模 糊 多 准 则 决 策
理 论 与 应 用

李 荣 钧 著

科 学 出 版 社

2 0 0 2

内 容 简 介

本书是关于模糊多准则决策理论的一部专著，系统论述了国内外在此领域的最新研究成果，包括作者本人的研究工作．全书共分八章．前两章介绍模糊决策理论基础，后六章介绍模糊集的比较和排序，模糊多属性决策，模糊群决策，模糊多目标决策，模糊系统优化设计，模糊决策支持系统与模糊专家系统等．

本书既注重数学上的严谨，又强调对决策模型的分析与计算，有助于从事实际开发人员的学习与使用．

本书适合于大专院校运筹学、管理科学、系统工程学等专业的学生和教师与工程技术人员使用与参考．

图书在版编目(CIP)数据

模糊多准则决策理论与应用/李荣钧著．—北京：科学出版社，2002.2

ISBN 7-03-009720-3

Ⅰ．模…　Ⅱ．李…　Ⅲ．决策论　Ⅳ．O225

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 065026 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2002 年 2 月第　一　版	开本：850×1168　1/32
2002 年 2 月第一次印刷	印张：16
印数：1—2 000	字数：418 000

定价：　20.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉）

前　　言

模糊多准则决策是近年来国际运筹学界极其活跃的研究领域之一,也是模糊集理论诞生以来应用最为成功的领域之一.模糊多准则决策涉及的范围十分广泛,各国学者在这一领域已经取得了大量的研究成果,但也存在着不少相互矛盾的结论和某些悬而未决的问题.因此,有必要对国际学术界在该领域的研究现状和发展趋势作出系统性的总结和分析.

迄今为止,国内外还没有一部对模糊多准则决策问题进行综合性研究的学术专著问世.虽然许多关于模糊数学的书籍都或多或少地介绍了模糊多准则决策的基本原理与方法,但由于各自的研究目的和撰写角度不同,现有教材和著作对模糊多准则决策的理论和方法都涉入不深.

作者自 1986 年以来,一直从事模糊决策的理论和应用研究.本书是作者在美国堪萨斯州立大学学习和工作的 10 年间以及归国后 3 年来关于模糊多准则决策研究的系统总结.书中介绍了国际学术界在这一领域的最新研究成果,并对各种观点和方法进行了深入的比较和分析.希望它对推动我国模糊多准则决策的研究能有所帮助.

全书共分八章.除第一章绪言和第二章模糊决策基础外,后面的六章分别对模糊集的比较与排序、模糊多属性决策、模糊多属性群决策、模糊多目标决策、模糊系统优化设计和模糊决策支持系统与模糊专家系统六个专题展开了全面系统的分析与讨论.这些专题内容可以相互独立、自成体系,但彼此之间存在着不可分割的必然联系.其中,模糊集的比较与排序可视为模糊多属性决策的基础;模糊群决策是模糊多属性决策的扩展;它们都属于离散空间中

模糊多准则决策的范畴.与之对应,模糊多目标决策和模糊系统优化设计是连续空间中的模糊多准则决策.前者为系统优化问题,后者是优化系统问题.两者均以模糊数学规划为基础.而模糊决策支持系统与模糊专家系统是模糊多准则决策发展的必然手段和结果.书中的许多问题在国内还是第一次公开探讨的,相应内容在此前的文献中尚未触及.也希望能藉此引起各界同仁的兴趣和注意,以期在模糊多准则决策领域的研究取得更大的突破和进展.

本书的写作特点是在注重数学概念和基本原理的同时,更强调对决策模型的具体分析和计算方法,以便于从事模糊技术开发的读者学习或作为工具书使用.另一方面,它也可以作为大学运筹学、管理科学、信息科学和系统工程学等专业高年级学生和研究生的参考教材.

李荣钧

2000 年 5 月

目　　录

第一章　绪　　言

1.1　模糊性与随机性

不确定性是决策分析中存在的普遍现象.传统的决策理论在解决不确定性问题时运用的唯一数学工具是概率统计分析,因而不确定性决策问题的传统模型都是单一的随机模型.这样处理的前提是假定决策中的不确定性事件,不论其性质与表现形式如何,都是某种随机因素影响的结果.但是,随着模糊集理论的产生和发展,人们越来越认识到这种把不确定性等同于随机性的做法是不切合实际的.

