、下两册. 上册侧重于组合论课题的计数方面，下册专门讨论组合设计. 载于本书上册的前言的第一部分是对全书而言的，对本册自然适用. 除了以下数语需要重提外，其余不再赘述. 这数语是："本书从组合论的基础部分开始，讲述较详，并力求使处理问题的方法多种多样. 但是，当需用其他数学学科，如数论、代数、数学分析的知识时，则假定读者对它们已经熟知，不再细论." 本册用到初等数论、不定方程、二次型的算术理论、代数数论等数论方面，以及有限域、有限群、有限几何等其他方面较多且有时还较专门的知识，但未能对它们详述，只是作些简单的介绍和指出基本的参考文献.

本册的任务是专门介绍组合设计的理论、方法和一些有关的著名问题. 这里所介绍的组合设计的主要类型有：(1)完全区组设计(第十八章). (2)平衡不完全区组设计(第十二章)及其重要特款——对称设计(第十三章)，三连系(第十二、十九章)，几何设计(第十七章)，可分解的平衡不完全区组设计(第十九章)等，作为对称设计的重要内容，还有循环设计(第十四、十五章)，Hadamard 设计(第十六章). (3)部分平衡不完全区组设计(第二十章). (4)正交设计(第十八章)和横截设计(第十九章). (5)按对平衡设计(第十八、十九章). (6)t-设计，Youden 设计，Room 设计，称重设计，幻方，覆盖和填充等(第十一章). 在本书中，研究组合设计课题的方法是组合各种类型的设计来介绍的，因而散见于各章. 主要的方法有：矩阵方法(见第十二、十三、十六、二十等章)，数论方法(见第十四、十五等章)，二次型论方法(见第十二、十三等章)，有限域方法(见第十五、十六、十七、二十等章)，有限几何方法(见第十五、十七、二十等章)，以及组合方法等. 在本书中，对于组合设计历史上的一些著名问题的研究和解决情况，是作为一般理论和方法的组成部分来介绍的，因而也散布在不同的地方. 例如，关于正交拉丁方的 Euler 猜想的完整结果可在第十八章和第十九章中找到；关于三连系存在的充要条件问题的解决安排在第十九章中；v 充分大且 $\lambda=1$ 的可分解平衡不完全区组设计存在的充要条件问题的解决也在第十九章中；关于 $4n$ 阶 Hadamard 矩阵的存在性问题的主要结果安排在第十六章中；关于 Steiner 三连系大集问题的简单介绍见第十二章，等等. 为了使读者在讨论各类具体的设计之前对整个组合设计理论的概貌以及各类设计之间的联系有所了解，故以本册的首章来介绍该领域产生的实际背景，有关它的应用，它的主要类型，这些类型之间的联系，以及组合设计理论的内容，等等.

本册的目的之一是为从事数字通讯、试验设计、数论的应用、代数学的应用、

有限几何学的应用以及组合数学等方面工作的研究人员提供一份有关组合设计方面内容较新且较全面系统的参考资料. 所以，书中常常介绍一些课题的新近成果，使得对之有兴趣的读者可以查阅所引的文献，开展研究. 本册的另一目的是为攻读组合数学的研究生和指导他们的老师提供一份教学用书. 因此，基础部分讲述得较为详细，有时还辅以具体例子，使得所论内容尽可能易于理解和掌握.

组合设计理论的内容很丰富，涉及面很广，近年来发展很快. 本书力求反映这一学科的主要方面和近期的发展状况，力求反映我国数学工作者对这一领域的贡献. 此外，本书还力求用较为统一的观点来处理所论内容，尽可能地把纷繁的材料系统化. 但是，由于这方面的专著所见不多，更限于作者的水平，因而缺点和错误在所难免. 在介绍我国数学工作者的贡献或列出其论著时，因篇幅限制，也因囿于所知，很可能挂一漏万. 所有这些，都诚望同志们批评指正. 鉴于未见有同类书籍出版，故今抛出此砖，以期引出美玉.

在撰写本册的过程中，柯召教授表示因忙于其他工作故不能参与. 他尽管很忙，却一直都对作者的撰写工作给予极大的关心、鼓励和支持. 在此，作者谨向柯召教授表示最衷心最诚挚的谢意. 万哲先教授、徐利治教授对该书的撰写颇多鼓励；刘炯朗教授(C. L. Liu，University of Illinois,USA)、孙述寰教授(H. S. Sun, California State University,USA)、萧文强博士(M. K. Siu，香港大学)对作者的撰写工作颇多关切，或惠寄参考资料，或同作者进行讨论，使作者得益匪浅. 朱烈教授对本册初稿全面地提出了很宝贵的意见和建议. 沈灏、邵嘉裕、康庆德、罗家洪、钱福林等几位同志都对初稿提出过不少宝贵的意见和建议. 作者衷心地向上述各位表示最诚挚的谢意. 在作者撰写和讲授初稿的过程中，几位硕士研究生曾给予作者多方面的帮助，他们是(依姓氏的汉语拼音为序)：陈永川、高绪洪、沈国祥、王小戟、吴晓红；此外，广大同行对撰写本册的工作一直都给予关切和鼓励，作者由衷地感谢他们.

作 者

1985 年 3 月初稿

1986 年 2 月二稿

目　　录

第十一章　组合设计概论

组合设计理论是现代组合论的一个非常重要的分支. 本章介绍这一分支的概貌，而把详细的讨论留在本书的以后各章. 在介绍概貌时，着重三个方面：一、这个分支的实际背景，附带介绍历史上的两个著名组合学课题(11.1)；二、组合设计的主要类型，即可分解设计(11.1)，完全设计和正交设计(11.2)，平衡不完全区组设计(11.2)，对称设计，循环设计，几何设计和 Hadamard 设计(11.4)，部分平衡不完全区组设计(11.5)，t 设计和按对平衡区组设计(11.6)，Youden 设计，Room 设计，称重设计，幻方，覆盖和填装等(11.7)；三、组合设计理论的内容(11.8).

11.1　问题的提出

在组合设计这一分支中，也像在组合论的其他分支中一样，许多课题的原始形态是智力游戏，因而人们对它们的研究最初也总是纯数学的. 然而，当这种研究深入到一定阶段，特别是当生产发展和其他学科发展过程中产生相同或相近的问题时，这些课题就同实际紧密结合起来. 一当它们的意义明朗之后，对它们的研究就有了强大的天然动力，因而就会吸引人们更多的注意，成果也就更加丰富. 下面首先看两个例子，一个是所谓“三十六名军官问题”，另一个是“Kirkman 女生问题”.

1782 年，Euler[1] 提出的一个问题以下面的“三十六名军官问题”为其特例.

问题 11.1.1. 有三十六名军官，他们来自六个不同的团队，每个团队六名且分属于六种不同的军阶. 能否把他们排成一个方形队列，使得每行、每列的六名军官正好来自不同的团队且属于不同的军阶？

这就是著名的“三十六名军官问题”. 如果在这个问题中把 6 换为 v，把 36 换为 v^2，则问题就普遍化了. 为了描述和研究普遍化后的问题，需要引进一些术语和记号.

设 $S=\{s_1, s_2, \cdots, s_v\}$是一个 v 元集，如果 S 上的一个 v 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1v} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2v} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{v1} & a_{v2} & \cdots & a_{vv} \end{pmatrix} \tag{11.1.1}$$

满足条件：

$$a_{ij_1} \neq a_{ij_2}(1 \leqslant i \leqslant v; 1 \leqslant j_1 \neq j_2 \leqslant v), \tag{11.1.2}$$

$$a_{i_1j} \neq a_{i_2j}(1 \leqslant i_1 \neq i_2 \leqslant v; 1 \leqslant j \leqslant v), \tag{11.1.3}$$

则称 A 是集 S 上的一个 v 阶拉丁方. 条件(11.1.2)即：(11.1.1)的每一行都是 S 的一个无重全排列；条件(11.1.3)即：(11.1.1)的每一列都是 S 的一个无重全排列.

设 $B=(b_{ij})$是 S 上的另一个 v 阶拉丁方，且符合条件：在以 S 的元素偶为元的矩阵

$$((a_{ij}, b_{ij})) \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant v) \tag{11.1.4}$$

中，$S \times S$ 中的全部 v^2 个元没有不出现的，则称拉丁方 A 和 B 是集 S 上的一对 v 阶正交拉丁方，或说 A 和 B 正交.

