

地球物理学中的高阶 统计量方法

王书明 朱培民 李宏伟 王家映 著

国家自然科学基金(40274039,60472062)

中国地质大学(武汉)学术著作出版基金 资助

中国地质大学(武汉)“211工程”建设

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书简要回顾了现代信号处理和高阶统计量信号分析的基本理论和方法,同时论述了高阶统计量基础理论研究方面的一些最新进展,包括广义高斯信号分析、信号检测等。本书重点阐述了高阶统计量在大地电磁测深、地震勘探和工程勘查等地球物理领域的研究和应用情况。本书可作为地球物理学、信号分析等专业的大学教师、研究生和高年级大学生的教学参考书,同时对从事实际资料分析、信号处理理论与应用研究的地球物理科技工作者具有参考和使用价值。

图书在版编目(CIP)数据

地球物理学中的高阶统计量方法/王书明等著. —北京:科学出版社, 2006

ISBN 7-03-015888-1

I. 地… II. 王… III. 高阶-统计量-应用-地球物理学 IV. P3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 077025 号

责任编辑:李 锋 罗 吉/责任校对:刘小梅

责任印制:钱玉芬/封面设计:王 浩

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006年3月第一版 开本: B5(720×1000)

2006年3月第一次印刷 印张: 12

印数: 1—2 500 字数: 224 000

定价: 25.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(科印))

序

近二十年来,我国经济建设快速发展,国家对油气、固体矿产、地下水资源、灾害环境调查与防治的需求日渐增长。培养与造就一批又一批具有扎实专业基础和创新意识,能够从事油气、固体矿产、环境与工程地球物理勘探的优秀人才十分重要。中国地质大学(武汉)作为教育部首批进入“211”建设的重点大学,地球物理学曾是国内创办的第一个地球物理学专业,培养过新中国第一代地球物理专业的工程师。在知识经济时代的今天,该如何把最新最好的知识传授给学生?又该如何培养学生的创新意识和能力呢?

1997年以来,地球物理与空间信息学院的教师们开展了地球物理系列课程建设的研究,编写了以方法原理、数据采集、反演与综合解释为主线的新系列教材。新的纵向系列教材把重、磁、电、震、测五门主干课程中带有基础和共性的内容有机结合在一起,避免了不必要的重复,加强基础、综合和交叉,提高了学生的学习效率,拓宽了学生的知识面,使学生能系统地掌握地球物理的专业基础知识,具有一定的综合解决实际问题的能力。纵向系列课程经八年的教学实践,已经全部正式出版,在本科的教学中发挥了重要作用。

为了进一步拓展学生的知识面,培养学生的创新意识和创新能力,地球物理与空间信息学院的教师又组织编写了这套专著性质的教学参考书,旨在把地球物理学的各个领域(固体地球物理、能源地球物理、固体矿产地球物理、环境与工程地球物理)中的新原理、新方法、新技术、新应用和自己的科研成果及时介绍给学生。这套“地球物理系列丛书”目前已完成了三本:

地球物理学中的高阶统计量方法(王书明、朱培民、李宏伟、王家映)

位场勘探数据处理新方法(刘天佑)

探地雷达理论与实践(邓世坤)

今后还将陆续编写浅层地震勘探、工程电法勘探等方面的内容。

高阶统计量方法是现代数字信号处理领域中十分活跃的一个研究方向,该方法与以前基于二阶统计量的相关方法比较具有更大的优越性,可以解决信号相位估计问题,且能够抑制高斯噪声。该方法在信号与图像处理及地球物理领域中得到了广泛应用。书中介绍了现代信号处理的基本理论和方法,重点阐述了高阶统计量的概念、理论和方法,以及它们在大地球电磁测深、地震以及工程物探中的应用。

位场勘探即重、磁勘探,它们是两种古老的、应用十分广泛的地球物理方法,近二十年来位场勘探仪器精度提高了1~2个数量级,使得这两种地球物理方法不仅在解决传统地质问题,如基础地质、油气勘探、固体矿产勘探中发挥更大作用,而且拓宽了它的应用领域,如灾害、考古等工程环境勘查问题。位场勘探数据处理方法也有了长足的发展,如非线性科学的数学方法(小波分析、分形几何、人工神经网络、模拟退火、遗传算法反演等)、现代信号处理方法、联合反演与3D可视化技术都在位场数据处理中得到了广泛的应用,提高了位场勘探方法的应用效果。

探地雷达是指用于探测地球浅表介质层或人工构筑体内部结构及其特征的一类高频电磁方法。目前,探地雷达在硬件设计、数据采集及数据处理技术等方面得到不断改进并日趋完善。用于地球环境、资源及工程探测的雷达系统,如卫星遥感雷达、机载雷达以及安装在车辆上用于高速扫描测量的雷达系统都已得到开发和运用。探地雷达技术的应用范围十分广泛,而且仍在不断拓展。探地雷达剖面的数值模拟(包括探地雷达天线辐射特征的模拟)以及探地雷达剖面数据处理的研究也取得了重大进展。对探地雷达资料的处理解释以及探地雷达剖面的数值模拟技术的研究在沿用传统的地震勘探资料处理方法与模拟技术的基础上,更加注重结合探地雷达技术自身的特征。

地球物理系列丛书是一套专著性的教学参考书,可以作为地球物理专业大学本科生的选用教材、研究生的参考书,也可供从事地球物理工作的工程师、研究人员参考。我们真诚地希望这套地球物理系列丛书能为广大读者在学习深造、解决生产、科研实际问题中发挥作用。

中国地球物理学会荣誉理事长

李学忠
2005年12月12日

前 言

信号分析与处理已经有了很长一段历史,并已形成应用广泛的一套基本理论和基本方法。随着社会的进步,新问题、新技术和新机遇不断涌现,信号分析与处理也一直在不断地演变和发展着。现代信号分析与处理的一个显著特征是对非高斯、非线性、非最小相位、非平稳以及有色噪声的研究。

在以往的地球物理资料处理中,习惯于假设信号(或噪声)服从高斯分布,从而仅用二阶统计量便可提取信息,进行参数辨识以及各种处理。但是,高斯分布只是许多分布类型中的一种。对非线性系统而言,即使输入高斯信号,其输出也是非高斯信号,因此,非高斯信号是更普遍的信号。除此之外,在地球物理勘探领域,所处理的信号往往不但是非高斯的,而且是非最小相位的,甚至是非线性的,测量噪声也往往是有色的。因此,在实际工作中,我们常常面临的问题是如何处理非高斯、非最小相位、非因果、非平稳信号。利用高阶统计量便是解决这些问题的主要手段之一。与传统的二阶统计量相比,高阶统计量具有如下显著优点:可以辨识非因果、非最小相位、非线性系统;可以抑制高斯或非高斯的有色噪声;可以抽取不同于高斯信号的多种信号特征;可以分析与处理循环平稳信号,等等。因此,高阶统计量的发展与应用是近年来信号处理领域一个十分重要的发展。

早在 20 世纪 60 年代初,人们就已从数学上研究高阶统计量,并用于解决工程上的一些特殊问题。但直到 80 年代后期,这一方面的研究才真正得到迅速发展与应用,其应用范围已涉及通信、地球物理、生物医学、故障诊断、声纳等多个领域。国内把高阶统计量应用于重、磁、电、震等实际地球物理资料处理的文章还不多见。因此,普及和发展高阶统计量的理论及方法,并将其应用于实际工作,已成为地球物理领域的一个急迫而重要的问题。为了使更多的地球物理领域的科技工作者、研究生和高年级学生学习、使用和掌握高阶统计量方法,了解该方法在地球物理领域的应用和研究进展,推动这种新方法的进一步研究和应用,我们撰写了本书。

