

• 数 • 理 • 科 • 学 • 系 • 列 •



国家自然科学基金研究成果专著出版基金资助



国家自然科学基金研究成果专著
NATIONAL NATURAL SCIENCE FOUNDATION OF CHINA

黏弹性理论与应用

杨挺青 罗文波 徐 平 著
危银涛 刚芹果

科学出版社

内 容 简 介

黏弹性理论与应用体现力学、物理、化学和工程学科相互渗透与交融,与先导工业、工程及高新技术密切相关,涉及聚合物、复合材料、智能材料、生物体、地质材料、高温下金属以及它们的结构,在材料、生物、能源、海洋、宇航和地下工程,在化工、轻纺、建筑、机械等行业及日用品工业中有广泛应用。

本书第一至八章为基础理论部分,包括黏弹性力学行为与本构关系、线黏弹性力学问题及解法、线黏弹性结构分析、黏弹性与不可逆热力学、非线性黏弹性本构方程、黏弹塑性本构关系和黏弹性体的能量损耗。第九至十四章为黏弹性理论在技术与工程中的应用,着重聚合物黏弹性、带缺陷高聚物的损伤与破坏、黏弹性橡胶与轮胎力学、岩石黏弹性力学性能、岩石与岩体工程流变分析以及某些生物固体的黏弹性分析。

本书可作为高等学校力学及相关专业研究生教材或教学参考书,也可供有关学科和技术工程领域的科研与设计人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

黏弹性理论与应用 / 杨挺青等著. - 北京: 科学出版社, 2004.9

ISBN 7-03-013938-0

. 黏... . 杨... . 黏弹性理论 . O345

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 072016 号

责任编辑: 王 军 / 责任印制: 高 嵘

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

湖北京山德新印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 9 月第 一 版 开本: 787 × 1092 1/16

2004 年 9 月第一次印刷 印张: 26 1/2 插页: 2

印数: 1—1 500 字数: 614 000

定价: 68.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

许多物质或材料往往兼具弹性和黏性两种不同机理的变形,综合地呈现弹性固体和黏性流体两者的力学行为。物质(或材料)的这种性能称为黏弹性。随着聚合物、复合材料、智能材料、生物体、地质材料、高温下金属以及它们的结构的日益发展与广泛应用,黏弹性理论与应用研究日益拓展。

黏弹性力学是连续介质力学的重要内容之一,体现力学、物理、化学和工程学科相互渗透与交融,有新兴学科分支的特征,与先导工业、工程和高新技术有密切联系。它涉及塑料、橡胶、树脂、油漆、玻璃、陶瓷、金属等工业材料,岩石、土壤、沥青、混凝土、石油和矿物等地质材料,肌肉、筋腱、骨骼、血液等生物体,纺织纤维、纸浆、化妆品、油料、食品等轻工和生活用品原料,在材料、生物、能源、海洋、宇航和地下工程中,在化工、轻纺、建筑、机械等行业以及日用品工业中都有重要应用或广阔的应用前景,正越来越受到力学、材料、化学和工程技术界的共同关注与重视。

本书所述的黏弹性理论,主要研究固态材料的时间相关力学行为、本构关系和破坏过程,研究黏弹性物体随时间变化的应力、变形和失效规律,因而也可以称为黏弹性力学。

本书的主要内容是作者及所在研究组近 10 余年承担国家自然科学基金项目和参加部分重要工程研究任务所取得的成果,其中许多内容已在国内外重要刊物发表,有的在相关技术与工程中采用。全书分为十四章。第一至八章为基础理论部分,包括黏弹性力学行为与本构关系,线黏弹性力学问题的建立及解法,线黏弹性结构分析,黏弹性与不可逆热力学,非线性黏弹性本构关系,黏弹塑性本构关系,黏弹性物体的能量损耗。在基础理论的论述中,注重基本概念、基本原理和基本方法,力求学术理论的深入、创新与拓展,如线性和非线性黏弹性体在若干周期应变下的应力与能耗理论解,线黏弹性本构微分关系,黏弹性轴对称问题的一般解,黏弹性结构延迟屈曲,薄板蠕变屈曲载荷-时间相关规律,黏弹性结构的动力响应,某些非线性黏弹性本构方程等。第九至十四章着重黏弹性理论在技术与工程中的应用,含:聚合物黏弹性,带缺陷高聚物的损伤与破坏,黏弹性橡胶与轮胎力学,岩石黏弹性力学性能,岩石与岩体工程流变分析,某些生物固体的黏弹性问题。这些内容体现黏弹性理论与工程技术密切相关,理论与应用各具特色,例如:高聚物黏弹性非线性行为研究,时间-温度-应力等效原理,含缺陷聚合物的银纹扩展机理;岩石压缩蠕变与应力松弛,岩体及结构面蠕变性能,三峡工程岩体蠕变数据处理,岩体高边坡施工期、运行期流变分析;橡胶准静态、动态黏弹性行为及其分析,黏弹性轮胎滚动接触动力学;骨力学性能测试与黏弹性力学行为,松质骨黏弹性分析。

本书试图体现黏弹性理论与应用某些前沿研究水平,兼顾黏弹性力学系统与拓展,反映部分研究新成果,加强工程技术应用。撰写中注重概念与提法正确,物理基础清晰,数学表述准确;力求叙述严谨,逻辑性强,文字简练。全书内容基本体系为:本构关系-问题建立与解法;专题研究;在技术与工程中的应用。在第一至三章线黏弹性力学的基础上,第四至八章可各自成为理论专题,第九至十四章着重于黏弹性理论在技术工程中的应用,

同样可作为专题研究的内容。这种由浅入深、逐步提高与拓展的内容体系,可以满足广大读者的不同要求,以供各取所需。笔者于1988年成稿的《黏弹性力学》一书(华中理工大学出版社,1990,1992),先后有许多高等学校有关教师用作研究生教材或教学参考书,反映良好,本书第二、三、五至七章中的基础理论部分引用了该书相应的基本内容,以便查考或用作教材,利于致趣黏弹性理论与应用的部分读者自学。

感谢国家自然科学基金委员会研究成果专著出版基金(10224002)的资助,使本书得以出版。10多年来,国家自然科学基金委员会批准的黏弹塑性本构理论及其应用(1870320)、黏弹性材料的非线性力学行为及其应用(19172027)、含缺陷流变物体的材料破坏理论(重点项目19632030)、承载高聚物蠕变损伤-破坏力学行为与微观机理(10172037)、高聚物应力银纹化的研究(20204012)、高边坡岩体流变断裂特性研究(59279392)、“三峡船闸高边坡岩体分级宏观力学参数和施工监测反馈分析研究”(重大项目专题 59493600-III-4-3)和骺板及牵引骺分离流变性质研究(39170242)等项目的资助,使我们的黏弹性理论与应用研究得以持续进行,作者再次表示感谢。

在笔者长期的黏弹性力学研究与教学中,承蒙许多良师益友的关怀和支持。黄克智院士、杨桂通教授、徐秉业教授、匡震邦教授、丁皓江教授、沈亚鹏教授、刘延柱教授、程昌钧教授、余寿文教授、白以龙院士、杜善义院士、袁龙蔚教授、黄筑平教授、杨嘉陵教授、张文教授、傅衣铭教授以及其他同仁给予很多启示和热情帮助,笔者借此机会向他们表示深切的敬意和感谢。美国 Rutgers 大学 Yu Chen 教授、G. J. Weng 教授在本人1981~1982作访问学者期间给予许多关照与热诚指导,美国 R. M. Christensen 教授、加拿大 G. A. C. Graham 教授、日本 S. Murakami 教授和波兰 M. Zyczkowski 教授等的有益讨论与文稿交流,在美、日、德、韩、加拿大、新加坡等国以及香港、台湾地区讲学和学术交往期间有关同仁给予的帮助,在此向他们一并表示诚挚的谢意。同时,笔者衷心感谢几十年来在华中科技大学力学系共同完成科学研究与教学任务的同事们和同学们。

本书完稿与出版之际,笔者深切缅怀敬爱的恩师王仁院士。

在共同拟定详细编写大纲的基础上,本书第一至七章、§ 8-1 和 § 8-2 由华中科技大学杨挺青撰写,第九、十章由湘潭大学罗文波撰写,§ 8-3~§ 8-5 和第十一章由清华大学危银涛撰写,第十二、十三章由长江科学院徐平撰写,第十四章由河北大学刚芹果撰写。全书由杨挺青统稿。在各章的修订稿完成以后,杨挺青、罗文波和徐平共同审阅讨论了全书内容。

限于作者的水平与经验,书中错漏与不当之处,恳请读者批评指正。

杨挺青

2004年元月于武昌

目 录

前 言	i
第一章 绪论	1
§1-1 物质的黏弹性	1
§1-2 黏弹性力学行为	2
1-2-1 蠕变和应力松弛	2
1-2-2 载荷速率效应	3
1-2-3 频率相关性能	4
1-2-4 温度依赖性	5
§1-3 黏弹性本构关系	6
§1-4 黏弹性力学	7
1-4-1 黏弹性力学	7
1-4-2 本书内容概要	9
参考文献	11
第二章 线黏弹性本构关系	13
§2-1 黏弹性模型表述	13
2-1-1 两基本模型	13
2-1-2 三参量固体	17
§2-2 蠕变柔量和松弛模量	19
§2-3 一维微分型本构关系	20
2-3-1 广义 Maxwell 模型和广义 Kelvin 模型	20
2-3-2 一维微分型本构方程	22
§2-4 一维积分型本构关系	24
2-4-1 积分型本构方程	24
2-4-2 应力应变历史相关性	27
2-4-3 材料函数的积分表达	30
§2-5 复模量和复柔量	31
2-5-1 复模量和复柔量	32
2-5-2 材料函数之间的关系	38
2-5-3 动态性能与频率的关系	42
§2-6 三维本构关系	43
2-6-1 三维微分型本构方程	43
2-6-2 三维积分型本构方程	46
参考文献	48
第三章 线黏弹性力学边值问题	49
§3-1 线黏弹性力学问题	49
§3-2 线黏弹性问题求解	50