在问题 11.1.1 中，如果把六个团队和六种军阶都各用[1,6]中的数码来编号，而且以 (i,j) 表示来自第 i 个团队且属于第 j 种军阶的军官，那么问题 11.1.1 就可重述为：是否存在集[1,6]上的一对六阶正交拉丁方？

这个问题可以普遍化为

问题 11.1.2. 对任意正整数 v，是否存在一对 v 阶正交拉丁方？

关于问题 11.1.2 以及正交拉丁方这一课题的详细讨论将在第十八章中进行. 现在来看看这一问题的实际意义.

今把某试验田分成纵横的九小块且欲在其上试种三个不同品种的小麦 A,B 和 C，以便得出在 A，B 和 C 中哪一个品种最适宜在该地区种植的有关结论. 比较一下下面几种划分试验场地的方式：

A	B	C
A	B	C
A	B	C

(1)

A	A	A
B	B	B
C	C	C

(2)

A	C	A
C	B	B
B	A	C

(3)

A	B	C
B	C	A
C	A	B

(4)

(11.1.5)

在(11.1.5)的(1)和(2)中，品种 A,B 和 C 安排得比较集中. 这样，三横条或三竖条地上的土质的好坏对三个品种的小麦的长势和收成的影响很不均衡.(3)比(1)和(2)都好，特别是每一纵条上三个品种的小麦都有，因而三纵条上的土质对这三个品

种的小麦的影响比较均衡；但是，在三个横条上，三个品种的小麦却分布得很不均衡，因而三横条上的土质对这三个品种的小麦的影响就不均衡了. (4)就避免了上述缺点,使得三横条和三纵条上的土质对三个品种的小麦的影响都是均衡的. 这表明了方法(4)比其他三种方法都要好些,而(4)正好是三个文字的集$\{A,B,C\}$上的一个三阶拉丁方.

今欲生产一种饮料，其主要原料有 A,B,C,D 四种. 希望通过试验来找到一个恰当的配方，使得饮料的质量最好.

如果对每种原料都选择三种不同的剂量，分别记为A_i,B_i,C_i,D_i $(1\leqslant i\leqslant 3)$，来做试验，就得做$3^4=81$次. 能否通过做较少次数的试验而得出比较可靠的结论呢?

粗略地说，如果能设计出一个做n次试验的方案，使得四种原料的任二种(暂记为甲、乙)的三个剂量的组合甲$_i$ $(1\leqslant i\leqslant 3)$，乙$_j$$(1\leqslant j\leqslant 3)$都能在这个方案中出现，则可望由此得出较可靠的结论. 如果每一对甲$_i$，乙$_j$恰好相遇一次，那么，各种原料的各种剂量就可认为搭配得很合理，且在保证此合理搭配的条件下试验次数可达到最小，因而是比较理想的试验方案.

现在来计算这样的试验次数n. 一次试验可以用下面的方法来表示：

$A_iB_jC_kD_l$：A 的剂量为A_i,B 的剂量为B_j,C 的剂量为C_k,D 的剂量为D_l.

于是，一次试验中有诸原料的$\binom{4}{2}=6$对剂量相遇，故n次试验中诸原料的两种剂量相遇的总次数为 $6n$. 另一方面，由A_i分别与B,C,D的全部可能的剂量各相遇一次，就得相遇 9 次，故 A 的三种剂量分别与B,C,D的全部可能的剂量各相遇一次时，其相遇的总次数为$3\cdot 9$次. 类似地，B 的三种剂量分别与 C,D 的全部可能的剂量各相遇一次时，其相遇的总次数为$3\cdot 6$次；C的三种剂量与 D 的三种剂量各相遇一次时，其相遇的总次数为$3\cdot 3$次. 总起来，每二种剂量恰好相遇一次时，诸剂量相遇的总次数是

$$3(9+6+3)=54.$$

由 $6n=54$ 得出 $n=9$. 这就是说，符合要求的方案如果存在的话，它包含九次试验.

为了配出这九个方案，可列出一张表，除了表头的行以外，它的每一行表示一次试验,而第 1, 2, 3, 4 列分别是 A, B, C, D 的三种剂量. 由于A_i与B_1,B_2,B_3都要相遇,故A_1,A_2,A_3各要出现在三行上， 而且在A_i出现的三行上，B_1,B_2,B_3各出现一次. 这样一来，经过行的换序，这个表的头二列可以写为

A	B	C	$\boldsymbol{D}$
A_1	B_1		
A_1	B_2		
A_1	B_3		
A_2	B_1		
A_2	B_2		
A_2	B_3		
A_3	B_1		
A_3	B_2		
A_3	B_3		

(11.1.6)

为了得出符合要求的第i列，把(11.1.6)改写为下面的形式更为有益：

B / (A,B)，C / A	B_1	B_2	B_3
A_1	(A_1, B_1),	(A_1, B_2),	(A_1, B_3),
A_2	(A_2, B_1),	(A_2, B_2),	(A_2, B_3),
A_3	(A_3, B_1),	(A_3, B_2),	(A_3, B_3),

(11.1.7)

其中第 i 行与第 j 列交口处的元素为“$(A_i，B_j)$，”，这里 A_i，B_j外的括号表示 A_i 和 B_j组成一个元素对. 这可以略去不写，因为由表的行头和列头已经表明了这一点. $(A_i，B_j)$后的逗号表明将要添上适当的 C_k. 由于元素对$(A_i，C_k)(1\leqslant i,k\leqslant 3)$和$(B_j,C_k)(1\leqslant j,k\leqslant 3)$在全部表中恰好各出现一次，所以 C_1,C_2,C_3 在(11.1.7)除表头以外的各行和各列中皆各出现一次. 因此，略去（11.1.7）中的诸(A_i,B_j)且添上符合要求的各 C_i 所形成的阵列正好是集$\{C_1，C_2，C_3\}$上的一个三阶拉丁方. 而且反之亦然.

例如，可以用三阶拉丁方

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ C_2 & C_3 & C_1 \\ C_3 & C_1 & C_2 \end{pmatrix} \tag{11.1.8}$$

把表(11.1.7)扩充为：

B / (A,B)，C / A	B_1	B_2	B_3
A_1	$(A_1, B_1), C_1$	$(A_1, B_2), C_2$	$(A_1, B_3), C_3$
A_2	$(A_2, B_1), C_2$	$(A_2, B_2), C_3$	$(A_2, B_3), C_1$
A_3	$(A_3, B_1), C_3$	$(A_3, B_2), C_1$	$(A_3, B_3), C_2$

(11.1.9)

现在还需在(11.1.9)中添入适当的 D_l .与添 C_k 的情形类似地，要添入的诸 D_l 组成集$\{D_1, D_2, D_3\}$上的一个三阶拉丁方. 此外，诸 D_l 的足标与诸 C_k 的足标各相遇一次，这就是说，足标对(k, l)恰好出现一次，亦即 D_l 的诸足标所组成的拉丁方与诸 C_k 的足标所组成的拉丁方这二者正交. 而且，反过来的推理也是对的. 例如，因为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

正交，故可把(11.1.9)扩充成符合要求的表：

$(A,B),C,D$ (A \ B)	B_1	B_2	B_3
A_1	$(A_1, B_1), C_1, D_1$	$(A_1, B_2), C_2, D_2$	$(A_1, B_3), C_3, D_3$
A_2	$(A_2, B_1), C_2, D_3$	$(A_2, B_2), C_3, D_1$	$(A_2, B_3), C_1, D_2$
A_3	$(A_3, B_1), C_3, D_2$	$(A_3, B_2), C_1, D_3$	$(A_3, B_3), C_2, D_1$

(11.1.10)

在表(11.1.10)的“$(A, B), C, D$”栏中的九个组合就是符合要求的试验安排.

下面转而讨论 Kirkman 于 1847 年提出的一个问题.

问题 11.1.3(Kirkman[1]女生问题). 某教员打算这样安排她班上的十五名女生散步：散步时三名女生成一组，共五组. 问能否在一周内每日安排一次散步，使得每两名女生在这周内一道散步恰好一次?

下面就是符合要求的分组方法.