本书介绍了现代信号处理的基本理论和方法,重点阐述了高阶统计量的概念、理论和方法,以及它们在大地电磁测深、地震以及工程物探中的应用研究情况。其中,比较系统地介绍了作者近年来所做的高阶统计量的理论和应用研究方面的成果,这些成果大部分发表在国内外刊物上,还有一部分是尚未来得及发

表的最新研究成果。

全书共分 5 章。第一章是绪论,介绍了信号分析与处理的发展历史及其在地球物理领域的应用情况;第二章是全书的基础,论述了随机信号以及现代谱估计的基本内容;第三章论述了高阶累积量及其谱的定义、性质和估计;第四章阐述了高阶统计量在大地电磁测深中的应用研究情况,重点论述了大地电磁信号的统计特征分析和利用恢复的功率谱抑制有色高斯噪声的研究成果;第五章论述了高阶统计量在地震和工程物探中的应用研究情况,重点讨论了地震信号的统计特征、时频域分析方法以及在地震和工程勘探中的具体应用。

中国地震局监测预报中心副总工程师赵家骝研究员对本书所用的大地电磁实际资料的具体来源给予了热情的关心和支持,中国地震局地质与地球物理研究所赵国泽研究员、邓前辉研究员、汤吉副研究员、中国石油集团公司浙江石油勘探处镇国钧高级工程师、黄哲高级工程师、兰州地震研究所赵和云研究员提供了本书所用的大地电磁时间序列实际资料。作者在此谨向他们致以衷心的感谢。另外还要诚挚感谢中国地质大学刘天佑教授为本书的出版所做的大量工作。

作者在本书中的研究工作得到了国家自然科学基金(40274039)、(60472062)资助。特别感谢中国地质大学(武汉)学术著作出版基金,及中国地质大学(武汉)“211 工程”建设对本书的出版资助。

目 录

序

前言

第一章 绪论	1
第二章 现代信号处理基础	6
2.1 随机信号	6
2.1.1 信号分类	6
2.1.2 随机过程的统计描述	7
2.1.3 平稳随机过程	12
2.1.4 功率谱和周期图	14
2.2 现代谱估计	16
2.2.1 谱估计的参数模型方法	16
2.2.2 AR模型的稳定性及其阶的确定	18
2.2.3 AR模型的 Yule-Walker 方程	19
2.2.4 ARMA 模型谱估计及 AR 参数辨识	20
2.2.5 ARMA 模型参数辨识	31
2.3 关于广义高斯信号分析的几种新方法	35
2.3.1 广义高斯分布的参数估计及其性质	35
2.3.2 广义高斯信号和的分布特征	40
2.3.3 一种产生广义高斯分布随机数的新算法	45
参考文献	51
第三章 高阶统计量方法	54
3.1 引言	54
3.2 三阶相关和双谱的定义及其性质	55
3.3 累积量和多谱的定义及其性质	57
3.3.1 随机变量的累积量	57
3.3.2 随机过程的累积量	59
3.3.3 多谱的定义	60
3.3.4 累积量和多谱的性质	61
3.4 累积量和多谱估计	65
3.5 基于高阶谱的系统辨识	66
3.5.1 BBR 公式	66

3.5.2	FIR 系统辨识	68
3.5.3	因果 ARMA 模型的 AR 参数辨识	71
3.5.4	因果 ARMA 模型的 MA 参数辨识	72
3.6	信号检测新进展	74
3.6.1	基于高阶统计量的对称分布信号检测	75
3.6.2	噪声中循环平稳信号的检测	81
	参考文献	87
第四章	高阶统计量在 MT 中的应用研究	89
4.1	研究的目的及意义	89
4.2	大地电磁测深资料处理的功率谱方法	90
4.3	大地电磁信号统计特征分析	92
4.3.1	MT 时间序列的高阶统计量估计	92
4.3.2	MT 时间序列的高斯性检验	95
4.3.3	MT 时间序列的非线性检验	99
4.3.4	MT 时间序列的最小相位性分析	100
4.4	大地电磁资料处理的高阶统计量方法	105
4.4.1	构造两个系统比较功率谱和高阶谱	105
4.4.2	MT 时间序列模型的识别方法	110
4.4.3	由 MT 信号的高阶统计量确定模型参数	110
4.4.4	由高阶统计量重构功率谱	113
4.4.5	理论模型试验及实际资料处理	114
4.4.6	分析与讨论	118
	参考文献	118
第五章	高阶统计量在地震和工程勘探中的应用研究	120
5.1	研究背景、目的和意义	120
5.2	高阶统计量分析在地震中应用的历史回顾	121
5.3	地震信号的特点和高阶统计量特征	123
5.3.1	地震时间序列的高阶统计量估算	123
5.3.2	地震时间序列的广义高斯性	128
5.3.3	地震异常信号的检测	137
5.4	地震信号的时间域分析方法	140
5.5	地震信号的时频分析方法	144
5.5.1	双谱和三谱时频分析的方法	144
5.5.2	互双谱和互三谱时频分析的方法	145
5.5.3	Wigner 双谱和三谱时频分析方法	146

5.6 时频分析的数值试验	150
5.6.1 合成地震信号的双谱时频分布	150
5.6.2 实际地震信号的双谱时频分布	155
5.6.3 非均匀地质体模型地震信号的 Wigner 双谱时频分析	156
5.7 高阶统计量在实际资料上的应用	160
5.7.1 在塔里木盆地某地区的地震资料上的应用	160
5.7.2 声波和探地雷达信号的高阶统计量分析	166
参考文献	177
中英文名词对照表	179

第一章 绪 论

信号是随时间变化的某种物理量,可以表示成关于时间的函数。在科学研究和工程技术等领域中,经常需要对信号进行处理。所谓信号处理,就是采用某种计算方法并按预定的规则对信号进行运算。有时为了便于运算和应用,可对其进行必要的变换。

信号可以分为模拟信号和数字信号。模拟信号是指在时间上和幅度上都是连续的信号,数字信号是指在时间上是离散的、在幅度上也是离散的信号,数字信号可以用时间序列来表示。在 20 世纪 60 年代以前,对信号的处理,大多都是用模拟方法实现的,60 年代后,数字信号处理方法得到了较快的发展。原因有四:①数字信号处理技术具有显著的优越性,如抗干扰能力强(高稳定性)、系统调试方便(高灵活性),随着电子计算机技术的飞速发展,数字信号处理的速度不断提高(高速性);②在经济上比较合理,扩大了用数字方法处理信号的领域;③数字信号处理的理论和技术不断地发展和更新,使模拟信号用数字方法处理变得十分方便;④可以进行物理不可实现的信号处理。

虽然在很多情况下需要处理的信号本身就是序列,但是大多数的应用还是要涉及用离散时间技术来处理连续时间信号。在这种情况下,先要把一个连续时间信号转换成一个样本序列,即一个离散时间信号。经过离散时间处理后,再把输出序列转换成连续时间信号。对于这样一些系统来说,人们常常希望它们能实时工作,这就意味着离散时间系统要以对连续时间信号采样的同一速率来完成输出样本的计算。连续时间信号的离散时间处理广泛应用于通信系统、雷达、语音和视频编码、地球物理、生物医学工程等领域。

大多数传统信号处理都涉及处理一个信号而得到另一个信号。因此,另一类重要的信号处理问题就是信号解释。在这类问题中,处理的目的是为了得到一个输出信号,而是要得到该输入信号的某一特征。例如,在语言识别和理解系统中,其目的是为了了解释输入信号,或者从输入信号中提取信息(信号的识别和转换)。