§3-3 相应原理	53
§3-4 梁的弯曲	56
3-4-1 直梁弯曲	56
3-4-2 连续支承梁	59
§3-5 圆轴的扭转	62
§3-6 黏弹性轴对称圆筒	64
3-6-1 轴对称圆筒	64
3-6-2 外表面受约束圆筒	68
3-6-3 不可压缩圆筒动态响应	72
§3-7 轴对称平面问题一般解	76
3-7-1 基本解	76
3-7-2 厚壁圆筒	77
3-7-3 数值逆变换	79
3-7-4 算例	82
参考文献	84
第四章 线黏弹性结构分析	85
§4-1 黏弹性 Timoshenko 梁的准静态分析	85
4-1-1 基本方程	85
4-1-2 两种梁理论解的基本关系	86
4-1-3 几种单跨梁解的关系式	87
§4-2 黏弹性基支黏弹薄板的准静态弯曲	89
4-2-1 Laplace 空间的方程及其解	89
4-2-2 数值逆变换	91
4-2-3 算例与结果	92
§4-3 基支黏弹板轴对称问题的动力响应	94
4-3-1 基本方程	94
4-3-2 基支圆板的求解	95
4-3-3 算例	97
§4-4 黏弹性大挠度圆板的轴对称弯曲	99
4-4-1 基本方程	99
4-4-2 基本控制方程求解	101
4-4-3 标准线性固体圆板	103
§4-5 薄板蠕变屈曲载荷-时间特性	106
4-5-1 黏弹性薄板的压屈方程	107
4-5-2 薄板蠕变屈曲载荷-时间关系	108
4-5-3 屈曲载荷-时间特性	109
4-5-4 薄板压屈实验测试	110
§4-6 高密度聚乙烯板材焊接储液罐蠕变分析	112
4-6-1 储液罐细部的变形与内力分析	113
4-6-2 储液罐蠕变分析	117
参考文献	118
第五章 黏弹性与不可逆热力学	120

§5-1 概述	120
§5-2 热力学基础	121
5-2-1 热力学定律	121
5-2-2 非均匀系	121
5-2-3 Onsager 原理	122
§5-3 线性后效材料演变方程	124
§5-4 演变方程求解	126
5-4-1 可逆变量与不可逆变量	126
5-4-2 演变方程一般解	127
§5-5 内变量与本构关系	131
§5-6 一种广义黏弹性本构方程	133
5-6-1 率相关非弹性本构关系及演变方程	133
5-6-2 线黏弹性本构微分关系	135
5-6-3 一种黏弹性本构方程	137
参考文献	139
第六章 非线性黏弹性本构关系	140
§6-1 概述	140
§6-2 多重积分型本构关系	141
6-2-1 一维多重积分型本构关系	141
6-2-2 三维多重积分型本构关系	144
§6-3 不可压缩材料和线性可压缩材料	146
6-3-1 不可压缩材料的蠕变	146
6-3-2 线性可压缩材料	148
§6-4 简单受力多重积分本构方程	150
6-4-1 轴力和扭转联合作用	150
6-4-2 简单拉压	151
6-4-3 纯扭转	151
6-4-4 近似核函数	152
§6-5 有限变形理论概述	153
6-5-1 变形梯度和变形张量	153
6-5-2 应变张量和变形率	156
6-5-3 相对变形	157
6-5-4 应力	158
6-5-5 黏弹性固体本构描述	159
6-5-6 不可压缩材料	159
§6-6 单积分型非线性本构关系	161
6-6-1 不可压缩固体本构关系	162
6-6-2 修正叠加法和物理线性近似	166
6-6-3 含折算因数的本构关系	168
6-6-4 广义应变模型	169
§6-7 非线性本构关系的其他形式	171
6-7-1 非线性黏弹性幂率关系	171
6-7-2 新胡克定律	171

参考文献	172
第七章 黏弹塑性本构关系	174
§7-1 变形固体一般模型	174
§7-2 黏弹塑性本构关系	176
7-2-1 黏弹塑性材料的屈服准则	176
7-2-2 黏弹塑性本构表达	178
§7-3 弹黏塑性本构方程	179
7-3-1 弹黏塑性本构关系	179
7-3-2 各向同性强化弹黏塑性材料	181
7-3-3 弹黏理想塑性材料	182
§7-4 无屈服面黏弹塑性理论	185
7-4-1 内时理论和过应力模型简介	185
7-4-2 Bodner-Partom 本构方程	186
7-4-3 某些模型的修正与讨论	188
§7-5 黏弹塑性细观理论概述	191
7-5-1 小应变细观理论	192
7-5-2 有限变形细观理论	193
参考文献	193
第八章 黏弹性物体的能量损耗	195
§8-1 线性黏弹体的能耗	195
8-1-1 谐波作用下的响应与能耗	195
8-1-2 三角形脉动循环应变下的应力和能耗	197
§8-2 非线性黏弹性体在周期应变条件下的应力与能耗	200
8-2-1 能量损耗表达	200
8-2-2 本构关系	201
8-2-3 谐波应变作用	202
8-2-4 三角形脉动变形作用	203
§8-3 一般非谐变循环载荷下的应力与能耗	205
8-3-1 梯形脉动应变循环	206
8-3-2 一般非谐应变情况	207
§8-4 颗粒增强橡胶动态力学性能和生热预报	210
8-4-1 应变放大因子	210
8-4-2 均匀填充橡胶的能耗	211
8-4-3 碳黑分散不均匀的影响	211
§8-5 黏弹性纤维复合材料的三维能耗	214
8-5-1 均质各向异性黏弹性材料的能耗公式	214
8-5-2 多层复合材料的有效阻尼(损耗)矩阵和能耗	216
8-5-3 数值算例与分析	219
参考文献	221
第九章 聚合物黏弹性力学性能	223
§9-1 概述	223
§9-2 高聚物非线性黏弹性行为	224

9-2-1 高聚物变形行为的率相关性	225
9-2-2 应力行为的应变历史相关性	227
9-2-3 蠕变行为的应力水平相关性	229
§9-3 时间-温度等效原理	230
9-3-1 高聚物力学性能的温度依赖性	230
9-3-2 时间-温度等效原理	231
§9-4 时间-温度-应力等效原理	234
9-4-1 自由体积的温度与应力水平相关性	234
9-4-2 时间-温度-应力等效原理	236
9-4-3 热塑性高聚物的非线性蠕变分析	237
§9-5 时间-温度-损伤等效原理	239
9-5-1 时间-温度-损伤等效原理	239
9-5-2 橡胶材料的 Payne 效应模拟	240
§9-6 聚合物银纹损伤演化	242
9-6-1 银纹损伤及其演化	242
9-6-2 蠕变银纹损伤演化实验研究	248
参考文献	253
第十章 含缺陷聚合物的损伤与破坏	256
§10-1 含缺陷聚合物形变热效应	256
10-1-1 控制方程	256
10-1-2 形变热效应实验研究	257
10-1-3 形变生成热计算	261
10-1-4 降温-升温现象分析	262
§10-2 裂纹定常扩展过程的热耗散与温度场	263
10-2-1 裂尖不可逆塑性区的形状与尺寸	263
10-2-2 热源密度分布	264
10-2-3 稳态扩展裂纹周围温度场	265
10-2-4 算例	266
§10-3 聚合物裂尖银纹损伤区的生长	267
10-3-1 裂尖应力银纹化的实验研究	267
10-3-2 聚合物裂尖银纹区生长模型	270
§10-4 银纹生长与断面形貌	280
10-4-1 高聚物断面特征形貌	280
10-4-2 二次曲线状特征形貌的计算机模拟	281
§10-5 银纹断裂与银纹化增韧	283
10-5-1 银纹化增韧概述	283
10-5-2 银纹断裂的弹性力学模型	284
10-5-3 银纹化增韧的微观设计	287
参考文献	289
第十一章 黏弹性橡胶与轮胎力学	292
§11-1 概述	292
§11-2 橡胶本构理论	294
11-2-1 橡胶弹性理论	295

11-2-2 橡胶黏弹性特征	299
11-2-3 橡胶本构的数值实施	300
§11-3 橡胶的 Mullins 效应	304
11-3-1 Mullins 效应描述	304
11-3-2 伪弹性理论	304
11-3-3 Mullins 效应的模拟	305
§11-4 橡胶动态黏弹性 Payne 效应	309
11-4-1 Payne 效应的基本描述	309
11-4-2 Payne 效应的 Kraus 模型	311
11-4-3 橡胶的老化特性与 Payne 效应	312
§11-5 轮胎滚动阻力计算	315
11-5-1 轮胎滚动阻力定义	315
11-5-2 滚动阻力有限元计算方法	317
11-5-3 非谐变载荷下的能耗公式	318
§11-6 黏弹性轮胎滚动接触动力学	319
11-6-1 轮胎环模型基本方法	319
11-6-2 动态接触分析	321
参考文献	323
第十二章 岩石黏弹性力学性能	326
§12-1 概述	326
§12-2 岩石的压缩蠕变与应力松弛	327
12-2-1 岩石的压缩蠕变性能	327
12-2-2 岩石的应力松弛性能	331
§12-3 岩体单轴和三轴压缩蠕变性能	332
12-3-1 单轴和三轴压缩蠕变试验	332
12-3-2 岩体蠕变模型及其参数	334
§12-4 岩体结构面剪切蠕变性能	334
12-4-1 岩体结构面室内剪切蠕变性能	334
12-4-2 现场岩体结构面剪切蠕变性能	335
12-4-3 考虑加载历史影响的蠕变试验曲线	336
12-4-4 结构面长期抗剪强度	337
12-4-5 结构面剪切蠕变方程	339
§12-5 岩体剪切蠕变性能	340
12-5-1 硬岩的剪切蠕变性能	340
12-5-2 松散结构岩体剪切蠕变性能	341
12-5-3 泥化夹层剪切蠕变性能	343
§12-6 岩石蠕变断裂特性	345
12-6-1 试验方法	345
12-6-2 试验结果分析	346
12-6-3 试样断口显微观察	347
§12-7 工程岩体蠕变位移数据处理	349
12-7-1 滑坡蠕变吸引子分析	350
12-7-2 Lyapunov 指数计算	352

§12-8 岩体黏弹性参数反分析	354
12-8-1 黏弹性参数反分析方法	355
12-8-2 构皮滩枢纽软弱岩层黏弹性参数反分析	359
12-8-3 三峡工程岩体黏弹性参数反分析	361
12-8-4 三峡工程岩体黏弹性参数综合取值	362
参考文献	363
第十三章 岩石工程流变分析	365
§13-1 岩石工程流变有限元方法	365
13-1-1 黏弹性有限元分析方法	365
13-1-2 岩石工程开挖模拟方法	366
13-1-3 有限元程序框图	366
§13-2 岩体高边坡施工期流变分析	368
13-2-1 三峡工程永久船闸工程地质特征	368
13-2-2 三峡工程永久船闸工程概况	371
13-2-3 永久船闸高边坡施工期流变分析	371
§13-3 岩体高边坡运行期流变分析	378
13-3-1 边坡渗透水压力与等效节点荷载计算	378
13-3-2 计算条件与方案	378
13-3-3 计算结果分析	379
13-3-4 岩体流变参数敏感性分析	380
§13-4 考虑开挖卸荷效应的高边坡流变分析	381
13-4-1 高边坡岩体开挖卸荷区及其参数确定	381
13-4-2 计算基本条件	384
13-4-3 计算结果分析	385
13-4-4 与现场实测资料对比分析	388
§13-5 地下岩石工程流变分析	390
13-5-1 三峡工程地下厂房围岩稳定性黏弹性分析	390
13-5-2 软弱岩层洞群围岩黏弹性分析	394
参考文献	396
第十四章 若干生物固体黏弹性分析	397
§14-1 生物组织特性与黏弹性	397
§14-2 软组织黏弹性本构方程的修正	397
§14-3 骨骺板力学性能与黏弹性分析	400
§14-4 骨单元力学模型	401
14-4-1 骨单元的力学模型	402
14-4-2 骨单元的受力分析	403
§14-5 松质骨的力学性质	405
§14-6 椎体和椎间盘系统力学模型	406
参考文献	409
主要词汇英汉对照表	411