第一日：$\{1, 2, 5\}$，$\{3, 14, 15\}$，$\{4, 6, 12\}$，
$\{7, 8, 11\}$，$\{9, 10, 13\}$；
第二日：$\{1, 3, 9\}$，$\{2, 8, 15\}$，$\{4, 11, 13\}$，
$\{5, 12, 14\}$，$\{6, 7, 10\}$；
第三日：$\{1, 4, 15\}$，$\{2, 9, 11\}$，$\{3, 10, 12\}$，
$\{5, 7, 13\}$，$\{6, 8, 14\}$；
第四日：$\{1, 6, 11\}$，$\{2, 7, 12\}$，$\{3, 8, 13\}$， (11.1.11)
$\{4, 9, 14\}$，$\{5, 10, 15\}$；
第五日：$\{1, 8, 10\}$，$\{2, 13, 14\}$，$\{3, 4, 7\}$，
$\{5, 6, 9\}$，$\{11, 12, 15\}$；
第六日：$\{1, 7, 14\}$，$\{2, 4, 10\}$，$\{3, 5, 8\}$，
$\{6, 13, 15\}$，$\{8, 9, 12\}$；
第七日：$\{1, 12, 13\}$，$\{2, 3, 6\}$，$\{4, 5, 8\}$，

{7，9，15}，{10，11，14}.

问题 11.1.3 表面上看起来也纯属数学游戏，然而它的解(11.1.11)却有其实际应用. 下面是一个说明性的例子. 今欲用 15 种饲料对某种动物做试验. 试验分五个阶段进行，每个阶段以三种饲料的混合物来喂养用作试验的七只同类动物，假定需要按以下条件来安排实验：(1)每种饲料对每只用作试验的动物在五个阶段所用的混合饲料中恰好用一次，(2)每两种不同的饲料对全体用作试验的动物在五个阶段所用的混合饲料中都恰好同时用过一次. 那么，根据(11.1.11)，可以得到一个符合要求的安排，有如(11.1.12)所示.

阶段 / 饲料 / 动物	1	2	3	4	5
第一只	1，2，5	3，14，15	4，6，12	7，8，11	9，10，13
第二只	1，3，9	2，8，15	4，11，13	5，12，14	6，7，10
第三只	1，4，15	2，9，11	3，10，12	5，7，13	6，8，14
第四只	1，6，11	2，7，12	3，8，13	4，9，14	5，10，15
第五只	1，8，10	2，13，14	3，4，7	5，6，9	11，12，15
第六只	1，7，14	2，4，10	3，5，11	6，13，15	8，9，12
第七只	1，12，13	2，3，6	4，5，8	7，9，15	10，11，14

(11.1.12)

关于 Kirkman 女生问题以及与其有关的一些问题，在第十九章还将详细地讨论.

不管是用拉丁方在试验地上安排农作物的播种，或用正交拉丁方安排几种原料的配方，还是用 Kirkman 女生问题的解作出的一个饲程内饲料的安排，都涉及一些科学试验的安排问题. 上面粗略地描述的是作出符合要求的试验的安排的方法，这叫做*试验的设计*. 利用符合要求的试验设计来进行试验就可得出许多数据，如何分析这些数据从而得出有关试验的一些结论，这叫做*试验的分析*. 一般说来，试验的设计属于组合论的研究对象，而试验的分析则是数理统计学的内容. 本书只研究试验的设计. 对试验的分析有兴趣的读者可以参考有关的资料，例如，H.B.Mann[1]和 D.C.Montgomery[1]，以及中国科学院数学所统计组[1].

试验设计在组合论中又叫做*区组设计*，是组合设计的一种重要类型. 为了说得更确切些，给出以下的定义.

定义 11.1.1. 设 S 是一个有限集，$B_1, B_2,\cdots$，B_b 是它的 b 个子集或 b 个无重排列. 由诸 B 组成的簇 $\mathscr{B}=\{B_1, B_2, \cdots, B_b\}$就叫做集 S 上的一个*区组设计*，S 叫做该设计的基集，诸 $B_i\,(1\leqslant i\leqslant b)$叫做该设计的*区组*. S 的诸元素的一种确定的安排就叫做 S 上的一个*组合设计*.

为方便计，未特别说明的区组均指子集，且有时也把将作为某一设计的区组的一个子集或无重排列叫做区组.

需要强调的是，在这个定义中，每一区组都是一个子集，或都是一个无重排列，其中无重复的元，而区组簇 $\mathscr{B}$ 则可以有重复的区组. 此外，这个定义非常广泛，对区组、区组簇和诸元素的安排方式几乎无限制. 要使研究的问题对理论和实际有意义和作用往往需要对这些加上若干适当的限制条件. 这将是本章的其他诸节和本册的其他诸章的主要内容. 这里先介绍一个较一般的简单情形.

定义 11.1.2. 设 $\mathscr{B}$ 是基集 S 上的一个区组设计. 如果 $\mathscr{B}$ 有分解式

$$\mathscr{B}=\mathscr{B}_1\cup\mathscr{B}_2\cup\cdots\cup\mathscr{B}_r \tag{11.1.13}$$

使得对任一元 $s\in S$ 和任一足标 $j\in[1,r]$，s 都恰在 $\mathscr{B}_j$ 的一个区组中出现，则这样的区组设计叫做一个可分解区组设计，简称为可分解设计. 每一 $\mathscr{B}_i$ 叫做一个平行联组或简称为联组，又叫做一个平行区组簇或简称为平行簇.

例如，在问题 11.1.3 中给出的 Kirkman 女生问题的解就是一个可分解设计，$\mathscr{B}_i\ (1\leqslant i\leqslant 7)$ 是由第 i 日的五个组所组成的子簇.

这类设计将在第十八章中遇到.

区组设计的理论有着很多重要的实际应用，这可以从上面几个说明性的问题得知一个轮廓. 在本书介绍区组设计理论时，一般不涉及它的具体应用，因为这不是本书的任务. 自然，区组设计理论的应用并不仅仅限于对试验的安排和研究，它对计算机科学和数学通讯理论等都有着十分重要的应用. 有兴趣的读者可以参看 F.J.Macwilliams 和 N.J.A.Sloane[1].

本章的其余各节将分述几种基本类型的区组设计的概貌，而对这些基本类型的区组设计及其互相联系的详细研究将留待本书的其余诸章.

11.2　完全区组设计

设 $S=\{s_1, s_2, \cdots, s_v\}$ 是一个 v 元集.

定义 11.2.1. 集 S 的一个完全区组设计是 S 的满足一定条件的若干个无重全排列的全体，其中每一个全排列叫做一个区组.

如果(11.1.1)是一个 v 阶拉丁方，则 A 的每一行(或每一列)可以视为集 S 的一个全排列. 这些排列所满足的条件由(11.1.2)(或(11.1.3))给出. 因此，一个拉丁方是一个完全区组设计. 一般地，一个 $t\times v$ 阶(或 $v\times t$ 阶)拉丁矩(参看 5.6)也是一个完全区组设计.

如果定义 11.2.1 中的诸全排列满足条件：这些排列的选取是随机的，这样得

到的完全区组设计又叫做随机完全区组设计.

当其需要做一系列试验而诸试验的顺序对试验结果有影响时，往往采用随机完全区组设计来安排这些试验. 例如，为了要观察七种助生长药物的效果，今用十二只兔来作试验：七日内每只兔每日喂一药. 一般来说，所喂的药的顺序对这七日试验的总效果会有影响，因为先喂的药可能加强或削弱后喂的药的作用. 把这七种药分别用[1,7]中的数来编号. 如果全部十二只兔都按[1,7]的同一排列中的顺序来喂药，则这些药表现出的效果会比实际的效果大或小些，从而影响得出正确的结论. 如果在集[1,7]的全排列中随机地选出十二个来作为十二只兔喂药的次序，上面的弊病即可克服. 已有现成的随机数的表和随机排列的表供查用，例如，有 Kendall 和 Babington-Smith[1]，Rand Corporation[1].

完全区组设计以及与之相关的正交设计将在第十八章讨论.

11.3　平衡不完全区组设计

设 $S=\{s_1, s_2, \cdots, s_v\}$是一个 v 元集.