信号处理问题自然不仅限于一维信号。虽然在理论上一维和多维信号处理之间存在着一些基本的差别,但是很多情况下二者之间有着直接的对应关系。在石油勘探、地震监测和核试验监测等地震数据分析中,都要用到多维信

号处理技术。

基于离散傅里叶变换和信号建模的谱分析又是信号处理另一个丰富而重要的内容。谱分析最早可以追溯到古代对时间的研究,那时人们已经观察到某些事物的运动具有周期性,如昼夜更替、四季更迭、月亮的阴晴圆缺等。18世纪,Bernoulli、Euler 和 Lagrange 等人对波动方程及其正弦解进行了研究。19世纪初叶,Fourier(傅里叶)证明了在有限时间段上定义的任何函数都可以用正弦和余弦的无限谐波的总和来表示。以傅里叶分析为基础,1898年 Schuster 提出用周期图的概念研究太阳黑子数的周期变化。1936年 Wiener 发表了经典性论文《广义谐波分析》,对平稳随机过程的自相关函数和功率密度谱作了精确的定义,证明了二者之间存在着傅里叶变换的关系,从而为谱分析奠定了坚实的统计学基础。可以认为,这一年是谱分析发展历史中的重要转折点。1965年 Cooley 和 Tukey 完成了著名的快速傅里叶变换(FFT)算法,把计算傅里叶变换的时间缩短了两个数量级,从而使离散傅里叶变换走向工程实用,同时也使周期图谱估计方法很快流行起来。周期图和自相关法以及它们的改进方法称为谱估计的经典方法。

然而,不管数据记录有多长,周期图和自相关法得到的估计都不是功率谱的良好估计。事实上,随着记录长度的增加,这两种估计的随机起伏反而会更加严重,它们还存在着以下两个难以克服的固有缺点:①频率分辨率(区分两个邻近频率分量的能力)不高。这是因为它们的频率分辨率反比于数据记录长度,而实际应用中一般不可能获得很长的数据记录;②经典谱估计方法在工程中都是以离散傅里叶变换(DFT)为基础的,它隐含着对无限长数据序列进行加窗处理(加了一个有限宽的矩形窗)。矩形窗的频谱主瓣不是无限窄的,且有旁瓣存在,这将导致能量向旁瓣中泄漏,主瓣变得模糊不清。严重时,还会使主瓣产生很大失真,甚至主瓣中的弱分量被旁瓣中的强泄漏所掩盖。为了克服以上缺点,人们曾做过长期努力,提出了平均、平滑等办法,在一定程度上改善了经典谱估计的性能。实践证明,对于长数据记录,以傅里叶变换为基础的经典谱估计方法,的确是比较实用的。但是,经典方法始终无法根本解决频率分辨率和谱估计稳定性之间的矛盾,特别是在数据记录很短的情况下,这一矛盾显得尤为突出。这就促进了现代谱估计方法研究的开展。

谱估计的现代方法主要是以随机过程的参数模型为基础的,因此,也可以将其称为参数模型方法,或简称模型方法或参数方法,而相应地把经典方法称为非参数方法。参数模型的引入,意味着额外地利用了“随机过程是如何产生的”有关信息,并从根本上摒弃了“加窗效应”,因而谱估计现代方法的性能比经典方法要好得多,特别是对短数据记录的情况。实际上,时间序列模型在非

工程领域早已被采用。例如, Yule 在 1927 年、Walker 在 1931 年都曾使用过自回归模型预测描述经济的时间序列的发展趋势, 而 Prony 则早在 1795 年就曾采用指数模型去拟合在气体化学实验中获得的数据。在统计学和数值分析领域中, 历史上人们也曾采用过模型方法。因此, 现代谱估计与以上所述的非工程领域中曾采用过的时间序列模型有着历史渊源。

现代谱估计技术的研究和应用主要起始于 20 世纪 60 年代。1967 年 Burg 在地震学研究中受到线性预测滤波的启发, 提出了最大熵谱估计方法; 1968 年 Parzen 正式提出了自回归谱估计方法; 1971 年 Van der Bos 证明了一维最大熵谱估计与自回归谱估计等效; 1972 年出现的谱估计的 Prony 方法在数学上与自回归方法有某些类似; 目前以自回归平均模型为基础的谱估计已经比自回归模型谱估计具有更高的频率分辨率和更好的性能。1973 年 Pisarenko 提出的谐波分解方法提供了可靠的频率估计方法, 实际上它是以自回归平均模型为基础的谱估计特例。1981 年 Schmidt 提出了谱估计的多信号分类算法, 它对于正弦信号频率的估计很有效。目前, 现代谱估计研究仍侧重于一维谱分析, 其他如多维谱估计、多通道谱估计、高阶谱估计等的研究正在兴起, 特别是对双谱和三谱的研究受到了更高的重视, 人们希望这些新方法能更多地在提取信息、估计相位和描述非线性等方面获得应用。

根据已知的有限长的随机序列来估计随机信号模型的参数, 称为模型参数估计。模型可以是 AR 模型、MA 模型和 ARMA 模型, 估计它们的参数时, 要依据一定的准则, 通常比较多地采用最小均方误差准则。基于自相关函数的模型参数估计存在着以下几个问题: ①估计非高斯信号的模型参数时, 不能充分获取隐含在数据中的信息; ②若信号不仅是非高斯的而且还是非最小相位的, 所得到的模型参数反映不出原信号的非最小相位特点; ③当测量噪声较大, 尤其当测量噪声是有色噪声时, 所得到的模型参数有较大的估计误差。

基于高阶谱的模型参数估计方法能够有效地解决上述三个问题。在信号处理领域, 习惯于假设信号(或噪声)服从高斯分布, 从而仅用二阶统计量便可提取信息, 进行参数辨识以及各种处理。然而, 高斯分布只是许多分布类型中的一种。对非线性系统而言, 即使输入的是高斯信号, 其输出也是非高斯信号, 因此, 非高斯信号是更普遍的信号。在很多实际应用中, 如地球物理勘探等, 信号模型中的激励信号 $u(n)$ 往往是非高斯的, 系统 $H(z)$ 不是最小相位的, 甚至是非线性的, 测量噪声 $v(n)$ 也往往不是白色的。因此, 在实际工作中, 我们常常面临大量非高斯、非最小相位、非因果、非平稳信号的处理问题, 利用高阶统计量便是解决这些问题的主要手段。高阶统计量给我们提供了前所未有的十分丰富的信息, 使我们可以辨识非因果、非最小相位、非线性系统;

可以抑制高斯或非高斯的有色噪声;可以抽取不同于高斯信号的多种信号特征;可以分析与处理循环平稳信号等等,从而给信号处理领域开辟了一个崭新的宽阔前景。因此,高阶统计量的发展与应用是近年来信号处理领域一个十分重要的发展,是现代信号处理的核心内容之一。

早在 20 世纪 60 年代初,人们就已从数学上研究高阶谱,并用于解决工程上的一些特殊问题,但高阶谱的计算量相当大,实现起来困难很大。80 年代初,随着信号检测、估计和识别研究的发展,以及计算机技术的成熟,人们又重新开始重视高阶谱的研究。直到 80 年代后期,这一方面的研究才真正得到迅速发展与应用,其应用范围已涉及通信、地球物理、生物医学、故障诊断、声纳等多个领域。在国内,起步较晚(80 年代中后期),但也取得了一些进展,主要应用于通信领域。国内把高阶统计量应用于实际地球物理资料处理的文章还不多见。因此,普及高阶统计量的理论及方法,进一步发展这一理论与方法,并将其应用到地球物理领域,已成为信号处理领域的一个急迫问题。