第一章 绪 论

§ 1-1 物质的黏弹性

在连续体力学中,人们最早熟悉的两类简单物质或材料是弹性固体和黏性流体。弹性固体具有确定的体积和构形,受静载作用时应力状态和变形与时间无关,外力卸除后完全恢复原状;从能量观点来看,在弹性体变形过程中外力所做的功全部以弹性势能方式存储,而且能在载荷卸除过程中被完全释放出来。黏性流体没有确定的构形,其形状决定于容器,在外力作用下随时间连续地变形,产生不可逆的流动;变形运动时相邻流体层产生内摩擦作用。

实际上,一切固体都会或多或少地产生变形,许多乃是流动的固体。塑料、橡胶、树脂、油漆、玻璃、陶瓷、金属等工业材料,岩石、土壤、沥青、混凝土、石油和矿物等地质材料,肌肉、筋腱、骨骼、血液等生物体,纺织纤维、纸浆、化妆品、油料、食品等轻工和日用品原料,在一定的条件下,往往同时具有弹性固体和黏性流体两者的特性,综合呈现弹性和黏性两种不同机理的形变,物质的这种性质称为黏弹性^[1.1~1.4]。

黏弹性物质可分为线性和非线性两大类。若物质的力学性能表现为线弹性和理想黏性的组合,则为线性黏弹性物质^[1.1~1.4]。如果以线弹性胡克体和理想黏性牛顿流体为两端来构成材料谱系,则介于这两者之间的均属于线黏弹性体。线性黏弹性物体在不同时刻的应力和应变虽然各有不同,但在任一时刻其应力与应变均呈线性关系。在许多情况下,黏弹性物体呈现非线性弹性或非牛顿流体变形,或组合地呈现非线性弹性和非牛顿流体的特征,这种物质是非线性黏弹性体^[1.3~1.7],它的力学行为和本构关系比线黏弹性物质复杂。若黏弹性固体受一定载荷后产生屈服、出现塑性变形,或在弹性变形过程与塑性变形阶段均有黏性效应,物质同时呈现弹性、黏性和塑性特性的组合,则为黏弹塑性物质^[1.4]。

载荷与使役条件对于物质性状和力学行为有重要的影响。物质的黏弹性能与温度、负荷时间、加载速率、应变幅值和其他环境因素密切相关,其中最主要的因素是时间和温度。多数金属材料在常温和小应变时表现为弹性,但在振动问题中或高温条件下往往需要考虑其黏弹性行为。受高速冲击的金属材料与构件可能需要采用其他的模型,如黏塑性、弹黏塑性模型或高温高压下的流体动力模型。硬聚苯乙烯或其他塑料等许多固态聚合物,在某些条件下或许能粗略地视为弹性体,而实际上却存在着流动性,且随着温度的升高会加速流动,当温度较高时则熔融成为熔体或一种高黏度流体。通常,根据聚合物性能依赖于温度和时间的特性,把非晶态聚合物分为几种力学性态,即玻璃态、黏弹态、高弹态(橡胶态)和黏流态,这些性态呈现不同机理的流变行为,构成描述非晶态聚合物力学性能的基础。由于高分子聚合物的黏弹性质特别突出,常称聚合物为黏弹性材料。事实上,许多聚合物在一定的条件下呈现明显的黏弹性能,与其将高聚物统称为黏弹性材料,不如将此类聚合物谓之黏弹性状态或黏弹性聚合物更为确切。

物质的黏弹性行为依赖于时间,且决定于应变率。时间的效应表明,材料的应变或应

力响应决定于载荷和变形的历史与过程,所以往往说这些材料是有记忆的。弹性固体是一个特例,它只记忆未发生形变的初始构形。

§ 1-2 黏弹性力学行为

物质黏弹性的宏观表象描述,着重于物质的力学行为与时间、速率、频率和温度的相关性。本节简要阐述物质的黏弹性性能:准静态条件下物体的应力应变随时间而变化的基本现象,即蠕变和应力松弛;黏弹性与加载速率有关;谐变作用时黏弹性能的频率相关性;黏弹性行为的温度依赖性。详细的内容见后续相应的章节。

1-2-1 蠕变和应力松弛

在一定的载荷作用下,弹性固体的应变或应力为一定值,不随时间而变化;对于理想黏性流体,其变形则以等应变率随时间而增加。黏弹性物质受一定应力作用时会或多或少地继续产生变形,在一定的应变条件下应力幅值将随时间而有所减小。

1. 蠕变

在恒定载荷(或应力)作用下,应变随时间而逐渐增加的过程或现象称为蠕变。通常,不同的材料或某种材料在不同条件下的蠕变并不相同,聚合物尤为明显。图 1.2.1a 表示在突加后保持恒定应力 σ_0 作用下的一种蠕变曲线 ABC,应变 $\varepsilon = f(\sigma, t)$, t 表示时间。在较低应力水平下,固体材料的应变可能达到某一稳态值。受较大载荷时或在较高温度下,材料与结构蠕变过程呈现出瞬时蠕变(应变率随时间增加而减小)、稳态蠕变(应变率几乎为一常值)和加速蠕变(应变率随时间迅速增加)三个阶段,这种蠕变破坏曲线如图 1.2.1b 所示。

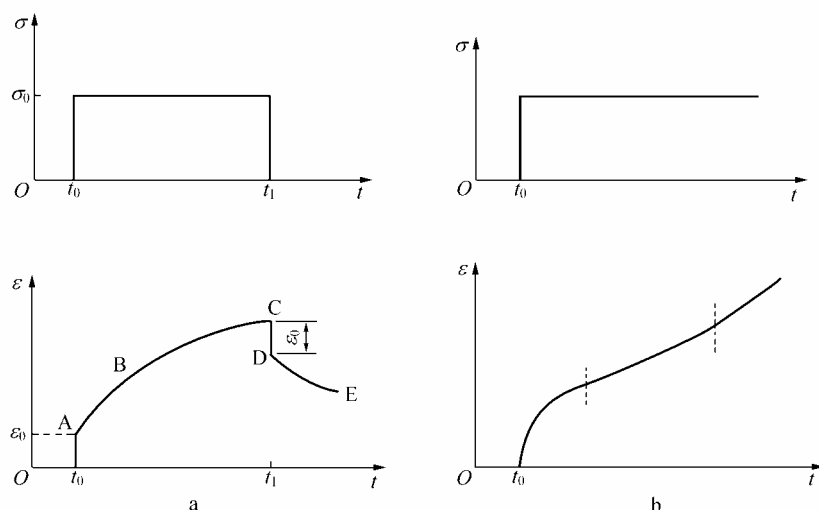


图 1.2.1 等应力作用下的蠕变过程

可见,为了保持构件、机械零件和制品的形状尺寸,不宜采用易产生蠕变的物质作为材料或原料。

回复 若在某时刻卸去载荷,弹性固体将恢复原样,如果不考虑惯性,则应变瞬时回复为零。对于黏弹性材料,在 $t=t_1$ 时刻除去外力(图 1.2.1a)则在瞬时弹性恢复(CD)后,有一逐渐回复的过程(DE)。这种蠕变回复现象,有时称为滞弹性恢复或延迟回复。留存于物体中不可恢复的应变,由回复曲线的渐近值确定。

材料的蠕变往往影响工程结构正常工作,乃至破坏机件的运行。例如:蒸汽透平叶片和涡轮机叶轮的径向位移超过叶片与机壳之间的间隙而顶住;叶片根部因长期蠕变而断裂;高温管道接头部分连接螺栓松脱;承载高聚物结构因蠕变而破坏。高温金属及其结构蠕变力学方面的文献不胜枚举^[1.8,1.9];国际理论与应用力学联合会以往举办的 6 次结构蠕变科学研讨会及其系列出版物,都很注重材料的蠕变性能^[1.10]。

显然,蠕变过程有线性与非线性之分,采用不同模型的材料函数和本构关系表述。本书第二至四章的相关内容中着重论述线黏弹性蠕变行为,第六、七章涉及非线性黏弹性蠕变,在第八章以后有关章节中将结合某些材料或结构作蠕变测试与表述,进行蠕变分析。

2. 应力松弛

在恒定应变下应力随时间而减小的现象或过程,称为应力松弛。图 1.2.2 表示一般的应力松弛,开始时应力较快地衰减,而后应力逐渐降低并趋于某一恒定值。从流变机理和相关模型看,黏性流动经过一些时间后将使应力较快地衰减至零。因而,在一定应变条件下,应力较快地降低并最后趋于零的物质是黏弹性流体;而经过较长的时间后应力衰减至某一定值的物质则为黏弹性固体。

应力松弛与蠕变现象相互对应。线黏弹性和非线性黏弹性应力松弛行为与松弛型本构关系,将分别在第二章和第六章具体阐述。

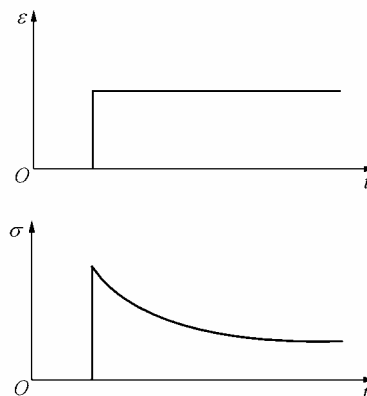


图 1.2.2 应力松弛

由于物质及其载荷起因和形变过程不同,材料随时间而变化的力学行为相当复杂,只用普通准静态条件下的简单蠕变和应力松弛往往不足以表述黏弹性物质的流变过程。然而,就表现现象而言,黏弹性固体准静态形变过程呈现的主要力学行为是:蠕变、应力松弛、瞬时弹性、滞弹性回复和永久变形。

1-2-2 载荷速率效应

除了蠕变、应力松弛和滞弹性现象外,加载速率效应是材料黏弹性的重要特征。为分析材料黏弹性能与加载速率的相关性,需要研究不同应变率下的应力响应,或不同应力速率对应变的影响。