定义 11.3.1. 设$\mathscr{B}=\{B_1, B_2, \cdots, B_b\}$是集 S 上的一个区组设计. 如果$\mathscr{B}$满足条件：

(1)$|B_j|$是一个不依赖于 j 的常数$(1\leqslant j\leqslant b)$；

(2)对 S 的任一元 s，含 s 的$\mathscr{B}$中子集的个数是一个不依赖于 s 的常数；

(3)对 S 的任一个二元子集$\{S_i, S_j\}$，包含该子集的$\mathscr{B}$中子集的个数是一个不依赖于s_i和s_j的常数；

则说$\mathscr{B}$是集 S 上的一个平衡不完全区组设计. (1)中的常数值叫做各区组的容量，(2)中的常数值叫做 S 中元在诸区组中的出现数,(3)中的常数值叫做 S 中二相异元的相遇数. 如果这三个数分别是 k，r，λ，这个区组设计就叫做一个(b, v, r, k, λ)平衡不完全区组设计，简称为(b, v, r, k, λ)设计，b,v,r,k,λ叫做这个设计的参数.

所有区组的容量相同，以及 S 中任一元的出现数都相同，且任一对相异元的相遇数都相同，这就是设计的平衡性的含义.

平衡不完全区组设计又记为 BIBD 或 BIB 设计,它们是“balanced incomplete block design”的缩写.

定义 11.3.1 中的条件(2)实际上是条件(1)和(3)的推论(参看定理 11.6.2 的系)，因而可以删去. 这里列出它，其原因之一是强调这一条件，另一是遵从组合学文献的习惯.

下面来看参数 k 取一些特殊值的情形.

当 k=0 时，若要 $\mathscr{B}$ 成为一个(b，v，r，k，λ)设计，则有一非负整数 b 使

$$\mathscr{B}=\left\{\underbrace{\varnothing,\varnothing,\cdots,\varnothing}_{b\text{个}}\right\}\quad, \tag{11.3.1}$$

易证，对任一非负整数 b，(11.3.1)确为一个(b，v，0，0，0)设计.

当 k=1 时，若要 $\mathscr{B}$ 成为一个(b，v，r，k，λ)设计，则有一正整数 r 使

$$\mathscr{B}=\{\underbrace{\{s_1\},\cdots,\{s_1\}}_{r\text{个}},\underbrace{\{s_2\},\cdots,\{s_2\}}_{r\text{个}},\cdots,\underbrace{\{s_v\},\cdots,\{s_v\}}_{r\text{个}}\}, \tag{11.3.2}$$

易证，对任一正整数 r，(11.3.2)确为一个$(rv,v,r,1,0)$设计.

当 k=2 时，若要 $\mathscr{B}$ 成为一个(b，v，r，k，λ)设计，则有正整数 λ 使

$$\mathscr{B}=\{\underbrace{\{s_1,s_2\},\cdots,\{s_1,s_2\}}_{\lambda\text{个}},\cdots,\underbrace{\{s_i,s_{i+j}\},\cdots,\{s_i,s_{i+j}\}}_{\lambda\text{个}},\cdots,\underbrace{\{s_{v-1},s_v\},\cdots,\{s_{v-1},s_v\}}_{\lambda\text{个}}\}. \tag{11.3.3}$$

易证， 对任一正整数 λ，(11.3.3)确为一个$\left(\lambda\cdot\dfrac{v(v-1)}{2},v,\lambda(v-1),2,\lambda\right)$设计.

当 k=v–2 时，若要 $\mathscr{B}$ 成为一个(b，v，r，k，λ)设计，则有正整数 t，使

$$\begin{aligned}\mathscr{B}=\{&\underbrace{S\setminus\{s_1,s_2\},\cdots,S\setminus\{s_1,s_2\}}_{t\text{个}},\cdots,\\ &\underbrace{S\setminus\{s_i,s_{i+j}\},\cdots,S\setminus\{s_i,s_{i+j}\}}_{t\text{个}},\cdots,\\ &\underbrace{S\setminus\{s_{v-1},s_v\},\cdots,S\setminus\{s_{v-1},s_v\}}_{t\text{个}}\},\end{aligned} \tag{11.3.4}$$

易证，对任一正整数 t，(11.3.4)确为一个$\left(t\dfrac{v(v-1)}{2},v,t\dfrac{(v-1)(v-2)}{2},v-2,\right.$
$\left.t\dfrac{(v-2)(v-3)}{2}\right)$设计.

当 k=$v-1$ 时，若要成为一个(b，v，r，k，λ)设计，则有正整数 t，使

$$\mathscr{B}=\{\underbrace{S\setminus\{s_1\},\cdots,S\setminus\{s_1\}}_{t\text{个}},\cdots,$$

$$S\setminus\{\underbrace{s_i\},\cdots,S\setminus\{s_i}_{t\text{个}}\},\cdots,$$

$$S\setminus\{\underbrace{s_v\},\cdots,S\setminus\{s_v}_{t\text{个}}\}\},\tag{11.3.5}$$

易证，对任一正整数 t，(11.3.5)确为一个$(vt,v,(v-1)t,v-1,(v-2)t)$设计.

当 $k=v$ 时，若要 $\mathscr{B}$ 成为一个(b，v，r，k，λ)设计，则有正整数 r，使

$$\mathscr{B}=\underbrace{\{S,\cdots,S\}}_{r\text{个}},\tag{11.3.6}$$

显然，对任一正整数 r，(11.3.6)确是一个(r，v，r，v，r)设计.

由第十二章将要证明的一个定理(定理 12.1.5)，上述关于 $k=v-2,v-1,v$ 的情形可分别化为 k=2，1，0 的情形得到解决，从而也可以得到处理. 这里用直接构造的方法，不依赖于定理 12.1.5.

因为设计(11.3.1)—(113.6)是显而易见的，故称为平凡的 BIB 设计；又因为它们的参数具有的特殊值往往影响具一般参数的设计的统一性，故又称之为退化的 BIB 设计. 为了处理的统一和方便起见，若无特殊的说明，一个(b，v，r，k，λ)设计今后常指除开(11.3.1)—(11.3.6)以外的设计，亦即参数 k 满足 $3\leqslant k\leqslant v-3$ 的设计，这又叫做非平凡或非退化的 BIB 设计.

11.4　一些特殊类型的平衡不完全区组设计

若对(b，v，r，k，λ)设计附加上另外一些限制条件，就产生特殊类型的平衡不完全区组设计.

一种特殊类型的平衡不完全区组设计是所谓的对称的平衡不完全区组设计.

定义 11.4.1.　一个(v，v，k，k，λ)设计叫做对称的平衡不完全区组设计或对称的 BIB 设计，又叫做(v，k，λ)设计. 又常简称为对称设计.

一种特殊类型的对称设计是所谓的循环对称设计. 这种设计同循环差集密切相关.

定义 11.4.2.　以正整数 v 为模的 k 个互不同余的整数所组成的集 $D=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}\pmod v$叫做一个($v$，$k$，$\lambda$)循环差集，如果对每一个 $d\not\equiv 0\pmod v$，恰好有 D 中的 λ 个有序对(a_i,a_j)使得

$$d \equiv a_i - a_j \pmod{v}.$$

在定义 11.4.2 中，符号“$D=\{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \pmod{v}$”的意思是，$D$ 由 a_1，a_2，⋯，a_k 所代表的诸剩余类$(\mathrm{mod}\ v)$组成. 有时又将此记为 $D \equiv \{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \pmod{v}$. 如果用 Z_v 表模 v 的剩余类环，$\bar{a}$ 表整数 a 所在的剩余类，则定义 11.4.2 又可改述为：

定义 11.4.3. Z_v 的一个 k 元子集 $D=\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots, \bar{a}_k\}$叫做一个$(v, k, \lambda)$循环差集，如果对每一$\bar{d} \in Z_v, \bar{d} \neq \bar{0}$，恰有 D 中 λ 个有序对$(\bar{a}_i, \bar{a}_j)$使得

$$\bar{d} = \bar{a}_i - \bar{a}_j .$$

例 11.4.1. 设 $v=11$，则 Z_{11} 的子集 $D = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{9}\}$ 是一个(11，5，2)循环差集.