在信号处理和系统理论等领域使用高阶统计量(高阶谱和高阶累积量)的主要动机与出发点可以归结为:①抑制加性有色噪声(其功率谱未知)的影响;②辨识非因果、非最小相位系统或重构非最小相位信号;③抽取由于高斯性偏离引起的各种信息;④检测和表征信号中的非线性以及辨识非线性系统;⑤检测和表征信号中的循环平稳性以及分析和处理循环平稳信号。

高阶统计量不仅可以自动抑制高斯有色噪声的影响,而且有时也能够抑制非高斯有色噪声的影响;高阶循环统计量则能够抑制任何平稳(高斯与非高斯)噪声的影响。高阶统计量之所以能够大大超越功率谱和相关函数,道理很简单:高阶统计量包含了二阶统计量没有的大量丰富信息。可以说,凡是使用功率谱或相关函数进行过分析与处理而又未得到满意结果的任何问题都值得重新试用高阶统计量方法。

在大地电磁测深法(MT)中,以往基于功率谱的各种方法,对信号和地质模型作了许多假设和要求,如假设信号为高斯信号、噪声为高斯白噪声、大地系统为最小相位的线性系统,但实际情况一般并非如此。而且由于功率谱本身内在的计算方式,抑制噪声能力弱,且在其处理过程中丢失了信号中的相位信息。因此造成 MT 资料差,解释结果不甚理想。针对大地电磁测深法(MT)中的电磁信号,本书第四章在利用该方法对 MT 信号进行统计分析、功率谱重构以及有色噪声抑制分析等方面作了一定的探索。

在地震信号处理中,人们提出了基于高阶统计量的子波估计算法,相对于基于二阶统计量的子波估计算法,这种新方法可以解决子波相位估计问题。基于高阶统计量的时延估计(即切片位置估计)算法,人们开发了新的地震初

至拾取以及同相轴追踪技术,取得的结果优于基于二阶统计量的技术所取得的结果。从理论模型的数据处理结果看,这些方法能有效提高成像的分辨率,具有较好的抗干扰能力。本书第五章论述了高阶统计量在地震及工程勘探领域的应用情况,主要论述了我们根据高阶统计量的有关理论和方法提出的双谱、互双谱高阶时频分析算法及其在由孔洞、缝隙等引起的非均匀储集体的识别中的应用情况。

第二章 现代信号处理基础

本章是全书接下来各章的理论基础。在本章中,首先介绍了随机信号的基本概念,然后论述了一些关于广义高斯信号分析的新成果,包括广义高斯分布参数估计及其性质、广义高斯信号和的分布特征以及产生广义高斯分布随机数的一种新算法,最后介绍了现代谱估计的基本理论。

2.1 随机信号

信号是信息的载体,其数值或观测值为随机变量的信号,称为随机信号。所谓随机,是指信号的取值服从某种概率规律,这一规律可以是完全已知的、部分已知的或完全未知的。

2.1.1 信号分类

在数学上,信号用一组变量值表示。若 $\{s(t)\}$ 是一个实数或复数序列,则称序列 $\{s(t)\}$ 为信号。当时间 t 定义在连续变量区间,序列 $\{s(t)\}$ 称为连续时间信号。许多人工信号和自然信号都是连续时间信号,例如雷达、声纳、无线电广播、通信、控制系统和生物学中的信号。在使用计算机进行信号处理时,连续时间的信号需要先转换成离散时间信号。若信号取值的时间 t 为整数,即 $t=0, \pm 1, \dots$ 或 $t=0, 1, \dots$ 时,则变量序列 $\{s(t)\}$ 称为离散时间序列。

如果序列 $\{s(t)\}$ 在每个时刻的取值不是随机的,而是服从某种固定函数的关系,则称之为确定性信号。如下面几种常用的确定性信号。

阶跃信号

$$U(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

符号信号

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} \quad (2.1.2)$$

矩形脉冲

$$P_a(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq a \\ 0, & |t| > a \end{cases} \quad (2.1.3)$$

谐波信号

$$s(t) = A \cos(\omega t + \theta) \quad (2.1.4)$$

与确定性信号不同,若序列 $\{s(t)\}$ 在每个时刻的取值是随机变量,则称之为随机信号。下面是一个随机信号的例子。

正弦型随机相位信号

$$X(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.1.5)$$

式中, A 和 ω_0 为常数, φ 为 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量, 其密度函数为

$$f(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2.1.6)$$

由于相位 φ 是一个连续型的随机变量, 在 $(0, 2\pi)$ 上有无穷多个取值, 其样本空间为

$$S_\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots\} \quad (2.1.7)$$

对于任意元素 $\varphi_i (i=1, 2, \dots)$ 都对应一个确定的函数式,

$$x_i(t, \varphi_i) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_i) \quad \varphi_i \in (0, 2\pi) \quad (2.1.8)$$

φ_i 不同, 对应的函数式 $x_i(t, \varphi_i)$ 亦不同, 所以随机相位信号实际上是一族不同的时间函数

$$\{x_i(t, \varphi_i) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_i), \quad i = 1, 2, \dots\} \quad (2.1.9)$$

$x_i(t, \varphi_i)$ 通常称为随机过程的样本函数。

由于 φ 是一个随机变量, 我们在观察信号 $X(t)$ 前, 并不能预知 φ 究竟取何值, 因此, 我们也不能预知 $X(t)$ 究竟取哪个样本函数, 只有观测以后才能确定, 所以这是一个随机过程。因此, 随机信号也是随机过程, 具有以下特点: ①随机信号在任何时间的取值都是不能先验确定的随机变量; ②虽然随机信号取值不能先验确定, 但是这些取值却服从某种统计规律。即随机信号或过程可以用概率分布特性(统计性能)统计地描述。

2.1.2 随机过程的统计描述

1. 随机过程的基本概念

自然界变化的过程通常可以分为确知过程和随机过程, 另外还有混沌过程。如果每次试验所得到的观测过程都相同, 且都是时间 t 的一个确知函数,

具有确定的变化规律,那么这样的过程就是确知过程。反之,如果每次试验所得到的观测过程都不相同,是时间 t 的不同函数,试验前又不能预知这次试验会出现什么结果,没有确定的变化规律,这样的过程称为随机过程。这是对随机过程的直观解释,下面我们给出严格的定义。

定义 2.1.1 设随机试验 E 的样本空间为 $S = \{e\}$, 对其每一个元素 $e_i (i=1, 2, \dots)$ 都以某种法则确定一个样本函数 $x(t, e_i)$, 由全部元素 $\{e\}$ 所确定的一族样本函数 $X(t, e)$ 称为随机过程, 简记为 $X(t)$ 。

从以上定义看,随机过程是一组样本函数的集合。对于不同的时刻 $t, t_1, \dots, t_2, \dots, t_i, \dots$, $X(t)$ 对应不同的时间变量 $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_i), \dots$, 通常 $X(t_i)$ 称为随机过程在时刻 $t=t_i$ 的状态, 可见 $X(t)$ 可以看作一族随时间变化的随机变量。

当 e 和 t 均变化时,才是随机过程完整的概念,从以上的分析可以看出,随机过程是一组样本函数的集合,或者也可以看作一组随机变量的集合。因此我们可以从另一个角度定义随机过程。