经验告诉我们,事件的不确定性有两种不同的表现形式.一种是事件是否发生的不确定性,即通常所说的随机性;另一种是事件本身状态的不确定性,我们称为模糊性.对前者而言,事件是否发生虽难预知,但事件本身的状态是清楚的.如投掷一枚硬币,哪面朝上事先并不知道,但每次投掷的结果决不含糊,不是国徽朝上,就是国徽不朝上,这两种情形,非此即彼,没有第三种可能.随机现象的这种性质在数学上被称为排中性.但对后者而言,问题不在于事件发生与否,而在于事件本身的状态不很分明,致使不同的人观察同一事件会有不同的感觉,因而得出不同的结论.如对某地一次降雨量的调查,该次降雨是一个已经发生的客观事实,通过测量,不难用某一种计量单位把降雨量表示出来.但要据此把它严格地界定为是大雨、中雨或小雨时,则往往模棱两可,叫人难以决断.因为通常意义下的大、中、小雨并没有也不可能有一个非常精确的划分标准.生活中,类似这样的事例可以举出很多.诸如“高与矮”、“胖与瘦”、“大与小”、“远与近”、“美与丑”等没有确切界限的一些对立概念都是所谓的模糊概念,凡涉及模糊概念的现象被称为模

糊现象,包含模糊概念的事件都属于模糊事件.模糊事件的主要特性之一是不服从数学上的排中率.它不是非此即彼,而可以亦此亦彼,存在着许多、甚至无穷多的中间状态.

一般来说,随机性是一种外在因果的不确定性,而模糊性是一种内在结构的不确定性.从信息观点看,随机性只涉及信息的量,模糊性则关系到信息的含义.可以说,模糊性是一种比随机性更深刻的不确定性.在现实生活中,模糊性的存在比随机性的存在更为广泛.尤其是在主观认识领域,模糊性的作用比随机性的作用重要得多.

1.2 模糊集理论的产生与发展

既然模糊性是事物客观存在的一种属性,因此是可以描述的.为了从根本上揭示模糊性自身的规律,著名的美国控制论专家、加利福尼亚大学教授 L.A.Zadeh 通过对视为现代数学基础的集合论的考察,认识到传统数学与人脑思维的根本差别在于它们处理模糊信息的能力.他发现,集合论中严谨的公理体系实际上是扬弃了模糊性而抽象出来的.也正是在对模糊信息的处理方式上,数学与人脑思维开始了分离.正如控制论的创始人 R.Vena 所说,人脑较计算机优越之处在于它能够掌握并不完全明确的含混观念.事实上,人脑的思维、判断、推理在多数情况下都是基于非量化的、或是不精确的观测和规则作出的.

经典集合论中被讨论的元素,要么属于某个集合,要么不属于这个集合,两者必居其一.在与集合论相对应的二值推理逻辑中,一个命题或者是真,或者是假,也是两者必居其一.这种非此即彼、非真即假的绝对的思维方式由来已久,虽然对近代数学的产生与发展起了很大的作用,但也因此导致了由其自身逻辑引发的各种悖论.其中,最著名的悖论要数“秃子悖论”,这是古希腊学者就已经发现的存在于传统数学中的逻辑矛盾.此外,如 Russell 悖论、Contor 悖论等都是这种矛盾的反映.这些奇特悖论的出现,曾经使

数学界发生过混乱,甚至被不少数学家哀叹为“第三次数学危机”.但在那个时代,这些悖论对科学技术的发展还不会产生太大的影响,尽可以留给逻辑学家们去讨论.而进入20世纪后,随着系统科学和计算机科学的产生与发展,复杂性、精确性与模糊性相互间的矛盾表现得越来越尖锐,从理论上解决这些悖论所揭示的问题已经变得刻不容缓,不能再回避了,长期活跃于系统科学领域的Zadeh教授对此有充分的了解.他在清楚地认识到数学为什么会与人脑思维相分离和从什么地方开始分离的本质之后,重新把模糊性与数学统一在一起.但他不是让数学放弃其严格性去迁就模糊性,而是让数学回过头来吸收人脑处理模糊信息的能力,从而为数学的运用开辟了新的方向.