这很容易直接验证如下：

$$\begin{aligned}
&\bar{1} - \bar{3} = \bar{9}, \quad \bar{3} - \bar{1} = \bar{2}, \\
&\bar{1} - \bar{4} = \bar{8}, \quad \bar{4} - \bar{1} = \bar{3}, \\
&\bar{1} - \bar{5} = \bar{7}, \quad \bar{5} - \bar{1} = \bar{4}, \\
&\bar{1} - \bar{9} = \bar{3}, \quad \bar{9} - \bar{1} = \bar{8}, \\
&\bar{3} - \bar{4} = \overline{10}, \quad \bar{4} - \bar{3} = \bar{1}, \\
&\bar{3} - \bar{5} = \bar{9}, \quad \bar{5} - \bar{3} = \bar{2}, \\
&\bar{3} - \bar{9} = \bar{5}, \quad \bar{9} - \bar{3} = \bar{6}, \\
&\bar{4} - \bar{5} = \overline{10}, \quad \bar{5} - \bar{4} = \bar{1}, \\
&\bar{4} - \bar{9} = \bar{6}, \quad \bar{9} - \bar{4} = \bar{5}, \\
&\bar{5} - \bar{9} = \bar{7}, \quad \bar{9} - \bar{5} = \bar{4}.
\end{aligned} \tag{11.4.1}$$

在(11.4.1)中诸式左节穷尽了 D 的一切有序相异元素对之差，而在诸式的右节中，$\bar{1}, \bar{2}, \cdots, \overline{10}$ 恰好各出现二次.

为了介绍循环对称设计，需要区组设计之间同构的概念.

定义 11.4.4. 分别在 v 元集 $S_1 = \{s'_1, s'_2, \cdots, s'_v\}$ 和 $S_2 = \{s''_1, s''_2, \cdots, s''_v\}$ 上的两个(b, v, r, k, λ)设计 $\mathscr{B}_1 = \{B'_1, \cdots, B'_b\}$ 和 $\mathscr{B}_2 = \{B''_1, \cdots, B''_b\}$ 称为是同构的，如果存在从 S_1 到 S_2 上的一个(1–1)映射 α

$$\alpha : s'_i \to a(s'_i) \in S_2 ,$$

它也是从 $\mathscr{B}_1$ 到 $\mathscr{B}_2$ 上的一个(1–1)映射

$$\alpha : B_i' \to \alpha(B_i') \in \mathscr{B}_2 .$$

这里$\alpha\left(B_i'\right) = \alpha B_i = \left\{\alpha(s') \middle| s' \in B_i'\right\}$. 此时又说映射$\alpha$是从$\mathscr{B}_1$到$\mathscr{B}_2$上的一个同构. 如果$S_1 = S_2$, $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_2$,且$\alpha$是从$\mathscr{B}_1$到其自身上的一个同构，则说$\alpha$是$\mathscr{B}_1$上的一个自同构.

容易验证，$\mathscr{B}_1$上的全体自同构组成一个群，叫做$\mathscr{B}_1$的全自同构群. 这个群的任一子群都叫做区组设计$\mathscr{B}_1$的自同构群.

定义 11.4.5. $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_v\}$上的一个对称$(v, k, \lambda)$设计$\mathscr{B} = \{B_1, B_2, \cdots, B_v\}$称为循环对称设计，如果存在$\mathscr{B}$的一个自同构$\alpha$，合于

$$\left\{s_1, \alpha(s_1), \alpha^2(s_1), \cdots, \alpha^{v-1}(s_1)\right\} = S ,$$

$$\left\{B_1, \alpha(B_1), \alpha^2(B_1), \cdots, \alpha^{v-1}(B_1)\right\} = \mathscr{B} .$$

例 11.4.2. Z_{11}上的(11，5，2)设计$\mathscr{B} = \{B_1, B_2, \cdots, B_{11}\}$是循环的，这里

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{9}\}, \\
B_2 &= \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{10}\}, \\
B_3 &= \{\overline{3}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{0}\}, \\
B_4 &= \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}\}, \\
B_5 &= \{\overline{2}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}\}, \\
B_6 &= \{\overline{3}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}\}, \\
B_7 &= \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{10}\}, \\
B_8 &= \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{10}\}, \\
B_9 &= \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{6}, \overline{9}\}, \\
B_{10} &= \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{7}, \overline{10}\}, \\
B_{11} &= \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{8}\}.
\end{aligned} \tag{11.4.2}$$

这可直接验证如下: 因为

$$
\begin{aligned}
&\{\overline{1},\overline{2}\} \in B_9, B_{10};\ \{\overline{1},\overline{3}\} \in B_1, B_{10};\\
&\{\overline{1},\overline{4}\} \in B_1, B_4;\ \{\overline{1},\overline{5}\} \in B_1, B_8;\\
&\{\overline{1},\overline{6}\} \in B_4, B_9;\ \{\overline{1},\overline{7}\} \in B_4, B_{10};\\
&\{\overline{1},\overline{8}\} \in B_4, B_8;\ \{\overline{1},\overline{9}\} \in B_1, B_9;\\
&\{\overline{1},\overline{10}\} \in B_8, B_{10};\ \{\overline{2},\overline{3}\} \in B_{10}, B_{11};\\
&\{\overline{2},\overline{4}\} \in B_2, B_{11};\ \{\overline{2},\overline{5}\} \in B_2, B_5;\\
&\{\overline{2},\overline{6}\} \in B_2, B_9;\ \{\overline{2},\overline{7}\} \in B_5, B_{10};\\
&\{\overline{2},\overline{8}\} \in B_5, B_{11};\ \{\overline{2},\overline{9}\} \in B_5, B_9;\\
&\{\overline{2},\overline{10}\} \in B_2, B_{10};\ \{\overline{3},\overline{4}\} \in B_1, B_{11};\\
&\{\overline{3},\overline{5}\} \in B_1, B_3;\ \{\overline{3},\overline{6}\} \in B_3, B_6;\\
&\{\overline{3},\overline{7}\} \in B_3, B_{10};\ \{\overline{3},\overline{8}\} \in B_6, B_{11};\\
&\{\overline{3},\overline{9}\} \in B_1, B_6;\ \{\overline{3},\overline{10}\} \in B_6, B_{10};\\
&\{\overline{4},\overline{5}\} \in B_1, B_2;\ \{\overline{4},\overline{6}\} \in B_2, B_4;\\
&\{\overline{4},\overline{7}\} \in B_4, B_7;\ \{\overline{4},\overline{8}\} \in B_4, B_{11};\\
&\{\overline{4},\overline{9}\} \in B_1, B_7;\ \{\overline{4},\overline{10}\} \in B_2, B_7;\\
&\{\overline{5},\overline{6}\} \in B_2, B_3;\ \{\overline{5},\overline{7}\} \in B_3, B_5;\\
&\{\overline{5},\overline{8}\} \in B_5, B_8;\ \{\overline{5},\overline{9}\} \in B_1, B_5;\\
&\{\overline{5},\overline{10}\} \in B_2, B_8;\ \{\overline{6},\overline{7}\} \in B_3, B_4;\\
&\{\overline{6},\overline{8}\} \in B_4, B_6;\ \{\overline{6},\overline{9}\} \in B_6, B_9;\\
&\{\overline{6},\overline{10}\} \in B_2, B_6;\ \{\overline{7},\overline{8}\} \in B_4, B_5;\\
&\{\overline{7},\overline{9}\} \in B_5, B_7;\ \{\overline{7},\overline{10}\} \in B_7, B_{10};\\
&\{\overline{8},\overline{9}\} \in B_5, B_6;\ \{\overline{8},\overline{10}\} \in B_6, B_8;\\
&\{\overline{9},\overline{10}\} \in B_6, B_7;
\end{aligned} \tag{11.4.3}
$$

故（11.4.2）是一个（11，5，2）设计.设映射 α 为

$$\alpha : \overline{i} \to \overline{i+1}\,, \tag{11.4.4}$$

则 α 是 Z_{11} 上的一个(1–1)映射，且

$$Z_{11} = \{0, \alpha(0), \alpha^2(0), \cdots, \alpha^{10}(0)\}\,,$$

$$\alpha B_i = B_{i+1}(1 \leqslant i \leqslant 10). \tag{11.4.5}$$

因此(11.4.2)是循环的.