定义 2.1.2 设有一个过程 $X(t)$, 若对于每一个固定的时刻 $t_j (j=1, 2, \dots)$, $X(t_j)$ 是一个随机变量, 则称 $X(t)$ 为随机过程。

定义 2.1.2 是把随机过程看成是一组随时间变化而变化的随机变量。

上述两种定义实质上是一致的,相互起补充作用。在作实际观测时,通常采用定义 2.1.1, 据此用实验方法观测各个样本函数, 观测次数越多, 所得到的样本数目亦越多, 也就越能够掌握这个过程的统计规律; 在进行理论分析时, 通常采用定义 2.1.2, 把随机过程看作多维随机变量的推广, 时间分割越细, 维数越大, 对过程的统计描述也越全面, 并且可以把概率论中多维随机变量的理论作为随机过程分析的理论基础。

尽管随机过程的变化过程是不确定的, 但在这不确定的变化过程中仍包含有规律性的因素, 这种规律性从大量的样本经统计后呈现出来, 也就是说随机过程是存在某些统计规律的, 这些统计规律的数学描述有概率分布(密度)、数字特征等。

2. 随机过程的概率分布

根据随机过程的定义, 随机过程实际上是一组随时间变化的随机变量, 因此我们可以用多维随机变量的理论来描述随机过程的统计特征。

(1) 一维概率分布

对于某个特定的时刻 t , $X(t)$ 是一个随机变量, 它的分布函数可以写成

$$F_X(x_1, t) = P\{X(t) \leq x_1\} \quad (2.1.10)$$

因此, 对于任意的时刻 t , $X(t)$ 也是一个随机变量, 设 x 为任意实数, 我们定义

$$F_X(x, t) = P\{X(t) \leq x\} \quad (2.1.11)$$

为 $X(t)$ 的一维分布。

显然, 由于对不同的时刻 t , 随机变量 $X(t)$ 是不同的, 因而相应地也有不同的分布函数, 因此, 随机过程的一维分布不仅是实数 x 的函数, 而且也是时间 t 的函数。

如果 $F_X(x, t)$ 的一阶导数存在, 则定义

$$f_X(x, t) = \frac{\partial F_X(x, t)}{\partial x} \quad (2.1.12)$$

为随机过程 $X(t)$ 的一维概率密度。如果我们知道了随机过程的一维概率密度, 那么我们就知道了随机过程在所有时刻上随机变量的一维概率密度。

随机过程的一维概率分布是随机过程最简单的统计特性, 它只能反映随机过程在各个孤立时刻的统计规律, 而不能反映随机过程在不同时刻状态之间的联系, 因此要更好地描述随机过程, 需要引入更高维的概率分布。

(2) 二维概率分布和 n 维概率分布

由于对任意的两个时刻 t_1 和 t_2 , $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 是两个随机变量, 因此我们可以用二维随机变量的概率分布来推广定义随机过程的二维分布。

对于任意的时刻 t_1 和 t_2 , 以及任意的两个实数 x_1 和 x_2 , 定义

$$F_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\} \quad (2.1.13)$$

为随机过程 $X(t)$ 的二维概率分布。如果 $F_X(x_1, x_2, t_1, t_2)$ 对 t_1, t_2 的偏导数存在, 则定义

$$f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (2.1.14)$$

为随机过程 $X(t)$ 的二维概率分布。

同理, 对于任意的时刻 t_1, t_2, \dots, t_n , $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ 是一组随机变量, 定义这组随机变量的联合分布为随机过程 $X(t)$ 的 n 维概率分布, 即定义

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\} \quad (2.1.15)$$

为随机过程 $X(t)$ 的 n 维概率分布。若 n 阶偏导数存在, 则称

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_X(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} \quad (2.1.16)$$

为随机过程 $X(t)$ 的 n 维概率密度。

n 维分布可以描述任意 n 个时刻状态之间的统计规律, 比一维、二维含有更多的 $X(t)$ 的统计信息, 对随机过程的描述也更趋完善。一般说来, 要完全

描述一个过程的统计特性,应该 $n \rightarrow \infty$,但实际上我们是无法获得随机过程的无穷维概率分布的。在工程应用上,通常只考虑它的二维概率分布。

3. 随机过程的数字特征

随机过程的数字特征常用的有均值、方差、相关函数等,它们都是从随机变量的数字特征推广而来的,然而不同的是,随机过程的数字特征一般不是常数,而是时间 t 的函数,因此随机过程的数字特征也常称为矩函数。下面是几个常用的数字特征。

(1) 均值

对于任意时刻 t , $X(t)$ 是一个随机变量,我们把这个随机变量的均值定义为随机过程的均值,记为 $m_X(t)$ 。即

$$m_X(t) = E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x, t) dx \quad (2.1.17)$$

式中, $f_X(x, t)$ 为 $X(t)$ 的一维概率密度。随机过程 $X(t)$ 的均值是时间 t 的函数,也称为均值函数。统计均值是对随机过程 $X(t)$ 中所有样本函数在时间 t 的所有取值进行概率加权平均,所以又称为集合平均。随机过程的均值可以直观地理解为在 t 时刻所有样本函数取值的一个分布中心,它反映了样本函数统计意义下的平均变化规律。

(2) 方差

随机过程 $X(t)$ 的方差定义为

$$\sigma_X^2(t) = E\{[X(t) - m_X(t)]^2\} \quad (2.1.18)$$

随机过程的方差也是时间的函数,由定义可以看出,方差是非负函数。方差还可以表示为

$$\sigma_X^2(t) = E\{X^2(t)\} - m_X^2(t) \quad (2.1.19)$$

(3) 相关函数和协方差函数

均值和方差只描述了随机过程在某个特定时刻的统计特性,所用的只是一维概率密度,并不能反映随机过程在两个不同时刻状态之间的联系。为此可以引入一个能反映两个不同时刻状态之间相关程度的数字特征——相关函数。

设任意两个时刻 t_1 、 t_2 , 定义

$$R_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (2.1.20)$$

为随机过程 $X(t)$ 的自相关函数,通常简称为相关函数。式中, $f(x_1, x_2, t_1, t_2)$

为 $X(t)$ 的二维概率密度。

当 $t = \tau = t$ 时, $R_X(t, t) = E\{X^2(t)\}$ 。由式(2.1.19)可得

$$R_X(t, t) = \sigma_X^2(t) + m_X^2(t) \quad (2.1.21)$$

自相关函数 $R_X(t, \tau)$ 可正可负, 其绝对值越大, 表示相关性越强。一般说来, t, τ 相隔越远, 相关性越弱, $R_X(t, \tau)$ 的绝对值也越小。当 $t = \tau = t$ 时, 其相关性应是最强的, $R_X(t, \tau)$ 的绝对值最大。

相关性的描述除了用相关函数外, 有时也用协方差函数。定义

$$K_X(t, \tau) = E\{[X(t) - m_X(t)][X(\tau) - m_X(\tau)]\} \quad (2.1.22)$$

为随机过程 $X(t)$ 的协方差函数。

很显然, 协方差函数也可表示为

$$\begin{aligned} K_X(t, \tau) &= E\{X(t)X(\tau)\} - m_X(t)m_X(\tau) \\ &= R_X(t, \tau) - m_X(t)m_X(\tau) \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

当 $t = \tau = t$ 时, $K_X(t, t)$ 即为方差函数。

如果 $K_X(t, \tau) = 0$, 则我们称 $X(t)$ 和 $X(\tau)$ 是不相关的。如果 $R_X(t, \tau) = 0$, 则我们称 $X(t)$ 和 $X(\tau)$ 是相互正交的。不相关和正交是随机过程的两个重要概念。