1965年,Zadeh首先提出了模糊集合的概念,用隶属函数来刻画元素对集合属于程度的连续过渡性,即元素从属于集合到不属于集合的渐变过程,将经典集合的二值逻辑$\{0, 1\}$推广到$[0,1]$区间内的连续值逻辑,从而诞生了模糊集合论,提供了对模糊现象进行定量描述和分析运算的方法.尽管模糊集合的概念早期曾遭到来自数学界,尤其是统计学界的种种批评,如“隶属函数是怎样确定的?”“如果模糊性可以用概率来表示,那么它与概率还有什么区别?”等等,但由于模糊事件在现实问题中客观存在,所以各国学者对于模糊集理论的研究兴趣不仅没有减弱,反而越来越浓厚.据统计,这期间发表的论文数量按指数函数的规律持续增加.1978年,Zadeh进一步提出与模糊集理论相辅相成的可能性理论,以说明随机性与模糊性的本质区别,被视为模糊集理论发展中的第二个里程碑.从此,这一研究模糊现象的新兴学科终于确立了它在现代科学理论中的应有地位,得到了人们的普遍重视,并在数理、经济、人文、工程等各个方面有了广泛的应用,发展十分迅速.

1.3 模糊集理论与决策科学

广义地讲,决策即是运筹.它涉及运筹学的各个方面,如规划、

博弈、排队、库存、网络等问题都属于决策科学的范畴.狭义地讲,决策论研究一类特殊的博弈活动,它是以决策者为一方,以环境为另一方的博弈.经典决策理论按照事物发生的可能性把决策划分为确定的和随机的两种类型,而完全忽略了决策中模糊性的存在.事实上,决策是人对事物的评价与选择.任何决策理论和方法都是建立在人类认识和人类活动的基础之上,反映了人类分析和处理事物的思辩过程.因此,决策是一门科学,但又是一门艺术.后者涉及到社会、心理、主观意愿和工作经验等多方面的因素,而这些因素又大都具有模糊特征与动态性质,故决策问题中的不确定性虽然包含随机性的成分,但更多地表现为模糊性,或者模糊性与随机性同时并存.

一般来说,决策分析中存在着三个基本的要素:一是可供选择的方案,在决策术语中称为策略,它是一个多元集合,在这一集合中蕴含着所要选定的目标.没有策略或只有一个策略的决策不构成决策分析;二是一组给定的约束条件,策略的选择与目标的追求都必须以满足约束条件为前提;三是一个已知的效用函数,藉以衡量每种策略的得失.在经典的决策模型中,各种数据和信息都被假定为绝对精确,目标和约束也都假定被严格地定义并有良好的数学表示.因而理论上存在着一个分明的解空间,找出其中的最优解,使系统的综合效用达到最大,便是通常"决策"的含义.但这种精确的数据结构和严格的优化准则往往令决策者们无所适从,因为实际问题中的目标函数、约束条件等很难用数学式表示得清清楚楚.著名的美国经济学家、1978 年诺贝尔经济学奖得主 H.Silmon 曾批评经典的决策模式过分地严格,实际上做不到.他建议用"满意"原则代替"优化"原则,从管理科学的角度对决策理论和方法提出了类似于模糊化的要求.

1970 年,享有"动态规划之父"盛誉的南加州大学教授 R.E. Bellman 与 L.A. Zadeh 一起在多目标决策的基础上,提出了模糊决策的基本模型.在该模型中,凡决策者不能精确定义的参数、概

念和事件等,都被处理成某种适当的模糊集合,蕴含着一系列具有不同置信水平的可能选择.这种柔性的数据结构与灵活的选择方式大大增强了模型的表现力和适应性,被以后的研究人员引为发展和推广模糊决策的基础.迄今为止,模糊集理论的应用已经渗透了决策科学的各个领域.无论是独裁决策还是群决策,是单一准则决策还是多准则决策,是一次性决策还是多阶段决策,或者是不同种类交叉的混合性决策,模糊集理论在决策思想、决策逻辑和决策技术等方面都发挥了重要的作用,并取得了良好的效果.以模糊集理论为基础研制的计算机软件,包括数据库决策支持系统和知识库专家系统也已投放市场,进入了商业应用的阶段.可以说,决策科学是年轻的模糊集理论在实际应用中最为成功的领域之一.其中,模糊多准则决策在决策科学中的研究尤其活跃,成果也尤其显著.