随着应变率的增高,一般物质的应力响应幅值有程度不同的增加,如图 1.2.3 所示。聚合物的率敏感性通常比金属材料更为明显。现有的研究较多地涉及较低应变率下的黏弹性力学行为,例如,图 1.2.4 为一种高密度聚乙烯(HDPE)在不同应变率下的应力应变曲线,从中可见应变率对材料蠕变的影响。

高应变率和冲击对材料的黏弹性能有很大的影响。朱兆祥等对环氧树脂、有机玻璃、聚碳酸酯 PC、尼龙和 ABS 等的黏弹性能及其率效应进行了一系列实验研究工作^[1.11],认

为在准静态到一定的冲击载荷作用下 即应变率在 $10^{-4} \sim 10^3 \text{s}^{-1}$ 的范围内 高聚物的非线性力学行为来自弹性响应 ,材料速率相关的响应往往是线黏弹性的。本书在 § 6-6 将介绍其中一种非线性黏弹性本构关系。

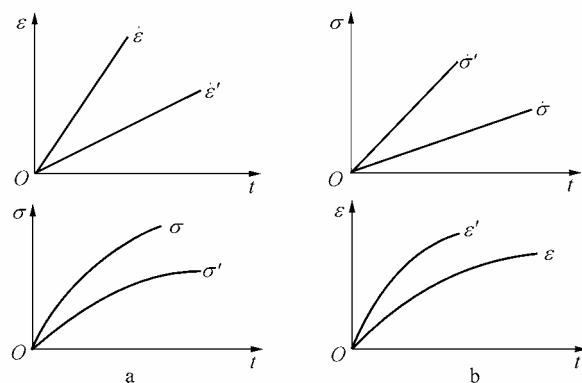


图 1.2.3 载荷速率效应示意图

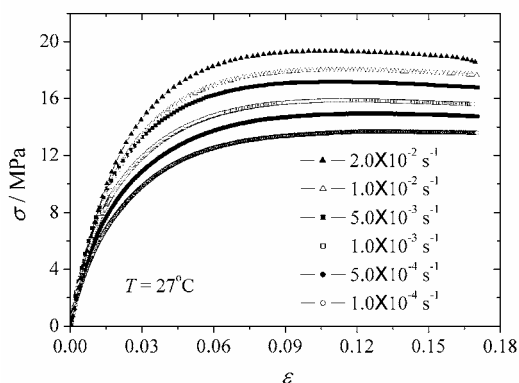


图 1.2.4 不同应变率下 HDPE 的应力-应变关系

进一步而言 ,加载速率影响材料强度。黏弹性材料的屈服应力幅值一般随应变率的增高而增大 ,这种屈服强度的率相关问题有着重要的理论意义与应用价值^[1.12]。

通常在准静态条件下研究材料的率效应。然而 ,某些材料及其结构承受应变率很高的冲击载荷 ,这类冲击荷载和黏弹性应力波等方面的内容 ,本书未予以讨论。某些基础性内容可见[1.2]~[1.4]及其中引述的文献。

1-2-3 频率相关性能

蠕变、应力松弛和应变率效应描述准静态载荷下一定或较长时间过程的黏弹性行为。然而 ,许多黏弹性材料及其结构所受的载荷随时间而交替变化 ,材料由于黏滞效应而与频率相关 ,产生能量耗散 ,这是黏弹性能的重要特征之一。

当弹性固体受到呈正(余)弦波变化的应力作用时 ,应变与应力同相地作正(余)弦波的变化(图 1.2.5a) ,此时没有能量损耗 ;对于理想黏性流体 ,从应力应变关系 $\sigma = \eta \dot{\epsilon}$ 可知 ,应变滞后相位 $\pi/2$,滞后时间为 $\pi/2\omega$,其中 ω 为频率 ,见图 1.2.5b。对一般线黏弹性体而

言 谐波应力下的应变响应则介于弹性固体与黏性流体之间 若用 δ 表示应变滞后相位差 , 则有 $0 < \delta < \pi/2$, 滞后时间为 δ/ω , 如图 1.2.5c 所示。

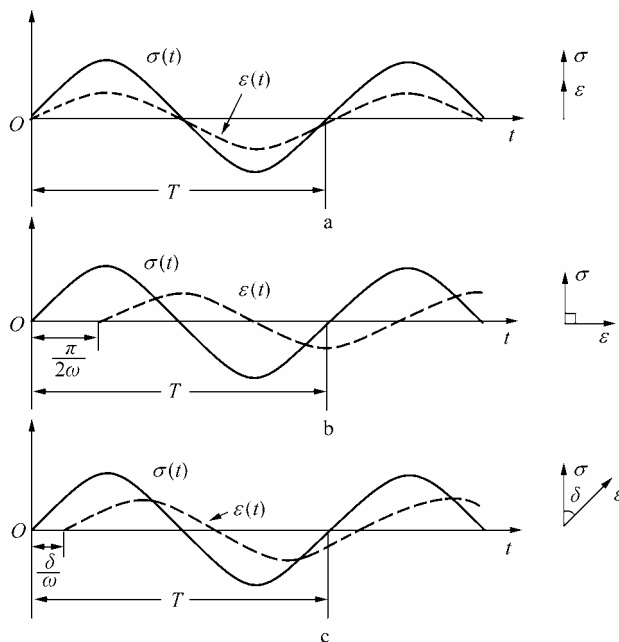


图 1.2.5 交变应力作用下的应变响应

各种轮胎和许多传动件工作运行中的发热现象 , 减振与隔音材料及其结构的阻尼作用 , 都与材料的黏弹性能密切相关。因此 , 研究材料在稳态谐振条件下的黏弹性力学行为有其理论意义与应用价值。这种稳态谐振条件下的黏弹性行为 , 有时习惯地称为黏弹性动态力学性能。

通常采用振动试验研究频率相关的黏弹性动态行为。为适应各种频率以及温度条件而有不同的振动试验方法 , 它们的共同点是研究黏弹性体在交变应力或交变应变作用下的稳态或非稳态响应 , 研究有关动态黏弹性能的物理量表述 , 常用复模量、复柔量和损耗因子 (滞后角的正切 $\tan\delta$) 表达 , 或以能量耗散及其有关参量来描述。

值得注意的是 , 复模量、复柔量和损耗因子与频率和物性密切相关且受温度影响 , 而与时间及应力或应变幅值无关 , 将在 § 2-5 和第八章中详细论述。涉及与应力或应变幅值有关的一些问题 , 在第九章末及第十一章中有所提及。

1-2-4 温度依赖性

物质的黏弹性力学性能显著地依赖于温度 , 因而有时需要研究变温黏弹性问题^[1.3, 1.13]。常温下蠕变不明显的材料 , 在较高温度时产生显著的变形或流动。温度变化很大甚至会改变物质的力学性态 , 物质呈固体、熔体或流体 , 随温度而定。

在一定的温度条件下 , 黏弹性行为的时间相关性相应于物质内部存在一种特征时间。聚合物的特征时间受温度、压力、溶剂浓度等许多因素的影响 , 其中温度影响最为突出。通常在一定的温度范围内 , 温度升高会加速蠕变和应力松弛的进程 , 即提高温度与延长时间有一定的等效性。人们首先在聚合物中发现了一类热流变简单材料 , 建立了时间-温度

等效原理,得到考虑温度的 WLF 方程^[1.7]。依据此原理,可以将不同温度下的蠕变曲线移位成某一参考温度下的主曲线,从而可以通过较高温度的短期蠕变或应力松弛行为来预测较低温度下较长期的蠕变行为或应力松弛过程。

测定材料在一定温度范围内动态力学性能的变化,常称为动态力学热分析,是研究聚合物及其复合材料黏弹性能的重要技术与方法^[1.14]。目前有的动态力学热分析仪能兼测材料的蠕变、应力松弛等准静态黏弹性能。

研究特征时间变化往往采用材料黏度的自由体积理论。值得注意的是,受载应力值也对材料特征时间产生影响,提高应力水平与升高温度对材料特征时间的影响相似,有一定的等效性。依自由体积理论,可导出温度-应力移位因子表达式,提出一种时间-温度-应力等效原理。应用此原理,可以将不同温度和各种应力水平下的蠕变曲线移位成某一参考温度和参考应力水平下的主曲线,从而可通过较高温度与应力时的短期蠕变行为预测较低温度和应力水平下较长期的蠕变行为,这对研究黏弹性材料及其结构的力学行为与寿命预估都有实际应用价值,将在 § 9-4 专题论述。

由试验观测所得的材料力学行为与现象,应该用相应的物理概念及相关的数学形式来描述。各种物质的黏弹性行为及材料各物理量之间的关系最终都要通过试验来确定或验证。

§ 1-3 黏弹性本构关系

连续介质力学的重要内容之一是研究物质的物理性态及其力学行为,探求物质性能的本构描述^[1.15~1.17]。为确定黏弹性体在外部因素作用下的内力状态与变形规律,像连续体力学其他分支一样,除考虑一般物质变形与运动必须遵循的质量守恒、动量平衡、动量矩平衡和能量守恒等基本原理和变形几何条件以外,需要给定物体的黏弹性本构关系。

物质本构关系是在材料试验与工程实践大量经验事实的基础上,将物质的力学与相关热电行为过程加以抽象化和公理化的数学表达。本构关系是描述物质宏观性质的数学模型,具体地说,通常是描述物质的应力-应变-时间-温度-电磁性等相互关系的方程式,因而又称之为材料本构方程。

为了研究线性黏弹性物体的本构关系,采用各种不同的途径与方法。例如:为了便于理解,可以从简化的机械模型出发,抽象地组合体现物质的时间相关性行为,从而表征应力-应变-时间关系的微分型本构方程;通过 Boltzmann 的线性叠加原理,通过遗传积分表述积分型线黏弹性本构关系;以不可逆热力学为基础,通过物质的热力学分析和内变量理论,经一定的物理假定和数学推演得出材料各物理量之间的微分方程组;从一般公理化原理出发的理性力学方法,得到黏弹性物质的各种本构关系;等等。

黏弹性物质及其本构关系的研究与近代连续介质力学的研究与发展有紧密的联系。近代连续介质力学按照较完备的公理体系对于各类物质探求物质客观性(空间参考标架无差异性)、物质对称性,以及热力学第二定律对本构方程的限制。按照这种公理化的方法^[1.15,1.16],在热力过程中,考虑诸如应力、热矢量、内能和熵的本构函数,现时刻 t 的本构函数值取决于物体所有质点 X 的运动历程 $x(X, \zeta)$ 和温度历史 $\theta(X, \zeta)$, $-\infty < \zeta \leq t$ 。例如, Cauchy 应力一般地写作:

$$\sigma(X, t) = h[x(X, \zeta), \theta(X, \zeta), X, t] \quad -\infty < \zeta \leq t$$