也许读者已经注意到了例 11.4.1 和例 11.4.2 之间的联系. 实际上例 11.4.2 中的 B_1 就是例 11.4.1 中的 D, 例 11.4.2 中的其他诸 B 都可借助于(11.4.4)和(11.4.5)产生. 这种联系并不是偶然的, 因为下面的一般性定理成立.

定理 11.4.1. Z_v 上的一个 k 元集

$$D = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots, \overline{a}_k\} \tag{11.4.6}$$

是一个循环差集的充要条件是, 集

$$\mathscr{B} = \{B_1, B_2, \cdots, B_v\} \tag{11.4.7}$$

是 Z_v 上的一个(v, k, λ)循环设计, 其中

$$B_1 := D, B_2 := \alpha(B_1), B_3 := \alpha(B_2), \cdots, B_v := \alpha(B_{v-1}), \tag{11.4.8}$$

这里 α 为 Z_v 到其自身上的(1–1)映射:

$$\alpha : \overline{i} \to \overline{i+1}. \tag{11.4.9}$$

证明. 先证条件的充分性. 设由(11.4.8)中诸 $B_i(B_1 = D)$ 组成的(11.4.7)是一个(v, k, λ)循环设计. 对任一 $\overline{d} \neq \overline{0}$, 因 Z_v 中的元素对$(\overline{d}, \overline{0})$恰好在 λ 个区组中出现, 故恰有 λ 个 t 合

$$\overline{a_{i_t} + t} = \overline{d}, \quad \overline{a_{j_t} + t} = \overline{0}, \tag{11.4.10}$$

(11.4.10)成立的充要条件是

$$\begin{aligned}
\overline{a}_{j_t} &= \overline{-t}, \\
\overline{d} &= \overline{a_{i_t} - (-t)} \\
&= \overline{a_{i_t} - a_{j_t}} = \overline{\overline{a}_{i_t} - \overline{a}_{j_t}}.
\end{aligned}$$

这就是说, $\overline{d}$ 恰可表为 D 中 λ 对有序元之差, 因而 D 是一个(v, k, λ)循环差集.

再证条件的必要性. 设(11.4.6)式确定的 D 是一个(v, k, λ)循环差集. 由(11.4.8)所定义的 B_i 为

$$B_i = \{\overline{a_1 + i - 1}, \overline{a_2 + i - 1}, \cdots, \overline{a_k + i - 1}\} \\ (1 \leqslant i \leqslant v), \tag{11.4.11}$$

显然，$|B_i| = k(1 \leqslant i \leqslant v)$,$|\mathscr{B}| = v$. 因为 Z_v 中每一元 $\overline{j}$ 在 $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_v$ 中出现 k 次，而每一 B_v 中的 k 个元彼此不同，故 $\overline{j}$ 恰在 k 个 B_i 中出现. 设 $\overline{u},\overline{s}$ 是 Z_v 中二不同元，令 $\overline{d} = \overline{u} - \overline{s}$，则 $\overline{d} \neq \overline{0}$. 由于 D 是一个(v, k, λ)循环差集，故恰有 D 中 λ 个有序对$(\overline{a}_{il},\overline{a}_{jl})(1 \leqslant l \leqslant \lambda)$合

$$\overline{u} - \overline{s} = \overline{d} = \overline{a}_{il} - \overline{a}_{jl}(1 \leqslant l \leqslant \lambda).$$

记 $\overline{u} - \overline{a}_{il} = \overline{t_l}$,即 $\overline{u} = \overline{a_{il} + t_l}$，则

$$\begin{aligned}\overline{s} &= \overline{u} - \overline{a}_{il} + \overline{a}_{jl} \\ &= \overline{a}_{jl} + \overline{t_l} = \overline{a_{jl} + t_l}.\end{aligned}$$

这就是说，$\{\overline{u}, \overline{s}\}$恰在 $B_{t_1+1}, B_{t_2+1}, \cdots, B_{t_n+1}$ 这 λ 个区组之中. 至此已经证明 $\mathscr{B}$ 是一个(v, k, λ)设计. 再由(11.4.11)和(11.4.9)得 B 的循环性. **证毕.**

由这个定理和下面 14.1 之首的说明可知，Z_v 上的循环区组设计的研究完全化成了循环差集的研究. 有关循环差集的详细讨论，将在第十四章和第十五章中进行.

另一种特殊类型的对称设计具有参数 $v = n^2 + n + 1$，$k = n + 1$，$\lambda = 1$. 这与有限射影平面有关. 关于有限射影平面以及更一般地，关于有限几何以及由它们导出的设计将在第十七章中讨论.

一个（$4t-1$，$2t-1$，$t-1$）对称区组设计又叫做 Hadamard 设计，这是因为它与一类作用巨大的矩阵有关，而这类矩阵叫做 Hadamard 矩阵. 在第十六章中再详细研究这一课题.

具特殊参数的平衡不完全区组设计的类型很多，上述只是最重要最基本的几种.

如果一个区组设计既是可分解的，又是具参数 b，v，r，k，λ 的平衡不完全区组设计,就简单地叫做可分解的(b, v, r, k, λ)设计. 由定义 11.1.2 和定义 11.3.1 知，此时(11.1.13)的分解式中子簇 $\mathscr{B}_i$ 的个数为 r. 又可直接验证，问题 11.1.3 中给出的 Kirkman 女生问题的解答，就是一个可分解的(35，15，7，3，1)设计，子簇 $\mathscr{B}_i(1 \leqslant i \leqslant 7)$ 由第 i 日的五组所组成.

11.5 部分平衡不完全区组设计

平衡不完全区组设计有几种重要的拓广. 本书将涉及三种. 这里讨论其中之一，而把另二种放到下节介绍. 之所以要对平衡不完全区组设计进行拓广，一方面是为了实际问题的需要. 例如，因为平衡不完全区组设计的条件较强，对于很

大一类参数，它并不存在，而在处理一些实际问题时又需要一些设计供用，因而采取削弱限制条件而构造出一些不是 BIBD 的设计以应需要. 另一方面，在理论研究中，例如在对 BIB 设计的研究中，这些拓广有着重要的作用.

下面讨论 BIB 设计的第一种拓广，即部分平衡不完全区组设计，简称为 PBIBD 或 PBIB 设计，这是“partially balanced incomplete block design”的缩写. 这种拓广是把定义 11.3.1 中的条件(3)削弱而得到的，即不要求 S 的每一个二元子集都在 $\mathscr{B}$ 的诸区组中出现同样的次数，但也不是对此毫无要求.

PBIB 设计的概念基于所谓“结合方案”的概念，故下面先从结合方案谈起.

设 $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_v\}$ 是一个 v 元集，且

$$(S\times S)\backslash\{(s,s)\mid s\in S\}=R_1\cup R_2\cup\cdots\cup R_m\,, \tag{11.5.1}$$

$$R_i\cap R_j=\varnothing(i\neq j)\,,\quad R_i\neq\varnothing$$

是$(S\times S)\backslash\{(s,s)\mid s\in S\}$的一个分解. 今后也把 $R_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 视为关系.

定义 11.5.1.　如果对于集 S，分解式(11.5.1)满足下述条件：

(1)每一关系 $R_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 都是对称的；

(2)对于 S 中的每一元 s，都有

$$|\{s'\in S\mid(s,\ s')\in R_i\}|=n_i\,,$$

此数依赖于 i，而不依赖于 s 的具体选择；

(3)只要 $(s,s')\in R_i$，就有

$$|\{t\mid (t,s)\in R_j,(t,s')\in R_l,t\in S\}|=P_{jl}^i\,, \tag{11.5.2}$$

此数依赖于 i,j 和 l，而不依赖于 s 和 s' 的具体选择；

那么，诸关系 R_i 就叫做基集 S 上的一个具有 m 个结合类的结合方案. 诸数

$$v,n_i,p_{jl}^i\,(1\leqslant i,j,l\leqslant m) \tag{11.5.3}$$

叫做该结合方案的参数.