1.4　模糊多准则决策

随着现代企业规模的不断扩大和企业经营的多元化,企业的行为关系已变得越来越复杂.今天,企业的经济决策在许多情况下已不再是依据某个单一的准则,而不得不均衡考虑多种相互矛盾、相互制约的因素或目标.为此,企业家迫切需要一种新的决策模式来帮助他们处理日益复杂的经济决策问题.这正是过去30年中多准则决策理论和方法迅速发展的原因.

经典的多准则决策(MCDM)可以划分成两个重要的领域,即多属性决策(MADM)和多目标决策(MODM).这两种决策的主要差别在于:前者的决策空间是离散的,而后者的决策空间是连续的;本质上前者是研究已知方案的评价选择问题,后者是研究未知方案的规划设计问题.不过这样的区分也并非绝对,显然还存在着一些另外的情况.例如多目标的整数规划在原理上属于MODM的范畴,却具有离散的决策空间,表现出MADM问题的性质.但对于本书的目的来说,多属性决策和多目标决策的上述界定似乎

是适当的和充分的.

在数学规划中,多目标决策问题经常被称为“向量极大”问题,它是由 Kuhn 和 Tucker 在 1951 年首先提出的.由于目标之间的相互矛盾与相互制约,所以通常意义下的最优解在多目标决策情形下并不存在,取而代之的是一组适应约束条件而相对于不同目标互有优劣的有效解.如果决策者对于目标的偏好有更明确的表示,即预先指定他的“选择函数”,这或者是单个目标函数的加权组合,或者是关于理想解的某种距离,则可以进一步产生相对于决策者来说具有最大综合效用的折衷解.

多目标决策旨在解决给定系统的优化问题,如此得到的系统严格说来只是拘泥于现有条件的准优化系统,若能放宽条件,原系统就有进一步优化的余地.为此,如何从根本上设计一个优化的系统(De Novo 规划),近年来逐渐引起了人们的注意.虽然两种规划的模型与算法在形式上并无大的不同,但在观念上从“系统优化”到“优化系统”是一种突破与更新.

从多目标决策的有效解中确定折衷解的过程被视为多属性决策的实例之一.通常的多属性决策问题可以描述为:给定一组可能的方案 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,每个方案具有属性 $C_1, C_2, \cdots, C_m$,属性的权重分别是 $w_1, w_2, \cdots, w_m$,符合归一化条件 $w_1 + w_2 + \cdots + w_m = 1$.决策的目的是要找出 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中最满意的方案,记为 $A_{\max}$.由于各个方案在不同属性上的表现好坏不一,很少有某一个方案会是绝对的最优选择,因而必须确定一个决策者对属性的偏好结构,并对所有方案在每一属性上的表现进行综合评估.由此产生了多属性决策为数众多的模型和方法,它们的好坏和取舍很难一概而论,主要取决于问题本身和决策者的态度.

现实生活中多属性决策的决策者往往不是一人,而是多人.因此,多属性决策的模型和方法常常与群决策的模型和方法相结合,构成一类新的多属性、群决策的选择问题.

模糊集理论已经被广泛地应用到多准则决策的各类问题之

中.本书后面的各章将分别讨论模糊多属性决策(FMADM),模糊多属性群决策(FMAGDM),模糊多目标决策(FMODM),模糊优化系统设计(Fuzzy De Novo),和以模糊集理论为基础的决策支持系统(FDSS)与专家系统(FES).

第二章　模糊决策基础

2.1　模糊集理论基础知识

为了使本书自成体系,这一节先对模糊集理论的基础知识作一些必要的介绍.内容包括在以后各章中将会涉及的模糊集基本定义、定理和运算法则.更深层次的概念和原理,则在相应的章、节中另加说明.