式中 $h[\cdot]$ 为张量值泛函。

讨论简单物质的一般率型热力本构关系时,通常将现时刻 t 的应力张量、热量矢量、内能密度和熵密度分别表示为变形、变形率、温度和位置历史的泛函。例如 应力 $\sigma(X, t)$ 为依赖于 t 时刻以前所有时刻的变形 C 、变形率 $\dot{C}$ 、温度 θ 和位置 X 的函数,表达为

$$\sigma(X, t) = \Re[C(t - \zeta), \dot{C}(t - \zeta), \theta(t - \zeta), X] \quad -\infty < \zeta \leq t$$

式中 $\Re$ 为决定于物性的一种本构泛函。类似地可表述热矢量、内能密度和熵密度的本构泛函。

考虑简单物质的纯力学效应,现时刻 t 的某种应力张量 S 由物性和应变 E 的历史所决定:

$$S(t) = \Im[E(t - \zeta), \dot{E}(t - \zeta), X] \quad -\infty < \zeta \leq t$$

这就是具有记忆的简单物质用应变表达应力的一般本构框架, $\Im$ 为决定于具体物性的一种本构函数,它将一个应力过程 $S(\zeta)$ 与应变历史 $E(\zeta)$ 及应变率历史 $\dot{E}(\zeta)$ 联系起来。然后再依据有关公理对本构关系进行讨论,可逐步决定和完善某种材料松弛型本构关系的具体数学形式。类似地,可以将应变表达为依赖于现时应力及应力状态历程的本构框架,研究蠕变型本构关系的表述,进而讨论确定材料的蠕变型本构方程。

黏弹性物质的力学行为及其记忆性能,体现为任一时刻的应力(应变)决定于此 prior 变形(应力)的历史及本构泛函的数学表达。各种黏弹性本构关系的数学框架只在反映普遍原理并符合客观物质实际时,才能更好地描述材料的力学行为。事实上,表征黏弹性材料常数和材料函数通常都是由实验决定的;有时采用一定形式的本构方程来求解某些黏弹性边值问题,最后也要经过相应的模型实验来判断所采用物性方程的正确程度。这在非线性黏弹性问题的研究中尤为突出。

本书在第二、第五章中将较系统地论述线黏弹性本构关系理论及其各种微分型和积分型的本构方程。关于非线性黏弹性本构关系,可以由推广线黏弹性或采用叠加非线性效应的方法,也可以按照近代连续体力学公理化的方法,本书第六章中将分别阐述相关的具体内容。

值得注意的是,本构关系有许多不同的形式,重要的在于确定本构方程中刻画物性的相应材料函数和材料常数。为了尽可能确定恰当的材料函数和参数,除了实验室研究以外,工程中还采用现场测试以及黏弹性参数反分析方法,如岩石与岩体黏弹性能分析与材料参数的取值,在第十二章有较详细的论述。

§ 1-4 黏弹性力学

1-4-1 黏弹性力学

黏弹性力学又称黏弹性理论,研究物质或材料的时间相关力学行为、本构关系和破坏过程,研究黏弹性物体与结构在外部作用下随时间变化的应力、变形和失效规律。黏弹性

理论是连续介质力学的基本内容,同时又是连续体力学的重要分支。因而,黏弹性力学体现力学、现代数学、物理、化学、材料科学和工程学科的相互渗透与交融,有新兴学科分支的特征,且与先导工业和高新技术有着密切的联系。

黏弹性力学包含两方面基本内容:一是物质的黏弹性能描述与本构关系;一是黏弹性物体边值问题的建立及其求解。黏弹性理论着重从宏观唯象的观点讨论物质的黏弹性能,表述黏弹性物体的力学行为与本构方程,有关材料组分与分子结构、微观机理等方面的内容一般不予讨论。研究黏弹性固体随时间变化的性能,一般讨论蠕变、应力松弛、等应变率或等应力率作用下的响应。载荷时间相关的动态力学行为方面有各种振动试验和冲击试验。振动试验可以考察材料黏弹性能对载荷频率的依赖关系,也能作为研究聚合物分子运动的手段。黏弹性能随温度而变化的试验具有重要意义。在论述材料黏弹性力学行为与本构关系的基础上,对黏弹性物体进行应力分析和变形计算,研究黏弹性力学问题的处理方法,是黏弹性理论与应用的重要内容。线黏弹性边值问题求解的基本步骤往往与弹性力学相仿,乃至有的条件下可以直接应用弹性力学解的形式,经过某些积分变换便得到黏弹性问题的解答;对于不便和不能利用弹性解的情况,将根据具体问题的特点采用相应的处理方法。实验研究在黏弹性力学中特别重要,通过实验研究确定材料函数与验证理论,调解工程设计与流变理论的某些矛盾,解决工程实际问题,推动着黏弹性理论与应用研究不断地向前发展。

回顾黏弹性力学的产生与发展可以看出,黏弹性理论在生产、技术与工程中不断发展和逐步完善,与近代连续介质力学研究的深入拓展密不可分。早在19世纪中叶,人们就发现经典理论未予阐明的力学性态。例如:Weber (1835)研究抽丝时发现弹性后效现象;Kelvin (1865)发现金属锌具有黏性;Maxwell^[1.18]进一步认为所有物体都有黏性,提出应力松弛时间的概念。Maxwell、Meyer (1874)和 Boltzmann^[1.19]建立线黏弹性理论雏形后,有几十年没有得到应有的重视。由于高分子材料的出现和塑料工业的兴起,Volterra^[1.20]关于各向异性固体黏弹性数学理论的研究与发展,20世纪初叶又逐渐激起人们研究黏弹性的兴趣。聚合物、橡胶、生物体、复合材料、智能材料、高温金属及其结构(如喷气发动机、涡轮透平、航天装置和核动力设备等)的日益发展与广泛使用,促进黏弹性理论及其应用研究不断深入。当今,线黏弹性理论已相当完整,并逐步在工程技术中得到广泛应用^[1.4~1.12]。20世纪中叶,在线黏弹性理论迅速发展和日益完善的同时,非线性黏弹性理论得到较快发展。例如:Leaderman (1943)在广泛研究纺织纤维蠕变和回复的基础上发现小应变时也产生非线性黏弹行为;Reiner (1945)对黏弹性流体的研究促进了流变学发展;Oldroyd^[1.21]论述本构方程应满足标架无关性原理,发展了非线性记忆理论;Truesdell和Noll用公理化体系建立物质的数学模型,概括与论述一般本构理论,将有记忆非线性简单材料的应力张量表示为位移梯度的泛函,导出了松弛型本构关系,类似地给出蠕变型本构描述;Green和Revin研究非线性应力本构的数学结构,采用多重积分型的非线性黏弹性本构表达^[1.22,1.23];Coleman和Noll^[1.24]提出的有限线性黏弹性理论在积分型本构关系发展中起着重要的作用;Pipkin (1964)、Lockett (1965)、Findley (1965)给出了若干具体的非线性黏弹本构关系;等等。此后,Lockett^[1.5]采用连续体力学的描述方法,简明地分析各种非线性理论,阐述了许多方面的试验研究方案;Findley等^[1.6]在系统介绍线黏弹性理论的基础上,相当系统地论述了非线性黏弹体的蠕变和应力松弛。

值得指出的是,作为流变学的重要内容,黏弹性理论在流变学中有着特殊的意义^[1.25, 1.26]。我国在黏弹性理论与应用研究的部分成果可参见[1.8]~[1.14] [1.25]~[1.29], [1.31]~[1.35]及其中所引注的相应文献。

基本假设 研究固态物质的黏弹性,通常采用连续性、均匀性和各向同性等基本假设,多限于小应变的情形。一般认为材料处于自然状态,即在外界因素作用之前,没有初应力和变形。由于通常从时间为零起考虑黏弹性受外部作用,因而常把 $t=0^-$ 的应力和应变均认作为零。此外,在本构关系研究中,一般未考虑材料老化的因素与影响。

1-4-2 本书内容概要

1. 基本内容

本书基本内容体系为:黏弹性本构关系-黏弹体力学问题的建立与解法;黏弹性专题;黏弹性理论在工程技术中的应用。第一至五章为线黏弹性力学。第四至第八各章均可各自独立为专题,便于适应不同读者的需要。这些专题是:线黏弹性结构分析,黏弹性与不可逆热力学,非线性黏弹本构方程,黏弹塑性本构关系,黏弹体的能量损耗。第一作者于1988年以前成稿的《黏弹性力学》一书(华中理工大学出版社,1990),先后有许多高等学校相关教师采用作为研究生教材或教学参考书,反应良好,本书第二、三、五至七章中的基础理论部分引用该书相应的基本内容。本书第九至十四章分别结合聚合物、橡胶、岩石和生物体的研究成果阐述黏弹性理论与应用,注重黏弹性理论与固体力学、损伤理论和断裂力学等分支学科结合,并与材料科学及工程技术学科相互渗透与交融。同时,第九至十四章结合聚合物、橡胶、岩石和生物体的内容同样可作为独立专题,供相关专业的读者参考。

本书基本理论与基础内容,着重于黏弹性物质力学行为、本构关系和黏弹性结构分析。

高聚物、塑料、橡胶、岩石、筋腱、骨骼等许多非金属材料的黏弹性研究有很大的发展,本书各相应章节注重这些材料时间相关力学行为的论述,突出实验内容特别是作者的研究结果。例如 高密度聚乙烯(HDPE)、聚丙烯(PP)的率效应、应变历史相关性 PP 和 HDPE 的非线性蠕变行为;线黏弹性本构微分关系;若干等效原理;聚合物蠕变银纹、损伤演化与裂尖银纹生长;带缺陷(孔洞、裂纹)ABS 形变过程的温度场;HDPE 薄板的延迟屈曲;岩石压缩蠕变与应力松弛,岩体及结构面剪切蠕变,工程岩石与岩体蠕变参数处理;软组织黏弹性本构方程的修正,松质骨黏弹性试验与理论分析。黏弹性理论一般从宏观唯象的观点讨论材料性能与本构关系,不涉及材料分子结构、微观机理与材料组分等方面内容。本书在聚合物的有关章节中,研究受载高聚物变形和破坏过程中的细观损伤演化,进行细观试验分析,宏细观相结合地探讨裂尖银纹的生长演化及断裂规律,探求高聚物时间相关的力学行为及其细观机理。许多材料可能是黏塑性、弹黏塑性甚至是黏弹塑性体,综合体现固体的流变特征。因此本书在相应章节中阐述有关黏弹塑性研究成果,以拓展和丰富黏弹性材料力学的内容。

黏弹体是耗散物质,本书对能量损耗、温度转化等问题进行了一系列的论述与探讨。例如:给出 Maxwell 体在矩形脉动周期应变下应力与能耗的完全解,比 Flügge^[1.2]给出的定点解有所进步,导出线黏弹体在三角形周期应变下的应力与能耗的解析公式,解决了一