(4) 离散随机过程的数字特征

如果 $X(t)$ 是离散型随机过程, 假定它有 N 个离散状态, 任意时刻 t 的取值为 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$, 取值的概率分别为 $p_1(t), p_2(t), \dots, p_N(t)$, 则均值为

$$m_X(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t) p_i(t) \quad (2.1.24)$$

方差为

$$\sigma_X^2(t) = \sum_{i=1}^N [x_i(t) - m_X(t)]^2 p_i(t) \quad (2.1.25)$$

自相关函数为

$$R_X(t, \tau) = E\{X(t)X(\tau)\} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i(t)x_j(\tau) p_{ij}(t, \tau) \quad (2.1.26)$$

其中

$$p_{ij}(t, \tau) = P\{X(t) = x_i(t), X(\tau) = x_j(\tau)\} \quad (2.1.27)$$

协方差函数为

$$K_X(t, \tau) = E\{[X(t) - m_X(t)][X(\tau) - m_X(\tau)]\}$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [x_i(t_1) - m_X(t_1)][x_j(t_2) - m_X(t_2)] p_{ij}(t_1, t_2) \quad (2.1.28)$$

均值和自相关函数 $R_X(t_1, t_2)$ 分别为随机信号 $X(t)$ 的一阶矩和二阶矩, 类似地, 还可以定义信号 $\{X(t)\}$ 的 k 阶矩为

$$\mu(t_1, \dots, t_k) \stackrel{\text{def}}{=} E[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_k)] \quad (2.1.29)$$

2.1.3 平稳随机过程

随机过程可分为平稳和非平稳两大类, 随机信号也可以分为平稳和非平稳两类。严格地说, 在实际应用中, 绝大部分信号都是非平稳信号, 但是, 平稳信号的分析比较容易, 而且在所讨论的问题中, 如果产生一个随机信号的主要条件在时间的进程中不改变或变化极小可以忽略, 则此信号可以认为是平稳的。

定义 2.1.3(严格平稳随机过程) 如果随机过程 $X(t)$ 的任意 n 维分布不随时间起点的不同而变化, 即当时间平移 Δt 时, 其任意的 n 维概率密度不变化, 则称 $X(t)$ 是严格平稳的随机过程或称为狭义平稳随机过程。

根据定义, 狭义平稳随机过程的任意 n 维概率密度应满足

$$f_X(x_1, \dots, x_n, t_1 + \Delta t, \dots, t_n + \Delta t) = f_X(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) \quad (2.1.30)$$

特别是一维概率密度

$$f_X(x, t) = f_X(x) \quad (2.1.31)$$

与时间无关, 而二维概率密度

$$f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2, \tau), \quad \tau = t_1 - t_2 \quad (2.1.32)$$

由此可见, 对于严格平稳的随机过程, 它的均值和方差是与时间无关的常数, 而自相关函数只与 t_1 和 t_2 的差值有关, 而与本身的取值是无关的。严格平稳最基本的特征是时间起点的平移不影响它的统计特性, 即 $X(t)$ 与 $X(t + \Delta t)$ 具有相同的统计特性。

定义 2.1.4(广义平稳随机过程) 如果随机过程 $X(t)$ 的均值为常数, 自相关函数只与 $\tau = t_1 - t_2$ 有关, 即

$$m_X(t) = m_X \quad (2.1.33)$$

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau), \quad \tau = t_1 - t_2 \quad (2.1.34)$$

则称随机过程 $X(t)$ 是广义平稳的。

显然,严格平稳的随机过程必定是广义平稳的(若二阶矩存在),但广义平稳的随机过程不一定是严格平稳的。

对于随机相位信号而言,其均值、自相关函数和方差分别为

$$\begin{aligned}
 m_X(t) &= E\{X(t)\} = E\{A\cos(\omega_0 t + \varphi)\} = A \int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 t + \varphi) \frac{1}{2\pi} d\varphi = 0 \\
 R_X(t_1, t_2) &= E\{X(t_1)X(t_2)\} = E\{A\cos(\omega_0 t_1 + \varphi)A\cos(\omega_0 t_2 + \varphi)\} \\
 &= \frac{1}{2} A^2 E\{\cos\omega_0(t_1 - t_2) + \cos[\omega_0(t_1 + t_2) + 2\varphi]\} \\
 &= \frac{1}{2} A^2 \cos\omega_0(t_1 - t_2) + \frac{1}{2} A^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos[\omega_0(t_1 + t_2) + 2\varphi] d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} A^2 \cos\omega_0(t_1 - t_2) \\
 \sigma_X^2(t) &= R_X(t, t) - m_X^2(t) = \frac{1}{2} A^2
 \end{aligned}$$

所以随机相位信号是平稳的。

由于在许多工程技术问题中,常常仅在相关理论(一、二阶矩)的范围内讨论问题,因此划分出广义平稳随机过程来。而相关理论之所以重要,是因为在实际中,一、二阶矩能给出有关平稳随机过程平均功率的几个主要指标。比如,如果随机过程 $X(t)$ 代表噪声电压信号,那么在相关理论范围内就可以给出直流分量、交流分量、平均功率及功率在频率上的分布等。

前面分别定义了严格平稳和广义平稳,随着近代信号处理技术的发展,还广泛采用了其他的一些平稳的概念。

1. k 阶严平稳

对于严格平稳而言,是指 $X(t)$ 和 $X(t+c)$ (c 为常数) 具有完全相同的统计特性,即对于任意的 n , 有

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = f_X(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1 + c, t_2 + c, \dots, t_n + c) \quad (2.1.35)$$

如果上式只对 $n \leq k$ 成立,则称随机过程 $X(t)$ 是 k 阶严平稳的。如果 $k=2$,则称 $X(t)$ 是二阶严平稳的。如果上式对 $n=k$ 成立,则对于 $n < k$ 也是成立的,这是因为第 k 阶概率密度确定了它的低阶概率密度。

2. 渐近平稳

当 $c \rightarrow \infty$ 时, $X(t+c)$ 的任意 n 阶概率密度与 c 无关,即

$$\lim_{c \rightarrow \infty} f_X(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1 + c, t_2 + c, \dots, t_n + c) \quad (2.1.36)$$

存在,且与 c 无关,则称 $X(t)$ 是渐近平稳的。

3. 循环平稳

如果随机过程 $X(t)$ 的分布函数满足如下关系

$$\begin{aligned} & F_X(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) \\ &= F_X(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1 + mT, t_2 + mT, \dots, t_n + mT) \end{aligned} \quad (2.1.37)$$

如果 m 为整数, T 为常数,则称 $X(t)$ 是严格循环平稳的。需要注意的是严格循环平稳信号不一定是严格平稳信号,因为式(2.1.34)对任意的 c 都要成立,而严格循环平稳只有当 $c = mT$ 时满足式(2.1.34)。

2.1.4 功率谱和周期图

离散时间实平稳随机信号 x_n 的功率谱 $S_{xx}(z)$ 定义为 x_n 的自相关函数 $R_x(k)$ 的双边 z 变换,即

$$S_{xx}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xx}(k) z^{-k} \quad (2.1.38)$$

式中, $R_x(k)$ 定义为

$$R_x(k) = E[x_{n+k} x_n] \quad (2.1.39)$$

若 $R_x(k)$ 是稳定的,则 $S_{xx}(z)$ 的收敛域包括 z 平面上的单位圆,于是令 $z = e^{j\omega}$,便可定义以频率为自变量的功率谱

$$S_{xx}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x(k) e^{-j\omega k} \quad (2.1.40)$$