2.1.1　模糊集合的基本定义

定义 2.1　论域 X 到[0,1]闭区间上的任意映射

$$\mu_{\tilde{A}}: X \to [0,1]$$

$$x \to \mu_{\tilde{A}}(x)$$

都确定 X 上的一个模糊集 $\tilde{A}$,$\mu_{\tilde{A}}$ 叫做 $\tilde{A}$ 的隶属函数,$\mu_{\tilde{A}}(x)$叫做 x 对 $\tilde{A}$ 的隶属度,记为

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}. \tag{2.1}$$

显然,模糊集 $\tilde{A}$ 完全由隶属函数 $\mu_{\tilde{A}}(x)$刻画.当 $\mu_{\tilde{A}}(x)=\{0,1\}$时,$\tilde{A}$ 退化为一个普通集 A,$\mu_{\tilde{A}}(x)$退化为特征函数 $C_A(x)$.

文献中还可以见到模糊集的另外一些表示方式.常见的主要有以下两种:

(1) 当论域 X 是有限集时,记 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$,则 X 上的模糊集 $\tilde{A}$ 可以写成

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i / x_i \quad 或 \quad \tilde{A} = \bigcup_{i=1}^{n} \mu_i / x_i, \tag{2.2}$$

这里的“$\sum$”和“$\cup$”并不是求和的意思，它们只是概括集合诸元的记号. $\tilde{A}$ 也可以写成序偶的集合，

$$\tilde{A}=\{(x_1,u_1),(x_2,u_2),\cdots,(x_n,u_n)\}. \tag{2.3}$$

例 2.1 设某单位 5 个成员 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 属于“年轻人”的程度分别为 0.4，0.7，0.4，0.9，1.0，则模糊集 $\tilde{Y}$=“年轻人”的表示式可写为

$$\tilde{Y}=0.4/x_1+0.7/x_2+0.4/x_3+0.9/x_4+1/x_5$$

或者

$$\tilde{Y}=\{(x_1,0.4),(x_2,0.7),(x_3,0.4),(x_4,0.9),(x_5,1)\}.$$

（2）当论域 X 是无限集时，X 上的模糊集 $\tilde{A}$ 可以改写为

$$\tilde{A}=\int_{x\in X}\mu_{\tilde{A}}(x)/x. \tag{2.4}$$

同样，这里的符号“$\int$”也不是积分的意思.

例 2.2 设 $X=R=\{$全体实数$\}$，$\tilde{A}$ 表示“X 中接近于 5 的数”，已知 $\mu_{\tilde{A}}(x)=(1+(x-5)^2)^{-1}$，则记

$$\tilde{A}=\int_R(1+(x-5)^2)^{-1}/x$$

或

$$\tilde{A}=\{(x,\mu_{\tilde{A}}(x))\mid x\in R,\ \mu_{\tilde{A}}(x)=(1+(x-5)^2)^{-1}\},$$

参见图 2.1.

定义 2.2 对于论域 X 上的模糊集 $\tilde{A}$，

（1）$\tilde{A}$ 是正则的（或称正规的），当且仅当

$$\sup\mu_{\tilde{A}}(x)=1,\ \forall x\in X.$$

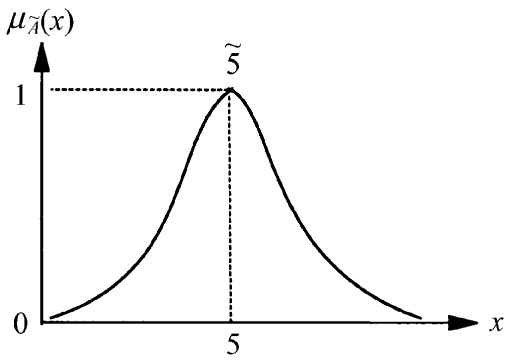

图 2.1　近似于 5 的实数

(2) $\tilde{A}$ 是凸的,当且仅当 $\forall\ x_1,\ x_2\in X,\ \lambda\in[0,1]$

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geqslant \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1),\ \mu_{\tilde{A}}(x_2)\},$$

(3) $\tilde{A}$ 的支撑集 $S(A)$是满足 $\mu_{\tilde{A}}(x)>0$ 的所有 $x\in X$ 的普通集,记为

$$S(A)=\{x\mid x\in X,\ \mu_{\tilde{A}}(x)>0\}.$$

(4) $\tilde{A}$ 的 α 截集 A_α 是满足 $\mu_{\tilde{A}}(x)>\alpha$ 的所有 $x\in X$ 的普通集,记为

$$A_\alpha=\{x\mid x\in X,\ \mu_{\tilde{A}}(x)>\alpha\}.$$

例 2.3　设 $X=\{1,2,3,4,5,6\}$, $\tilde{A}=\{(1,0.2),(2,0.5),(3,0.8),(4,1),(5,0.7),(6,0.3)\}$,则

(1) $\mu_{\tilde{A}}(4)=1$,所以 $\tilde{A}$ 是正规模糊集.