些国际著名流变学家于当时(1980年)认为“不能得到解析表达”的难题;对一种非线性黏弹体导出周期应变下应力与能耗的理论解,纠正了J. Appl. Mech. 刊载论文中应力与能耗算式的错漏,给出较一般非谐变循环下的应力与能耗算式;研究颗粒增强橡胶复合材料动态力学性能和生热预报,黏弹性纤维复合材料有效阻尼矩阵与能耗;分析某些聚合物的形变热效应、热耗散与温度场;等等。

黏弹性结构分析是黏弹性力学的基本内容,从中阐述黏弹性理论与方法。在第四章的结构分析中,用黏弹性工程梁的解表述Timoshenko梁的有关解答,研究黏弹性薄板准静态弯曲、黏弹性圆板大挠度弯曲和黏弹性基支黏弹薄板的动力响应,论述黏弹性薄板蠕变与延迟屈曲。在工程结构计算方面,进行了三峡工程永久船闸高边坡流变分析,三峡工程地下厂房围岩稳定性黏弹性分析,黏弹性轮胎滚动接触动力分析,高密度聚乙烯板材焊接储液罐蠕变分析,等等。

2. 在工程技术中的应用

结合作者的工作成果,本书以国际国内相当重视的高聚物、岩石与岩体、橡胶与轮胎和一些生物体为例,说明黏弹性理论与应用研究体现固体力学、材料科学与工程技术的紧密结合,在工程技术中有重要的应用价值和广阔的应用前景。

材料是国民经济和社会发展的基础与支柱。新型材料研制、通用材料工程化与工程材料高性能化是当今的研究热点。变形与破坏规律以及结构与性能的关系是材料、化学和力学工作者共同关注的重要问题。黏弹性高聚物及其复合材料正越来越广泛应用于机械、化工、建筑、交通、信息及航空航天等领域,由于实现材料强韧化的要求迫切,这类材料及其结构的强度、刚度和稳定性研究非常重要^[1.31, 1.32]。在第九、十两章中阐述的聚合物黏弹性行为和含缺陷聚合物损伤与破坏,都是聚物流变学的基础内容。填充橡胶广泛应用于汽车、航天器等工程结构。一部普通汽车中使用的橡胶件达100多种,含轮胎、橡胶衬套、减振器等关键部件。橡胶构件的黏弹性力学行为影响汽车的操纵稳定性、振动、噪音和冲击,关系到节能与安全性能。对橡胶增强机理和黏弹性能的深刻理解,将为橡胶材料及橡胶制品的设计与分析提供科学的依据^[1.32]。第十一章有关黏弹性橡胶与轮胎的论述,探讨建立黏弹性橡胶与轮胎力学若干基本内容,属于黏弹性理论在技术与工程中的重要应用。

岩石与岩体的黏弹性能有其特殊的重要性。作为建筑物基础、边坡及围岩介质,岩石与岩体性能直接关系到结构与建筑物的安全。工程实践与研究表明,许多岩石工程的破坏与失稳,不是在开挖形成以后立即发生,岩体的应力和变形随时间变化和不断地调整,变形趋于稳定往往需延续一段较长时期^[1.33, 1.34]。由于坝基、边坡、地下洞室工程中出现各种与时间相关的现象或问题,在三峡等重大工程、石油二次开采、核废料储存以及西部大开发中,岩石与岩体的黏弹性及工程流变分析越来越受到岩石力学、工程地质和工程技术界的普遍重视。本书第十二、十三章特别论述岩石压缩蠕变与应力松弛,岩体及其结构剪切蠕变性能,岩石工程流变分析,三峡工程永久船闸高边坡和地下厂房围岩稳定性黏弹性分析。他们都是岩石工程流变学的重要内容。

生物医学的许多论著涉及黏弹性与固体流变性内容^[1.35, 1.36]。冯元桢指出,几乎所有的生物固体都是黏弹性体,只不过有的弹性较强,有的黏性较强,在程度上有所差别。生命与未来需要生物流变力学,各种生物体或人工制作器官的研究,往往应用黏弹性和黏弹

塑性理论。作为生物固体流变学的一些基本内容,本书最后一章介绍若干生物固体的黏弹性分析。

十多年来黏弹性力学研究有相当大的发展。黏弹性理论研究不断深入,涉及的材料、结构及其工程应用范围都在不断地拓宽。21 世纪的材料、能源、交通、生命与信息科学、相关先导工业与工程的需求以及国防军工的发展,必将促使黏弹性理论有更大的研究进展和更广阔的应用前景。

参 考 文 献

- 1.1 Gurtin M E, Sternberg E. On the Linear Theory of Viscoelasticity. Arch. Ration. Mech. Anal., 1962, 11: 291~356
- 1.2 Flügge W. Viscoelasticity. 2nd Ed. New York: Springer-Verlag, 1975
- 1.3 Christensen R M. Theory of Viscoelasticity. New York: Academic Press, 1982 (中译本:郝松林, 老亮译. 黏弹性力学引论. 北京: 科学出版社, 1992)
- 1.4 杨挺青. 黏弹性力学. 武汉:华中理工大学出版社, 1992 (重印)
- 1.5 Lockett F J. Nonlinear Viscoelastic Solids. London: Academic Press, 1972
- 1.6 Findley J D W N, Lai J S, Onaran K. Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials. North-Holland Pub. Co., 1976
- 1.7 Ferry J D. Viscoelastic Properties of Polymers. 3rd Ed. New York: John Wiley, 1980
- 1.8 穆霞英. 蠕变力学. 西安: 西安交通大学出版社, 1990
- 1.9 杨挺青. 含裂纹体蠕变断裂理论及其应用研究. 力学进展, 1999, 29(2): 178~186
- 1.10 杨挺青. 材料与结构蠕变研究近况. 力学进展, 2000, 30(3): 476~478; 结构蠕变研讨会综述. 国际学术动态, 2001, No.1: 49~52; 结构蠕变研究发展迅速. 国际学术动态, 1991, No.1: 51~53
- 1.11 王礼立, 施绍裘, 陈江英等. ZWT 非线性热黏弹性本构关系的研究与应用. 宁波大学学报(理工版), 2000, 13(Sup): 141~149
- 1.12 杨挺青. 黏弹塑性本构理论及其应用. 力学进展, 1992, 22: 10~19
- 1.13 张义同, 严宗达. 变温黏弹性的一般理论. 力学学报, 1993, 25(6): 685~696
- 1.14 过梅丽. 高聚物与复合材料的动态力学热分析. 北京:化学工业出版社, 2002
- 1.15 Eringen A C. Mechanics of Continua. Robert E Krieger Pub. Co. Inc., 1980 (中译本: 程昌钧, 俞焕然译. 连续统力学. 北京: 科学出版社, 1991)
- 1.16 匡震邦. 非线性连续介质力学. 上海: 上海交通大学出版社, 2002
- 1.17 黄克智, 黄永刚. 固体本构关系. 北京: 清华大学出版社, 1999
- 1.18 Maxwell J C. On the dynamical theory of gases. Phil. Trans. Royal. Soc. London, 1867, 157: 49~88
- 1.19 Boltzmann L. Zur theorie der elastischen nachwirkung. Sitzsber Akad. Wiss. Wien, 1874, 70: 275~306
- 1.20 Volterra V. Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations. New York: Dover, 1959
- 1.21 Oldroyd J G. On the formulation of rheological equations of state. Proc. Royal. Soc., 1950, A200: 523~541
- 1.22 Green A E, Rivlin R S. The mechanics of nonlinear materials with memory, part I. Arch. Ration. Mech. Anal., 1957, 1:1~21 ; part III. Arch. Ration. Mech. Anal., 1960, 4: 387~404
- 1.23 Green A E, Rivlin R S, Spencer A J M. The mechanics of nonlinear materials with memory, part II. Arch. Ration. Mech. Anal., 1959, 3: 82~90
- 1.24 Coleman B D, Noll W. Foundations of linear viscoelasticity. Rev. Modern Phys., 1961, 33: 239~249; Erratum: Foundations of linear viscoelasticity. ibid., 1964, 36: 1103
- 1.25 袁龙蔚. 流变力学. 北京: 科学出版社, 1986

- 1.26 杨挺青. 固体流变学的发展. 见: 庄逢甘主编. 现代力学与科技进步. 北京: 清华大学出版社, 1997. pp.356~360
- 1.27 张淳源. 黏弹性断裂力学. 武汉: 华中理工大学出版社, 1994
- 1.28 周光泉, 刘孝敏. 黏弹性理论. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1996
- 1.29 袁龙蔚. 含缺陷流变性材料破坏理论及其应用. 北京: 科学出版社, 2001
- 1.30 Ward I M. Mechanical Properties of Solid Polymers. 2nd Ed. Wiley-Interscience, 1983 (中译本: 徐懋, 漆宗能等译校. 固体高聚物的力学性能. 北京: 科学出版社, 1988)
- 1.31 罗文波. 高聚物形变热效应非线性黏弹性和银纹化研究. 华中科技大学博士学位论文, 2001
- 1.32 危银涛. 轮胎热-力学分析及耐久性评价: 哈尔滨工业大学博士学位论文, 1997; 橡胶类材料有限弹性与非弹性理论及能耗计算方法. 华中理工大学博士后研究报告, 2000
- 1.33 孙钧. 岩土材料流变及其工程应用. 北京: 中国建筑工业出版社, 1999
- 1.34 徐平. 工程岩体的流变性能及其应用. 华中科技大学博士学位论文, 2003
- 1.35 刚芹果. 松质骨的固液二相理论及其应用, 太原理工大学博士学位论文, 2002
- 1.36 冯元桢. 生物力学. 北京: 科学出版社, 1983

第二章 线黏弹性本构关系

线黏弹性物质的应力-应变-时间关系,主要有微分型和积分型两大类。材料的黏弹性力学行为通过时间相关的材料函数表达,考虑交变载荷作用的黏弹性性能,采用频率相关的复函数。本章阐述线黏弹性力学性能的模型表达、历程效应叠加原理和材料函数,论述一维微分型和积分型的本构关系,分析频率相关的材料复值函数,讨论各种材料函数之间的相互关系,介绍三维线黏弹性微分型与积分型的本构方程。

§ 2-1 黏弹性模型表述

微分型本构关系在黏弹性理论的早期发展中广泛应用,在求解某些问题时比较方便。这种应力应变关系的数学表述直接与力学模型相联系^[2.1~2.3]。

2-1-1 两基本模型

1. 基本元件

物质的线黏弹性质介于线弹性与理想黏性之间,因而可以用模型来表示和描述。这些力学模型由离散的弹性元件与黏性元件,即弹簧和阻尼器以不同方式组合而成。

弹性元件用弹簧表示,如图 2.1.1a,服从胡克定律

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.1.1a)$$

或

$$\tau = G\gamma \quad (2.1.1b)$$

式中, σ 、 τ 、 ε 和 γ 分别为正应力、剪应力、正应变和剪应变; E 、 G 分别为拉压弹性模量和剪切弹性模量,均为常数。弹簧的这种应力应变比例关系不随时间而发生变化,呈现瞬时的弹性变形和瞬时回复。