$S_{xx}(\omega)$ 在物理意义上说明了信号 x_n 的频率成分,以及功率随频率的分布。

两实平稳随机信号 x_n 和 y_n 的互相关函数和互功率谱定义为

$$R_{xy}(k) = E[x_{n+k} y_n] \quad (2.1.41)$$

$$S_{xy}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xy}(k) z^{-k} \quad (2.1.42)$$

在实际应用中,通常观测到的是信号的有限个取样值,可用 $y_N(n)$ 表示。可以认为它是分段平稳随机信号中的一段,也可以将它看成是从平稳随机信号中截取出来的一段数据。对于平稳随机信号,无论从何时开始从其中任取一段长为 N 的数据,所计算出来的均值或自相关值都是相同的。信号 $y_N(n)$ 可以看成是用一个宽为 N 的数据窗 $w(n)$ 从平稳随机信号 $y(n)$ 中截取出来的,即

$$y_N(n) = y(n) w(n) \quad (2.1.43)$$

之所以假定 $y_N(n)$ 是分段平稳信号中的一段或从平稳随机信号中用数据窗选取出来的, 主要原因在于这样便可根据遍历性假设用时间平均代替集合平均。

若已知 N 个数据为

$$y_N(n) = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \quad (2.1.44)$$

则用时间平均来近似计算的自相关函数为

$$\hat{R}_y(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|k|} y_{n+k} y_n, \quad |k| \leq N-1 \quad (2.1.45)$$

称之为取样自相关。它可以看成有限长序列 $y_N(n)$ 和 $y_N(-n)$ 的卷积运算结果除以 N , 即

$$\hat{R}_y(k) = \frac{1}{N} (y_N(n) * y_N(-n)) \quad (2.1.46)$$

取样自相关函数的双边 Z 变换称为周期图, 它是功率谱的一种估计, 用 $\hat{S}_{yy}(z)$ 表示,

$$\hat{S}_{yy}(z) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \hat{R}_y(k) z^{-k} \quad (2.1.47)$$

由此可得

$$\hat{S}_{yy}(z) = \frac{1}{N} Y(z) Y(z^{-1}) \quad (2.1.48)$$

这里, $Y(z)$ 是 $y_N(n)$ 的 Z 变换。上面两式是计算周期图的两种基本方法, 前者称为间接法, 后者称为直接法。令 $z = e^{j\omega}$, 由上式可得

$$\hat{S}_{yy}(\omega) = \frac{1}{N} |Y(\omega)|^2 = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} y_N(n) e^{-j\omega n} \right|^2 \quad (2.1.49)$$

该式很适合用 FFT 来计算。

长度为 N 的数据段计算出的周期图所能达到的频率分辨率为

$$\Delta\omega = k \frac{2\pi}{N} \quad (2.1.50)$$

式中, k 是一个比例常数。考虑到数字频率与物理频率之间存在着下列关系

$$\omega = 2\pi fT = \frac{2\pi f}{f_s} \quad (2.1.51)$$

式中, T 是时域中的取样间隔, $f_s = \frac{1}{T}$ 是取样频率, 则可得到用物理频率表示的频率分辨率为

$$\Delta f = k \frac{f_s}{N} = k \frac{1}{NT} = k \frac{1}{T_R} \quad (2.1.52)$$

式中, $T_R = NT$ 是数据段的持续时间, 单位为 s 。

用周期图作为功率谱的估计,有两大缺点:一是旁瓣泄漏;二是非一致估计。虽然人们提出了许多方法改进周期图的性能,但仍然存在着频率分辨率与谱估计稳定性之间的矛盾,特别是当数据段长度 N 很短时,这种矛盾显得尤为突出。现代谱估计正是为解决这一矛盾提出来的^[1~3]。

2.2 现代谱估计

前面讨论的估计功率谱密度的周期图方法是一种计算简单的经典方法。它的主要特点是不考虑信号模型,是一类非参数化方法。它的主要问题是:由于假定信号的自相关函数在数据观测区以外等于零,因此估计出来的功率谱很难与信号的真实功率谱相匹配。一般情况下,周期图的渐近性能无法给出实际功率谱一个满意的近似,因而是一种低分辨率的谱估计方法。

另一类功率谱估计方法使用参数化的模型,它们统称为参数化功率谱估计。由于这类方法能够给出比周期图方法高得多的频率分辨率,故又称为高分辨率方法或现代谱估计方法。

2.2.1 谱估计的参数模型方法

人们通常会或多或少地掌握关于被估计过程的某些先验知识,从而有可能对它作出某些合理的假定。例如为它建立一个准确或至少近似的模型,而不必像经典谱估计方法那样主观武断地认为凡未观测到的数据都等于零。这就从根本上摒弃了对数据序列加窗的隐含假设。以参数模型为基础的谱估计

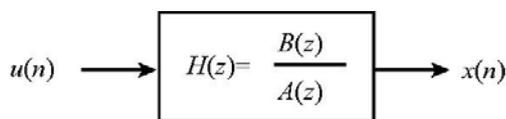


图 2.2.1 离散随机信号 $x(n)$ 的有理传输函数模型

方法一般按下列 3 个步骤进行:①为被估计的随机过程确定或选择一个合理的模型;②根据已知观测数据估计模型的参数;③用估计得到的模型参数计算功率谱。

实际应用所遇到的随机过程大多数可以用有理传输函数模型很好地逼近,如图 2.2.1 所示。图中,输入激励 $u(n)$ 是均值为零、方差为 σ^2 的白噪声序列,线性系统传输函数为

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^p a_k z^{-k}} \quad (2.2.1)$$

式中, b_k 是前馈(或动平均)支路的系数,称为 MA 系数; a_k 是反馈(或自回归)支路的系数,称为 AR 系数。系统的输出序列 $x(n)$ 是被建模的离散随机信

号。

该模型的输出和输入之间满足差分方程

$$x(n) = - \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + \sum_{k=0}^q b_k u(n-k), \quad \omega = 1 \quad (2.2.2)$$

输出功率谱和输入功率谱之间存在下列关系:

$$S_{xx}(z) = \sigma^2 H(z) H^* \left[\frac{1}{z^*} \right] = \sigma^2 \frac{B(z) B^* \left[\frac{1}{z^*} \right]}{A(z) A^* \left[\frac{1}{z^*} \right]} \quad (2.2.3)$$

或

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma^2 |H(e^{j\omega})|^2 = \sigma^2 \left| \frac{B(e^{j\omega})}{A(e^{j\omega})} \right|^2 \quad (2.2.4)$$

若 $h(n)$ 是实的, 则

$$H^*(1/z^*) = H(z^{-1}) \quad (2.2.5)$$

于是

$$S_{xx}(z) = \sigma^2 H(z) H(z^{-1}) = \sigma^2 \frac{B(z) B(z^{-1})}{A(z) A(z^{-1})} \quad (2.2.6)$$

以下讨论的都是这种情况。

由于 $|H(e^{j\omega})|$ 的增益系数可并入 σ^2 进行考虑, 所以不失一般性, 可假设 $\omega = 1$ 和 $b = 1$ 。

(1) 如果除 $\omega = 1$ 外所有其他的 AR 系数都等于零, 则式(2.2.2)成为

$$x(n) = \sum_{k=0}^q b_k u(n-k)$$

这种模型称为 q 阶滑动平均模型或简称为 MA(q) 模型, 其传输函数为

$$H_{MA}(z) = B(z) = \sum_{k=0}^q b_k z^{-k} \quad (2.2.7)$$

模型输出功率为

$$S_{xx}(z) = \sigma^2 B(z) B(z^{-1}) \quad (2.2.8)$$

或

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma^2 |B(e^{j\omega})|^2 = \sigma^2 \left| \sum_{k=0}^q b_k e^{-j\omega k} \right|^2 \quad (2.2.9)$$