(2) 对任意 $x,\ a,\ b\in X,\ a<x<b$,有

$$\mu_{\tilde{A}}(x)>\min\{\mu_{\tilde{A}}(a),\ \mu_{\tilde{A}}(b)\}$$

所以 $\tilde{A}$ 是凸模糊集.

(3) $S(A)=\{1,2,3,4,5,6\}=X$.

(4) $A_0=A_{0.2}=S(A)=\{1,2,3,4,5,6\}$.

$A_{0.5}=\{2, 3, 4, 5\}$.

$A_{0.8}=\{3, 4\}$.

$A_1=\{4\}$.

定义 2.3 对于一个有限的模糊集 $\tilde{A}$,它的基数$|\tilde{A}|$被定义为

$$|\tilde{A}|=\sum_{x\in X}\mu_{\tilde{A}}(x) \tag{2.5}$$

而$\|\tilde{A}\|=|\tilde{A}|/|X|$叫做 $\tilde{A}$ 的相对基数.

例 2.4 设 $X=\{1, 3, 5, 7\}$, $\tilde{A}=0.3/1+0.5/3+1/5+0.8/7$,则

$$|\tilde{A}|=0.3+0.5+1+0.8=2.6,$$

$$\|\tilde{A}\|=2.6/16=0.1625.$$

由模糊集的定义可直接得到:$\forall x\in X$,

(1) $\tilde{A}$ 是空集,记为 $\tilde{A}=\varnothing$,当且仅当 $\mu_{\tilde{A}}(x)=0$.

(2) $\tilde{A}$ 等于 $\tilde{B}$,记为 $\tilde{A}=\tilde{B}$,当且仅当 $\mu_{\tilde{A}}(x)=\mu_{\tilde{B}}(x)$.

(3) $\tilde{A}$ 包含于 $\tilde{B}$ 中,记为 $\tilde{A}\subseteq\tilde{B}$, 当且仅当 $\mu_{\tilde{A}}(x)\leqslant\mu_{\tilde{B}}(x)$.

2.1.2 模糊集合的运算法则

与普通集合一样,模糊集合最基本的运算也是并、交、余三种,运算符号采用$\cup$,$\cap$,^{c}.

定义 2.4 对于论域 X 上的模糊集 $\tilde{A}$,$\tilde{B}$,

(1) $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 的并集 $\tilde{C}=\tilde{A}\cup\tilde{B}$ 也是 X 上的模糊集,其隶属函数 $\mu_{\tilde{C}}$ 被定义为

$$\mu_{\tilde{C}}(x)=\max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \forall x\in X.$$

(2) $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 的交集 $\tilde{D}=\tilde{A}\cap\tilde{B}$ 也是 X 上的模糊集,其隶属函数 $\mu_{\tilde{D}}$ 被定义为

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \ \forall x \in X.$$

（3）$\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 的余集 $\tilde{A}^c$ 也是 X 上的模糊集，其隶属函数 $\mu_{\tilde{A}^c}$ 被定义为

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \ \forall x \in X.$$

例 2.5　设 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，$\tilde{A}=0.3/1+0.5/2+0.8/3+0.4/4+0.1/5$，$\tilde{B}=0.2/3+0.3/4+0.9/5+0.5/6$，则

（1）$\tilde{A}\cup\tilde{B}=0.3/1+0.5/2+0.8/3+0.4/4+0.9/5+0.5/6$.

（2）$\tilde{A}\cap\tilde{B}=0.2/3+0.3/4+0.1/5$.

（3）$\tilde{A}^c=0.7/1+0.5/2+0.2/3+0.6/4+0.9/5+1/6+1/7+1/8$.