黏性元件即阻尼器,有时称为黏壶,如图 2.1.1b,服从牛顿黏性定律:

$$\tau = \eta_1 \dot{\gamma} \quad (2.1.2a)$$

或

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon} \quad (2.1.2b)$$

式中 η 或 η_1 为黏性系数; $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$ 为应变率。阻尼器的流变特性可用等应力和等应变作用下的准静态响应来说明。这里说的准静态是指突然施加于物体的载荷速率不激起动力响应。

在突加后保持恒定的应力 $\sigma = \sigma_0 H(t)$ 作用下,应变响应为 $\varepsilon = \sigma_0 t / \eta$,即呈稳态流动。其中 $H(t)$ 为 Heaviside 函数,又称单位阶跃函数,定义为

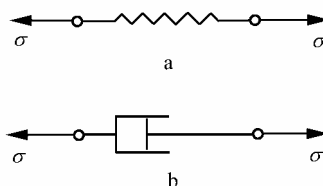


图 2.1.1 弹性元件与黏性元件

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

应该指出的是,关于 $H(t)$ 在 $t=0$ 时的取值,有时需根据具体问题的物理意义决定。

在阶跃应变 $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$ 的作用下,由式 (2.1.2a) 得应力响应为 $\sigma(t) = \eta \varepsilon_0 \delta(t)$, 式中 $\delta(t)$ 为单位脉冲函数,它满足两个条件:

$$\delta(t) = 0 \quad t \neq 0$$

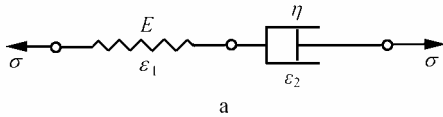
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1 \quad \varepsilon > 0$$

有时表示为 $\delta(0) \rightarrow \infty$ 。因此,阻尼器受阶跃应变作用时,应力为无限大脉冲而后又瞬即为零。由于不可能产生数值为无限大的力,因而不可能瞬时地对黏性元件实际施加有限应变。

弹性与黏性两基本元件可组成不同的黏弹性材料模型。最简单的两基本模型设想由一个弹簧和一个阻尼器串联或并联而成,这就是 Maxwell 模型和 Kelvin 模型,如图 2.1.2 所示。

2. Maxwell 模型

Maxwell 模型由弹性元件和黏性元件串联而成(图 2.1.2a)。设在应力 $\sigma(t)$ 作用下,弹簧和阻尼器的应变分别为 ε_1 和 ε_2 ,假定模型的总应变为



$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

利用式 (2.1.1a) 及 (2.1.2b), 得

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (2.1.3a)$$

或写作

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_1 \dot{\varepsilon} \quad (2.1.3b)$$

式中,模型参数 $p_1 = \eta/E$ 和 $q_1 = \eta$ 表示材料物性常数。式 (2.1.3b) 为 Maxwell 模型的应力应变时间关系式,即 Maxwell 体微分型本构方程。必须指出的是,根据模型总位移为弹性元件位移和阻尼器位移之和,同样得到式 (2.1.3b) 的本构方程,只不过其中的待定材料参数略有差别。

如果材料常数为已知,则可用式 (2.1.3a) 或 (2.1.3b) 来分析蠕变、回复以及应力松弛的过程与现象。

蠕变 在阶跃应力 σ_0 作用下,Maxwell 模型总应变为弹簧应变和阻尼器应变之和,即

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} t \quad (2.1.4)$$

此式可由微分方程 (2.1.3a) 导出。将 $t > 0$ 时的 $\dot{\sigma} = 0$ 代入式 (2.1.3a) 后积分得 $\varepsilon(t) = \sigma_0 t / \eta + C$, 式中 C 为积分常数。由 $t=0^+$ 瞬时弹性的初始条件 $\varepsilon(0^+) = \sigma_0 / E$, 求得 $C = \sigma_0 / E$ 。

于是,在突加恒应力 σ_0 作用下 Maxwell 模型的应变-时间关系为式 (2.1.4),它说明 Maxwell 体有瞬时弹性变形后,应变随时间呈线性增加,如图 2.1.3a 所示。在一定的应力作用下,材料可以产生渐进且不断增大的变形,这是流体的特征。因此,常把 Maxwell 模型表征的材料称为 Maxwell 流体。

回复 若在 $t=t_1$ 时刻卸除外力, 则原有 σ_0 作用下的稳态流动终止, 弹性变形部分立即消失, 即瞬时弹性回复为 σ_0/E , 余留在材料中的永久变形为 $\sigma_0(t_1-t_0)/\eta$, 图 2.1.3a。

应力松弛 在 $\varepsilon(t)=\varepsilon_0 H(t)$ 作用下 $t>0$ 时 $\dot{\varepsilon}=0$, 因而式 (2.1.3a) 变为齐次常微分方程, 它的解是 $\sigma=Ce^{-t/p_1}$ 。由初始条件 $t=0$, $\sigma(0^+)=E\varepsilon_0$ 求出 C 后, 得应力为

$$\sigma = E\varepsilon_0 e^{-t/p_1} \quad (2.1.5)$$

式中 $p_1=\eta/E$ 。式 (2.1.5) 描述 Maxwell 模型的应力松弛过程, 如图 2.1.3b 所示: 突加应变便有瞬时应力响应值 $E\varepsilon_0$; 在恒应变 ε_0 作用下, 应力不断减小, 随着时间无限增加, 应力逐渐衰减到零。这一松弛过程的应力变化率为

$$\dot{\sigma} = -\frac{\sigma(0)}{p_1} e^{-t/p_1} \quad (2.1.6)$$

显然 应力松弛开始时的变化率 (绝对值) 最大, 即 $t=0^+$ 时刻有 $\dot{\sigma}(0)=-\sigma(0)/p_1$ 。如果应力按照这一比率随时间而变化, 则表示为 $\sigma(t)=\sigma(0)-\sigma(0)t/p_1$, 即图 2.1.3b 中的直线, 当 $t=p_1$ 时应力为零。将这一特征时间记作: $\tau_R=p_1=\eta/E$ 称为 Maxwell 体的松弛时间。由式 (2.1.5) 可见, $t=\tau_R$ 时, $\sigma=0.37\sigma(0)$, 也就是说, 保持应变值 ε_0 到时刻 τ_R , 大部分的初始应力已经衰减, 因而 τ_R 为描述应力松弛的特征时间。显然 松弛时间由材料性质决定 黏度愈小, 松弛时间愈短; 高黏度流变体有较长的松弛时间; 而弹性固体 ($\eta \rightarrow \infty$) 则不呈现应力松弛现象。

3. Kelvin 模型

Kelvin 模型由弹簧和阻尼器并联而成, 也称 Kelvin-Voigt 模型, 图 2.1.2b。两个元件的应变都等于模型的总应变, 而模型的总应力为两元件应力之和, 即 $\sigma=\sigma_1+\sigma_2$ 。考虑式 (2.1.1) 和 (2.1.2), 得 Kelvin 模型的本构方程:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (2.1.7a)$$

或

$$\sigma = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon} \quad (2.1.7b)$$

式中模型参数 $q_0=E$, $q_1=\eta$ 。式 (2.1.7) 体现的黏弹性能如下所述。

蠕变 在恒定应力 σ_0 作用下, 由微分方程 (2.1.7a) 得

$$\varepsilon(t) = Ce^{-t/\tau_d} + \sigma_0/E \quad (2.1.8)$$

式中, $\tau_d=\eta/E$ 。蠕变的初始条件为 $t=0$, $\varepsilon(0)=0$ 。理由是, 如果 $\varepsilon(0^+)$ 为某一定值, 则

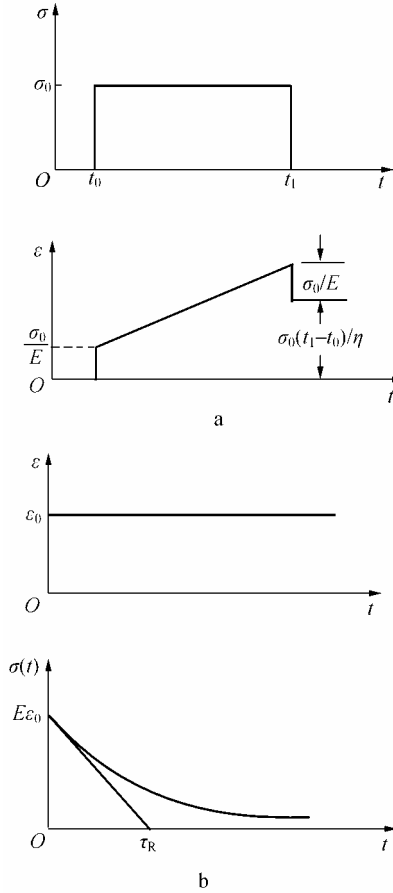


图 2.1.3 Maxwell 体蠕变和应力松弛

由于 $\varepsilon(0^-) = 0$ 而在 $t = 0$ 时刻有 $\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty$,这是式 (2.1.7) 所不能容许的 ,因而应有 $\varepsilon(0^+) = 0$ 。由式 (2.1.8) 求得积分常数 $C = -\sigma_0 / E$,于是 ,Kelvin 模型的蠕变表达式为 :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-t/\tau_d}) \quad (2.1.9)$$

可见 ,应变随时间增长而逐渐增加 ,当 $t \rightarrow \infty$ 时 , $\varepsilon \rightarrow \sigma_0 / E$,像一种弹性固体。因此 ,有时将 Kelvin 模型所代表的材料称为 Kelvin 固体。

但是 ,Kelvin 固体没有瞬时弹性 ,而是按照 $\dot{\varepsilon}(t) = \sigma_0 e^{-t/\tau_d} / \eta$ 的变化率发生形变 ,应变随时间逐渐趋于其渐近值 σ_0 / E 。初始的应变率为 $\dot{\varepsilon}(0) = \sigma_0 / \eta$,如果按此应变率发生变形 ,如图 2.1.4 中 OR 所示 ,当 $t = \tau_d = \eta / E$ 时 ,应变即达到 σ_0 / E 。因此 ,通常称 $\tau_d = \eta / E$ 为 Kelvin 体的延滞时间或延迟时间。