定义 11.5.2.　设已给基集 S 上具有参数(11.5.3)的一个结合方案诸 $R_i\,(1\leqslant i\leqslant m)$，$\mathscr{B}=(B_1,B_2,\cdots,B_b)$ 是 S 上的一个区组设计，且满足条件：

(1) $|B_i|=k(1\leqslant i\leqslant b)$；

(2)对任一 $s\in S$，都有

$$|\{B_i\mid B_i\ni s,\ 1\leqslant i\leqslant b\}|=r,$$

此数不依赖于 s 的具体选择；

(3)对 S 中任二相异元 s 和 s'，只要 $(s,s')\in R_i$，就有

$$|\{B_j \mid B_j \supseteq \{s,s'\},\ 1\leqslant j\leqslant b\}| = \lambda_i (1\leqslant i\leqslant m),$$

此数依赖于 i，而不依赖于 s 和 s' 的具体选择；

那么就称 $\mathscr{B}$ 是基集 S 上的一个具有 m 个结合类的 PBIB 设计，简记为 PBIB$(B_1,B_2,\cdots,B_b)$. 诸数

$$b,\ v,\ r,\ k,\ \lambda_i,\ n_i,\ p_{jl}^i\ (1\leqslant i, j,\ l\leqslant m) \tag{11.5.4}$$

叫做该 PBIB 设计的参数.

由第二十章的一个结果(引理 20.1.4)的系，上面定义中的条件(2)可以删去.

由定义 11.5.2, $m=1$ 的 PBIB 设计就是 BIB 设计. 当 $m>1$ 时，对一个 PBIB 设计，尽管诸区组的容量都相同，诸元在诸区组中出现的次数也都一样，但是对不同的结合类中的元素对，它们同时出现在其中的区组的个数却可以不同. 这就是“部分平衡”一词的由来. 放宽这一条件的原因是，在试验设计中，有时 PBIB 设计就已经很合用，毋须 BIB 设计.

$m=2$ 时的一类重要的 PBIB 设计是可分组设计.

定义 11.5.3. 设 $\mathscr{B}=\{B_1,B_2,\cdots,B_b\}$ 是基集 S 上的一个区组设计. 如果 S 有分解式

$$S = S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_l,$$

$$|S_1| = |S_2| = \cdots = |S_l|,$$

$\mathscr{B}$ 中各区组的容量又相等

$$|B_1| = |B_2| = \cdots = |B_b|,$$

且任一对 S_i 中的不同元$(1\leqslant i\leqslant l)$恰在 λ_1 个区组中同时出现，而任一对 s,s' $(s\in S_i$，$s'\in S_j$，$1\leqslant i\neq j\leqslant l)$恰在 λ_2 个区组中同时出现，则称这样的设计为一个可分组区组设计，简称为可分组设计.

可分组设计是 PBIB 设计这一事实的证明将在 20.2 中给出.

PBIB 设计的概念最早是由 Bose 和 Nair [1] 于 1939 年提出的. 在他们的定义中，要求诸 λ_i 彼此不同. 后来，Nair 和 Rao [1] 删去了这一条件.

第二十章将对 PBIB 设计作进一步的讨论.

11.6 t 设计和按对平衡设计

平衡不完全区组设计另外两种重要的拓广是 t 设计和按对平衡设计. 在平衡不完全区组设计中，如果不要求每个元素在诸区组中出现的次数相同，那么，当把条件“对 S 的任一个二元子集，包含该二元子集的 $\mathscr{B}$ 中区组的个数是一个不依赖该二元子集的常数”换为“对 S 的任一个 t 元子集，包含该 t 元子集的 $\mathscr{B}$ 中区组的个数是一个不依赖于该 t 元子集的具体选择的常数”，就得到 t 设计的概念；当把条件“$|B_j|(1\leqslant j\leqslant b)$是一个不依赖于 j 的常数”删去时，就得到按对平衡区组设计的概念. 更确切地说，有

定义 11.6.1. 假设 $\mathscr{B}=\{B_1, B_2,\cdots, B_b\}$是一个 v 元集 S 上的区组设计. 如果 $\mathscr{B}$ 满足下述条件：

(1) $|B_j|=k(1\leqslant j\leqslant b)$；

(2)对一固定的正整数 t 和 S 的任一个 t 元子集($t\geqslant 1$)，包含该子集的 $\mathscr{B}$ 中子集的个数都是同一常数 λ_t；

则称 $\mathscr{B}$ 是集 S 上的一个 t-(v, k, λ_t)设计，简称为 t 设计.

t 设计有下面的重要性质.

定理 11.6.1. 设 $\mathscr{B}$ 是集 S 上的一个 t-(b, v, k, λ_t)设计且 u 是$[1,t]$中的任一整数，则对 S 的任一 u 元子集，包含该子集的 $\mathscr{B}$ 中区组的个数是同一个常数 λ_u：

$$\lambda_u=\frac{(v-u)_{t-u}}{(k-u)_{t-u}}\lambda_t, \tag{11.6.1}$$

它依赖于 u 而不依赖于该 u 元子集的具体选择.

证明. 首先考虑 $u=t-1$ 的情形. 设 S' 是 S 的任一固定的 $t-1$ 元子集. 考虑

$$\mathscr{E}=\{(S'', B_i)\mid S''\supset S', \ |S''|=t, \ B_i\supseteq S''\}.$$

今用两种方法计算$|\mathscr{C}|$. 一方面，合“$S''\supset S'$，$|S''|=t$”的 S'' 的个数是$(v-(t-1))=v-t+1$；这是因为，S'' 是由 S' 添加 $S\setminus S'$ 中的 $v-(t-1)$个元的一个而得到的. 对每一个这样的 S''，因$|S''|=t$，故包含它的 $\mathscr{B}$ 中区组的个数都是 λ_t. 因此

$$|\mathscr{C}|=(v-t+1)\lambda_t. \tag{11.6.2}$$

另一方面，设 B 是一个包含 S' 的区组，则 B 包含了$(k-(t-1))=k-t+1$ 个合“$S''\supset S'$，$|S''|=t$”的子集 S''，这是因为把 $B\setminus S'$ 中的每一个元添在 S' 上就可以得到一个合条件的 S''. 记包含 S' 的 $\mathscr{B}$ 中区组的个数为 $\lambda(S')$，那么

$$\left|\mathscr{L}\right| = (k-t+1)\,\lambda(S'). \tag{11.6.3}$$

比较(11.6.2)和(11.6.3)即得

$$\lambda(S') = \frac{v-t+1}{k-t+1}\lambda_t. \tag{11.6.4}$$

这个数依赖于$\left|S'\right| = t-1$，而不依赖于S'的具体选择，因此，可记为$\lambda(S')=\lambda_{t-1}$.

重复上面的推理或用数学归纳法即可证得(11.6.1). **证毕.**

在定理中取 $u=1$ 便有

系 1. 设$\mathscr{B}$是集 S 上的一个 t-(v，k，λ_t)设计，则 S 中任一元在$\mathscr{B}$的诸区组中出现的次数都是同一个数λ_1：

$$\lambda_1 = \frac{(v-1)_{t-1}}{(k-1)_{t-1}}\lambda_t.$$

这就是说，虽然在 t 设计的定义中不要求基集 S 中的每一元在$\mathscr{B}$的诸区组中出现的次数都相同，然而 t 设计确具有此性质.

系 2. 如果$1 \leqslant s \leqslant t$，则任一 t 设计都是一个 s 设计.

由系 1 和(b，v，r，k，λ)设计的定义，有

定理 11.6.2. 一个 2-(v，k，λ)设计就是一个(b，v，r，k，λ)设计，其中 b 是一个适当的正整数，$r = \dfrac{\lambda(v-1)}{k-1}$.

系. 设$\mathscr{B}=\{B_1，B_2,\cdots，B_b\}$ 是 v 元集 S 上的一个区组设计. 如果$\mathscr{B}$满足定义 11.3.1 中的条件(1)和(3)，则条件(2)一定满足，因而$\mathscr{B}$是一个平衡不完全区组设计. 再者，如果条件(1)和(3)中的常数分别为 k 和 λ，则(2)中的常数为$\dfrac{\lambda(v-1)}{k-1}$.

一个 t-(v，k，λ)设计叫做单的，如果它没有重复的区组；叫做平凡的，如果基集 S 的每一 k 子集都出现同样的次数. Wilson[4]以及 Graver 和 Jurkat[1]于 1973 年证明了对所有 t,都存在非平凡的 t 设计,但是不能断定这些 t-设计是单的. 反之，人们猜想，对$t \geqslant 6$，不存在非平凡的、单的 t 设计. 这一猜想是否为真的问题就是“t 设计的存在问题”. 不久前，Magliveras 和 Leavitt[1]给出了六个两两不同构的、非平凡的、单的 6-(33，8，36)设计. 而且，他们还对 $v=33$ 构造出了多于 500 000 个新的非平凡的、单的 5 设计. L.Teirlink[1]在 一篇尚未发表的论文“Non-trivial t-designs withour repeated blocks exist for all t”中，对所有 t 都构造出了非平凡的、单的 t 设计. 这就解决了一直悬而未决的 t 设计的存在问题.