这是一个全零点模型。

(2) 如果除 $b = 1$ 外所有其他的 MA 系数都等于零, 则式(2.2.2)成为

$$x(n) = - \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + u(n) \quad (2.2.10)$$

这种模型称为 p 阶自回归模型或简称为 AR(p)模型,其传输函数为

$$H_{AR}(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} \quad (2.2.11)$$

模型输出功率为

$$S_{xx}(z) = \frac{\sigma^2}{A(z)A(z^{-1})} \quad (2.2.12)$$

或

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \frac{\sigma^2}{|A(e^{j\omega})|^2} = \frac{\sigma^2}{\left|1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j\omega k}\right|^2} \quad (2.2.13)$$

这是一个全极点模型。

(3) 设 $a_0 = 1$ 和 $b_0 = 1$, $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$ 不全为零。这是一个“极点-零点模型”,称为 ARMA(p, q)模型。

Word 分解定理^[4] 阐明了上述三种模型之间的联系。该定理认为:任何广义平稳随机过程都可分解成一个完全随机的部分和一个确定的部分。确定性随机过程是一个可以根据其过去的无限个取样值完全加以预测的随机过程。该定理的一个推论是:如果功率谱完全是连续的,那么任何 ARMA 过程或 AR 过程可以用一个无限阶的 MA 过程表示。这个推论表明,如果选择了一个不合适的模型,只要模型的阶足够高,它仍然能够比较好地逼近被建模的随机过程。

2.2.2 AR 模型的稳定性及其阶的确定

1. AR 模型的稳定性

AR(p)模型稳定的充分必要条件是 $H(z)$ 的极点(即 $A(z)$ 的根)都在单位圆内。据此,稳定的 AR(p)模型将具有以下性质:

- (1) $H(z)$ 的全部极点或 $A(z)$ 的所有根都在单位圆内;
- (2) 自相关矩阵是正定的;
- (3) 激励信号的方差(能量)随阶次增加而递减,即 $\sigma_1^2 > \sigma_2^2 > \dots > \sigma_p^2 > 0$ 。

2. AR 模型阶的确定

在实际工作中,通常事先并不知道 AR 模型的阶。阶选得太低,功率谱受到的平滑太厉害,降低了谱估计的分辨率;阶选得太高,固然会提高谱估计的分辨率,但同时会产生虚假的谱峰或谱的细节。一种简单直观的确定 AR 模

型的阶的方法,是不断地增加模型的阶,同时观察预测误差功率,当其下降到最小时,对应的阶便可选定为模型的阶。然而,预测误差功率(或 AR 模型激励源的方差 σ_k^2)是随着阶次增加而单调下降的,因此很难确定 σ_k^2 降到什么程度才最合适。另一方面,应注意到,随着模型阶的增加,模型参数的数目亦增多了,谱估计的方差会变大。因此,不能简单地依靠观察预测误差功率的下降来确定模型的阶。与此相应的另一种简单方法是观察各阶模型预测误差序列的周期图,当它最接近于平坦(白色谱)时即对应于最佳的阶。上述是 AR 模型阶确定的一般性方法,除此之外,人们还提出了几种以不同的误差准则作为确定模型阶的依据,如最终预测误差(FPE)准则、Akaike 信息准则(AIC)、判别自回归传输函数(CAT)准则等^[18]。

2.2.3 AR 模型的 Yule-Walker 方程

以 AR 模型为基础的谱估计由式(2.2.12)或式(2.2.13)来计算,这就需要知道模型的阶 p 和 p 个 AR 系数,以及模型激励源的方差 σ^2 。为此,必须把这些参数和已知或估计得到的自相关函数联系起来,这就是著名的 Yule-Walker 方程。该方程可以直接由模型的差分方程推导出来。

将 AR 模型的差分方程式代入 $x(n)$ 的自相关函数表示式,得

$$\begin{aligned} R_x(m) &= E[x(n)x(m+n)] = E\left\{x(n)\left[-\sum_{k=1}^p a_k x(n+m-k) + u(m+n)\right]\right\} \\ &= -\sum_{k=1}^p a_k R_x(m-k) + E[x(n)u(m+n)] \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

设 AR 模型的冲激响应是 $h(n)$,在方差为 σ^2 的白噪声序列 $u(n)$ 作用下产生输出 $x(n)$,于是

$$\begin{aligned} E[x(n)u(n+m)] &= E\left\{\left[\sum_{l=0}^{\infty} h(l)u(n-l)\right]u(n+m)\right\} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} h(l)E[u(n-l)u(n+m)] \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} h(l)\sigma^2\delta(m+l) = \sigma^2 h(-m) \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

如果 $h(n)$ 是因果的,即 $m > 0$ 时, $h(-m) = 0$,则上式可写为

$$E[x(n)u(n+m)] = \begin{cases} \sigma^2 h(0), & m = 0 \\ 0, & m > 0 \end{cases} \quad (2.2.16)$$

根据 Z 变换中的终值定理, $h(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = 1$,上式化为

$$E[x(n)u(n+m)] = \begin{cases} \sigma^2, & m = 0 \\ 0, & m > 0 \end{cases} \quad (2.2.17)$$

将上式代入式(2.2.14)得

$$R_x(m) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k R_x(m-k) + \sigma^2, & m = 0 \\ -\sum_{k=1}^p a_k R_x(m-k), & m > 0 \end{cases} \quad (2.2.18)$$

这里利用了自相关函数的偶对称性质。该式称为 AR 模型的 Yule-Walker 方程。为求取 AR 模型参数,应先从上式中选择 $m > 0$ 的 p 个方程解出 $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, 然后代入对应 $m=0$ 的方程求出 σ^2 。自相关函数开始的 $p+1$ 个值是 $\{R(0), R(1), \dots, R(p)\}$, 因此, 上式可写成下列矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} R(0) & R(1) & R(2) & \cdots & R(p) \\ R(1) & R(0) & R(1) & \cdots & R(p-1) \\ R(2) & R(1) & R(0) & \cdots & R(p-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ R(p) & R(p-1) & R(p-2) & \cdots & R(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.19)$$

只要已知或估计出 $p+1$ 个自相关函数值, 即可由该方程解出 $p+1$ 个模型参数 $\{a_1, a_2, \dots, a_p, \sigma^2\}$ ^[5,6]。

2.2.4 ARMA 模型谱估计及 AR 参数辨识

ARMA 模型谱估计的目的是使用 N 个观测数据 $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$ 计算出 ARMA 过程 $\{x(n)\}$ 的功率谱密度估计值。显然, 按常规方法进行谱估计时, 需要事先辨识出整个 ARMA 模型及激励噪声的方差 σ^2 , 而 ARMA 模型的辨识涉及到 AR 阶数和 MA 阶数的确定, 以及 AR 参数和 MA 参数的估计。其中, MA 参数的估计需要解非线性方程, 下面介绍 5 种避开这一非线性运算, 而只使用线性运算估计 ARMA 过程的功率谱密度的方法^[4]。

1. ARMA 功率谱估计的两种线性方法

由于功率谱 $S_{xx}(\omega) = S_{xx}(z)|_{z=e^{j\omega}}$, 为了方便, 下面用 $S_{xx}(z)$ 表示 ARMA 功率谱密度。于是功率谱密度可以写成