例 2.6　以年龄为论域，Zadeh 曾分别定义“年老”（记为 $\tilde{O}$）与“年轻”（记为 $\tilde{Y}$）两个模糊集的隶属函数如下：

$$\mu_{\tilde{O}}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 50, \\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & x > 50 \end{cases}$$

和

$$\mu_{\tilde{Y}}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 25, \\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & x > 25. \end{cases}$$

则模糊集“年老或年轻”（$\tilde{O}\cup\tilde{Y}$）的隶属函数为

$$\mu_{\tilde{O}\cup\tilde{Y}}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 25, \\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & 25 < x < 51, \\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & x \geqslant 51, \end{cases}$$

而模糊集“年老又年轻”($\tilde{O}\cap\tilde{Y}$)的隶属函数为

$$\mu_{\tilde{O}\cap\tilde{Y}}(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 50,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50< x< 51,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & x\geqslant 51.\end{cases}$$

模糊集“不年轻”($\tilde{Y}^c$)的隶属函数为

$$\mu_{\tilde{Y}^c}(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 25,\\ 1-\left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & x>25.\end{cases}$$

普通集合的并、交、余运算满足幂等律、交换律、结合律、吸收律、分配律、复原律、对偶律和补余律,构成经典的布尔代数.类似地,模糊集合也有以下定理.

定理 2.1 模糊集的并、交、余运算具有下列性质:

(1) 幂等律 $\tilde{A}\cup\tilde{A}=\tilde{A}$, $\tilde{A}\cap\tilde{A}=\tilde{A}$,

(2) 交换律 $\tilde{A}\cup\tilde{B}=\tilde{B}\cup\tilde{A}$, $\tilde{A}\cap\tilde{B}=\tilde{B}\cap\tilde{A}$,

(3) 结合律 $(\tilde{A}\cup\tilde{B})\cup\tilde{C}=\tilde{A}\cup(\tilde{B}\cup\tilde{C})$,

$(\tilde{A}\cap\tilde{B})\cap\tilde{C}=\tilde{A}\cap(\tilde{B}\cap\tilde{C})$,

(4) 吸收律 $(\tilde{A}\cup\tilde{B})\cap\tilde{A}=\tilde{A}$, $(\tilde{A}\cap\tilde{B})\cup\tilde{A}=\tilde{A}$,

(5) 分配律 $\tilde{A}\cap(\tilde{B}\cup\tilde{C})=(\tilde{A}\cap\tilde{B})\cup(\tilde{A}\cap\tilde{C})$,

$\tilde{A}\cup(\tilde{B}\cap\tilde{C})=(\tilde{A}\cup\tilde{B})\cap(\tilde{A}\cup\tilde{C})$,

(6) 复原律 $(\tilde{A}^c)^c=\tilde{A}$,

(7) 对偶律(德•摩根律)$(\tilde{A}\cup\tilde{B})^c=\tilde{A}^c\cap\tilde{B}^c$,

$$(\tilde{A}\cap\tilde{B})^c=\tilde{A}^c\cup\tilde{B}^c,$$

但补余律不成立,即 $\tilde{A}\cup\tilde{A}^c\neq X$, $\tilde{A}\cap\tilde{A}^c\neq\varnothing$,因为当 $0<\mu_{\tilde{A}}(x)<1$ 时,恒有

$$\max\{\mu_{\tilde{A}}(x),1-\mu_{\tilde{A}}(x)\}<1,\ \min\{\mu_{\tilde{A}}(x),1-\mu_{\tilde{A}}(x)\}>0.$$

因此，$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{A}^c}(x)$不恒等于 1，$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{A}^c}(x)$不恒等于 0.如果将补余律换为

$$\tilde{A}\cup\tilde{A}^c=\max\{\tilde{A},\tilde{A}^c\},\ \tilde{A}\cap\tilde{A}^c=\min\{\tilde{A},\tilde{A}^c\},$$

与其他规律一起，则构成所谓的德·摩根软代数.模糊集合的运算服从德·摩根软代数的法则.

此外，模糊决策中比较常见的模糊集运算还有：

(1) 代数和 $\tilde{A}+\tilde{B}$，$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-\mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x)$，

(2) 代数积 $\tilde{A}\tilde{B}$，$\mu_{\tilde{A}\tilde{B}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x)$，

(3) 有界和 $\tilde{A}\oplus\tilde{B}$，$\mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}}(x)=\min\{1,\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)\}$，

(4) 有界积 $\tilde{A}\odot\tilde{B}$，$\mu_{\tilde{A}\odot\tilde{B}}(x)=\max\{0,\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-1\}$，

(5) 幂乘 $\mu_{\tilde{A}^n}=\{(x,[\mu_{\tilde{A}}(x)]^n)\mid x\in X\}$.