关于 t 设计的其他一些结果可以参看 Wilson[9, 10] Kageyama 和 Hedayat[1,

2]等.

下面转而讨论按对平衡设计.

定义 11.6.2. 设 $\mathscr{B}=\{B_1, B_2, \cdots, B_b\}$是 v 元集 S 上的一个区组设计，且 $K=\{k_1, k_2, \cdots, k_m\}$. 如果 $\mathscr{B}$ 满足条件：

(1) $|B_j| \in K (1 \leqslant j \leqslant b)$；

(2)对 S 的任一个二元子集，包含该子集的 $\mathscr{B}$ 中区组的个数是一个不依赖于该二元子集的具体选择的常数；

则称 $\mathscr{B}$ 是集 S 上的一个按对平衡设计. 如果(2)中的常数是 λ，则把这样的按对平衡设计记为：

$$\mathrm{PBD}(K; \lambda; v)$$

或

$$\mathrm{PBD}(\{k_1, k_2, \cdots, k_m\}; \lambda; v).$$

这里 PBD 是“pairwise balanced design”的缩写. 当 $K=\{k\}$ 时，简记为 PBD(k; λ; v).

这个概念很容易推广到 K 包含无限多个正整数的情形.

在第十八章中将看到，按对平衡设计在正交拉丁方的理论发展中起着重要的作用；在第十九章中还将看到它对三连系和可分解的(b, v, r, k, λ)设计的存在性问题的研究有着重要的意义.

11.7　其他设计简介

由于实际应用和理论发展的需要，除了以上几节所述的设计类型外，还有很多有价值和有意义的设计，下面粗略介绍其中一些. 它们是：Youden 设计，Room 设计，称重设计，幻方，以及覆盖和填充等.

首先介绍 Youden[1] 于 1937 年引入的一个设计.

定义 11.7.1. 设 Y 是集[1, v]上的一个 $k\times v$ 矩阵，其每一行都是[1, v]的一个全排列，且每一列中无二元相同. 把第 i 列的 k 个元组成的 k-子集记为 $B_i (1 \leqslant i \leqslant v)$. 如果 $\mathscr{B}:=\{B_1, B_2, \cdots, B_v\}$ 是[1,v]上的一个(v, k, λ)对称设计，则称 Y 是一个(v, k, λ)-Youden 矩阵，又称为(v, k, λ)-Youden 设计.

自然在定义 11.7.1 中，可以把[1, v]换为任一 v 元集.

例如，当(v, k, λ)=(7, 3, 1)时，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

就是一个(7，3，1)-Youden 矩阵.

关于 Youden 设计的存在性和构造方法，有

定理 11.7.1.　若存在(v, k, λ)对称设计，则存在(v, k, λ)-Youden 设计. 从一个(v, k, λ)对称设计来构造一个(v, k, λ)-Youden 设计的方法在下面的证明中给出.

证明.　设$\mathscr{B}=\{B_1, B_2, \cdots, B_v\}$是一个$[1, v]$上的$(v, k, \lambda)$对称设计，且$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_h \leqslant v$，对每一$s \in [1, v]$，它最多在$B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_h}$的 k 个中出现，而$\sum_{j=1}^{h} | B_{ij} | = kh$，故$\bigcup_{j=1}^{h} B_{ij}$至少含有$\frac{kh}{k} = h$个相异元. 由定理 5.1.1，集系$\mathscr{B}$存在相异代表组.设$y_{11}, y_{12}, \cdots, y_{1v}$是$B_1, B_2, \cdots, B_v$的一个相异代表组， 因而$y_{11}, y_{12}, \cdots, y_{1v}$是$[1, v]$的一个全排列，故可把它取作 Y 的第一行. 记$B_i' = B_i \setminus \{y_{1i}\} (1 \leqslant i \leqslant v)$. 今考虑$\mathscr{B}' = \{B_1', B_2', \cdots, B_v'\}$. 因$| B_i' | = k-1$，而$[1,v]$的任一元 s 最多在$B_1', \cdots, B_v'$的 $k1$ 个中出现，故$\bigcup_{j=1}^{h} B_{ij}'$至少含有$\frac{(k-1)h}{k-1} = h$个相异元. 因此，集系$\mathscr{B}'$存在相异代表组，设$y_{21}, y_{22}, \cdots, y_{2v}$是$B_1', B_2', \cdots, B_v'$的相异代表组，把它取作 Y 的第二行. 类似地重复进行下去，最后可得一个 Youden 矩阵. **证毕.**

事实上，上面的证明过程提供了更多的信息，即有

定理 11.7.2.　从一个(v, k, λ)对称设计至少可以构造出$\prod_{i=1}^{k} (i!)$个不同的(v, k, λ)-Youden 设计.

证明.　由定理 5.1.2 知，在定理 11.7.1 的证明过程中出现的$y_{11}, y_{12}, \cdots, y_{1v}$有

$$\prod_{i=0}^{n-1} (k-i)_* = \prod_{i=0}^{k-1} (k-i) = k!$$

个选取方法来得到它，而$y_{21}, y_{22}, \cdots, y_{2v}$有

$$\prod_{i=0}^{n-1} ((k-1)-i)_* = (k-1)!$$

个方法来得到它，如此等等，故有定理的结论.**证毕.**

关于 Youden 设计，就介绍到这里，对此有兴趣的读者，请参看 Youden[1]，Smith 和 Hartley[1]，以及 Raghavarao[1-3].

现在来介绍 Room[1]设计.

设 $\mathscr{R}$ 是由集[0，$2v$ -1]的全部二元子集以及空集 $\varnothing$ 所组成的簇. 设 R 是 $\mathscr{R}$ 上的一个($2v$ -1)阶矩阵

$$R=(R_{ij}) \qquad (1\leqslant i, \quad j\leqslant 2v-1). \tag{11.7.1}$$

定义 11.7.2. 如果(11.7.1)中的 R 满足条件：

(1) $\mathscr{R}\setminus\{\varnothing\}$的每一元恰在 R 中出现一次；

(2)[0，$2v-1$]中的每一元都在 R 的每一行的诸子集中恰好出现一次，也都在 R 的每一列的诸子集中恰好出现一次，则称 R 是一个 $2v-1$ 阶 Room 方，或称 R 是一个 $2v$ 阶 Room 设计.

Room 方这一课题最早由 E.C.Howell 于 1897 年从桥牌比赛的角度提出加以研究(参见 Denes 和 Keedwell[1]). Room 不知这一情形，于 1955 年重新提出这一课题. 此后，Archbold 和 Johson[1]，K.R.Shah[1]找到了它在统计学中的应用，Bruck[2] 和 Lindner[1]研究了它同拟群的联系，O'Shaughnessy[1]给出了它同 Steiner 三连系的关联，Nemeth[1]，W.D.Wallis[2]等讨论了它同图的因子分解之间的有关问题.

自然，在关于 Room 方的研究中，它的存在性和构造方法有着重要的地位和作用. 有许多作者在这方面做了很多工作(可参看 Denes 和 Keedwell[1]，W.D.Wallis, A.P.Street 和 J.S.Wallis[1], Mullin 和 Stanton[1-3], W.D.Wallis[3]).

关于存在性问题，有以下重要结果.

定理 11.7.3. 存在 $2v$ -1 阶 Room 方的充要条件是

$$2v-1\neq 3，5，257.$$

这一结果经过许多作者的努力才得到(参看上面所引的文献)，最后一步是由 W.D.Wallis[3]完成的.

下面介绍称重设计.

Yates[1]于 1935 年注意到，在称若干件物体的重量时，为提高所称得的物体的重量的精确度，不要一件件物体单独地去称，而是一组物体称一次，称适当次数后再求解各物体的重量. 例如，当要在一架已调好的天平上称五件物体的重量时，可以把其中任四件在一起称，于是可得