回复 式 (2.1.9) 给出应力 σ_0 作用下任一时刻 t 的应变值。当 $t = t_1$ 时 ,有

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-t_1/\tau_d}) \quad (a)$$

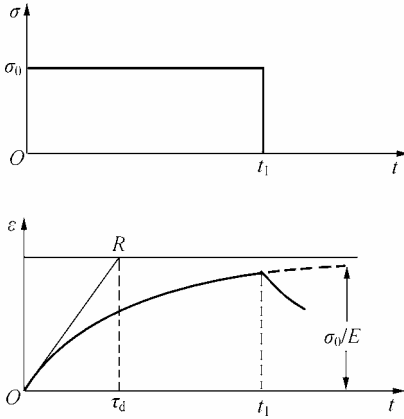


图 2.1.4 Kelvin 模型的蠕变与回复

若在 $t = t_1$ 时刻卸除 σ_0 ,则应变自式 (a) 所示的数值开始恢复。当 $t \geq t_1$ 时 ,由式 (2.1.7a) 可得到描述 Kelvin 模型回复过程的方程为 $E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} = 0$,它的解是

$$\varepsilon(t) = C_1 e^{-t/\tau_d} \quad t \geq t_1 \quad (b)$$

考虑回复初始条件式 (a) ,利用 $t = t_1$ 时的应变连续条件 ,有

$$C_1 e^{-t_1/\tau_d} = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-t_1/\tau_d})$$

由此求出 C_1 再代回式 (b) ,便得到回复过程的应变-时间关系 :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} (e^{t_1/\tau_d} - 1) e^{-t/\tau_d} \quad (2.1.10)$$

式 (2.1.10) 描述的是 $t = t_1$ 时刻卸除 σ_0 后 $t \geq t_1$ 的回复过程。显然 ,当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $\varepsilon \rightarrow 0$,体现出弹性固体的特征 ,只不过在这里是一种滞弹性回复。实际上 ,式 (2.1.10) 表述在应力 $\sigma(t) = \sigma_0 H(t) - \sigma_0 H(t - t_1)$ 作用下的应变 ,可以由不同时刻开始的两个蠕变过程叠加而得 ,即在式 (2.1.9) 表示的蠕变方程中 ,叠加一个 t_1 时刻作用应力为 $-\sigma_0 H(t - t_1)$ 所产生的蠕变。后者根据式 (2.1.9) 表示为

$$\varepsilon(t) = \frac{-\sigma_0}{E} (1 - e^{-(t-t_1)/\tau_d}) \quad (c)$$

将式 (c) 和式 (2.1.9) 相加 ,便得到回复过程的应变-时间关系式 (2.1.10)。

值得注意的是 ,上述分析中虽然 $t > t_1$ 时应力为零 ,但材料中的应变并不为零 ,它与时间有关而且依赖于加载历程 ,这说明材料是有记忆的。此外 ,我们采用式 (2.1.9) 表示出式 (c) ,说明像材料性质这些客观的物理量不因观察者或所用的时钟不同而改变 ,这是采用了连续体力学本构理论中的公理。

应力松弛 Kelvin-Voigt 模型不能体现应力松弛过程,因为阻尼器发生变形需要时间,要有应变率 $\dot{\varepsilon}$,才有应力 σ ,所以,当应变维持常量 ε_0 时,阻尼器不受力,全部应力由弹簧承受, $\sigma = E\varepsilon_0$ 。另一方面,作用阶跃应变 $\varepsilon_0 H(t)$,则 $\dot{\varepsilon}(t) = \varepsilon_0 \delta(t)$,由应力应变关系式(2.1.7),可得

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 H(t) + \eta\varepsilon_0 \delta(t) \quad (2.1.11)$$

其中右端第一项表示弹簧所受的应力,第二项则表示 $t = 0$ 时有无限大的应力脉冲。因而 $t = 0$ 时突加应变 ε_0 ,对 Kelvin 模型来说是没有意义的。

由此可知:Maxwell 和 Kelvin 两模型都是最简单的两参量黏弹性模型;Maxwell 模型能呈现应力松弛现象,但不便表示蠕变,只有稳态的流动;Kelvin 模型可以体现蠕变过程,却不能表示应力松弛。同时,两基本模型反映的应力松弛或蠕变过程都只有一个含时间的指数函数,不便表述聚合物等材料较为复杂的流变过程。因此,为了更好地描述实际材料的黏弹性行为,常用更多基本元件组合而成的其他模型。

2-1-2 三参量固体

三参量固体又称为标准线性固体,它可以由一个 Kelvin 模型和一个弹簧串联而成,如图 2.1.5 所示;也可由一个弹簧和一个 Maxwell 模型并联而成。这里以前者为例。显然,模型的应力 σ 和应变 ε 可用元件参量表示为:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \sigma &= E_1 \varepsilon_1 + \eta_1 \dot{\varepsilon}_1 \\ \sigma &= E_2 \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

下面采用 Laplace 变换与逆变换来推导三参量固体模型的本构关系。用 s 表示变换参量,函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换定义为^[2.4]

$$\bar{f}(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

或记作 $\mathcal{L}[f(t)]$ 。函数导数的 Laplace 变换公式由定义可得,例如:

$$\bar{\dot{\varepsilon}}(s) = \mathcal{L}[\dot{\varepsilon}(t)] = s\bar{\varepsilon}(s) - \varepsilon(0)$$

根据材料处于自然状态的假设,在本书中有关函数及其导数在 $t < 0$ 时均为零。因此,令 $\varepsilon(0) \equiv \varepsilon(0^-) = 0$, $\dot{\varepsilon}(0^-) = 0$,则有 $\bar{\dot{\varepsilon}}(s) = s\bar{\varepsilon}(s)$, $\bar{\ddot{\varepsilon}}(s) = s^2\bar{\varepsilon}(s)$,等。

对式(2.1.12)作 Laplace 变换,得

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{\sigma} &= (E_1 + \eta_1 s) \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\sigma} &= E_2 \bar{\varepsilon}_2 \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

将其中后两式求得的 $\bar{\varepsilon}_1$ 和 $\bar{\varepsilon}_2$ 代入第一式,然后作逆变换,得到

$$E_1 E_2 \varepsilon + E_2 \eta \dot{\varepsilon} = (E_1 + E_2) \sigma + \eta_1 \dot{\sigma} \quad (2.1.14)$$

写作标准形式

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon} \quad q_1 > p_1 q_0 \quad (2.1.15)$$

即三参量固体的本构方程。式中模型参数为:

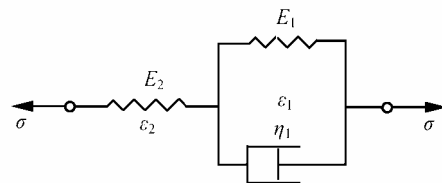


图 2.1.5 三参量固体模型

$$p_1 = \frac{\eta_1}{E_1 + E_2} ; q_0 = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} ; q_1 = \frac{E_2 \eta_1}{E_1 + E_2} \quad (2.1.16)$$

且由此关系式,必有 $q_1 > p_1 q_0$ 。

为了讨论模型的蠕变行为,考虑应力 $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$ 作用下的响应。将 $\bar{\sigma}(s) = \sigma_0/s$ 和 $\bar{\sigma}(s) = s\bar{\sigma}(s) = \sigma_0$ 代入式 (2.1.15) 的 Laplace 变换方程,有

$$\bar{\varepsilon}(s) = \frac{\sigma_0}{s} \left(\frac{1 + p_1 s}{q_0 + q_1 s} \right) = \frac{\sigma_0}{q_1} \left(\frac{1}{s \left(s + \frac{q_0}{q_1} \right)} + \frac{p_1}{\left(s + \frac{q_0}{q_1} \right)} \right)$$

其中把有理分式化为简分式,为的是便于查表进行 Laplace 逆变换^[2.4]。记 $q_0/q_1 \equiv 1/\tau_1$, 将 $\bar{\varepsilon}(s)$ 进行反变换,得到

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{q_1} \left[\tau_1 (1 - e^{-t/\tau_1}) + p_1 e^{-t/\tau_1} \right] = \sigma_0 \left[\frac{p_1}{q_1} e^{-t/\tau_1} + \frac{1}{q_0} (1 - e^{-t/\tau_1}) \right] \quad (2.1.17)$$

或

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_2} + \frac{\sigma_0}{E_1} (1 - e^{-t/\tau_1}) \quad (2.1.18)$$

式中, $\tau_1 = q_1/q_0 = \eta_1/E_1$ 即延迟时间。由式 (2.1.18) 可见,三参量固体具有瞬时弹性和稳态的渐近值:

$$\varepsilon(0^+) = \frac{\sigma_0}{E_2} \quad (2.1.19a)$$

$$\varepsilon(\infty) = \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 E_2} \sigma_0 = \frac{\sigma_0}{E_\infty} \quad (2.1.19b)$$

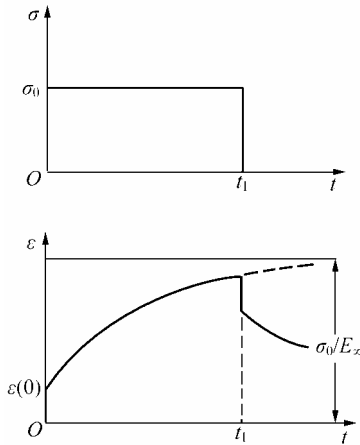


图 2.1.6 三参量固体的蠕变与回复

三参量固体的蠕变表达式 (2.1.18) 如图 2.1.6 所示,实际上是由弹簧和 Kelvin 模型的应变相加而得。

在 $t = t_1$ 时刻作用一个应力 $-\sigma_0 H(t - t_1)$, 则它所产生的应变响应为

$$\varepsilon'(t) = \frac{-\sigma_0}{E_\infty} + \frac{\sigma_0}{E_1} e^{-(t-t_1)/\tau_1}$$

因此,在 $t = t_1$ 时刻卸除应力后,回复过程的应变为

$$\varepsilon^r(t) = \varepsilon(t) + \varepsilon'(t) = \frac{\sigma_0}{E_1} \left[e^{-(t-t_1)/\tau_1} - e^{-t/\tau_1} \right] \quad (2.1.20)$$

值得注意的是,式 (2.1.20) 与描述 Kelvin 体回复过程的式 (2.1.10) 相同,这是因为弹簧 E_2 的瞬时应变消失以后,三参量固体模型已等效于 Kelvin 模型。当 $t > t_1$ 时,式 (2.1.20) 表示的回复过程与式 (2.1.10) 一样。

为了分析应力松弛现象,将 $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$ 代入式 (2.1.15) 并进行 Laplace 变换,有

$$\bar{\sigma}(s) = \frac{\varepsilon_0}{p_1} \left[\frac{q_1 - p_1 q_0}{(1/p_1) + s} + \frac{p_1 q_0}{s} \right]$$

逆变换后,整理得