例 2.7　设 $\tilde{A}=\{(3,0.5),(5,1),(7,0.6)\}$，$\tilde{B}=\{(3,0.4),(7,0.8)\}$，则

(1) $\tilde{A}+\tilde{B}=\{(3,0.7),(5,1),(7,0.92)\}$，

(2) $\tilde{A}\tilde{B}=\{(3,0.2),(7,0.48)\}$，

(3) $\tilde{A}\oplus\tilde{B}=\{(3,0.9),(5,1),(7,1)\}$，

(4) $\tilde{A}\odot\tilde{B}=\{(7,0.4)\}$，

(5) $\tilde{A}^2=\{(3,0.25),(5,1),(7,0.36)\}$.

2.1.3　分解定理与扩张原则

分解定理与扩张原则是模糊集理论的重要组成部分.前者把模糊集合转化为普通集合来处理，而后者把普通集合的分析方法引申到模糊集合之中.

定理 2.2(**分解定理**)　设 $\tilde{A}$ 为论域 X 上的模糊集，A_α 是 $\tilde{A}$

的 α 截集，α∈[0,1]则

$$\tilde{A}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha A_\alpha, \tag{2.6}$$

其中 αA_α 是常数与普通集合的数量积，它们构成 X 上一个特殊的模糊集，其隶属函数被定义为

$$\mu_{\alpha A_\alpha}(x)=\begin{cases}\alpha, & x\in A_\alpha,\\ 0, & x\notin A_\alpha.\end{cases} \tag{2.7}$$

例 2.8 设 $\tilde{A}=0.3/x_1+0.7/x_2+1/x_3+0.5/x_4+0.1/x_5$，则

$A_{0.1}=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$,

$0.1A_{0.1}=0.1/x_1+0.1/x_2+0.1/x_3+0.1/x_4+0.1/x_5$,

$A_{0.3}=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,

$0.3A_{0.3}=0.3/x_1+0.3/x_2+0.3/x_3+0.3/x_4$,

$A_{0.5}=\{x_2, x_3, x_4\}$,

$0.5A_{0.5}=0.5/x_2+0.5/x_3+0.5/x_4$,

$A_{0.7}=\{x_2, x_3\}$,

$0.7A_{0.7}=0.7/x_2+0.7/x_3$,

$A_1=\{x_3\}$,

$1.0A_1=1/x_3$,

$$\begin{aligned}\Rightarrow \bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha A_\alpha &= 0.1A_{0.1}\cup 0.3A_{0.3}\cup 0.5A_{0.5}\cup 0.7A_{0.7}\cup 1A_1\\ &= 0.3/x_1+0.7/x_2+1/x_3+0.5/x_4+0.1/x_5\\ &= \tilde{A}.\end{aligned}$$

定理 2.3(**扩张原则**)　设论域 X 是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的直积空间，$\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \cdots, \tilde{A}_n$ 分别为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 上的模糊集．f 是从论域 X 到论域 Y 的映射，$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$．则由映射得到的 $\tilde{A}_1$，$\tilde{A}_2, \cdots, \tilde{A}_n$ 的像 $f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \cdots, \tilde{A}_n)$ 是论域 Y 上的模糊集 $\tilde{B}$，定义为

$$\tilde{B} = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) \mid y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X\},$$

其中

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in f^{-1}(y)} \min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \cdots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)\}, & f^{-1}(y) \neq \varnothing, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}$$

这里 $f^{-1}(y)$ 是 f 的逆射．

当 $n=1$ 时，定理 2.3 给出的扩张原则可以简化为

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) \mid y = f(x),\ x \in X\}, \tag{2.8}$$

其中

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x), & f^{-1}(y) \neq \varnothing, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

例 2.9　设 X, Y 为实数域，X 上的模糊集 $\tilde{A} = 0.4/-2 + 0.8/-1 + 1/0 + 0.7/1 + 0.5/2$，从 X 到 Y 的映射 $f: x \to x^2$，则

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = 1/0 + 0.8/1 + 0.5/4,$$

参见图 2.2．

2.1.4　模糊数和模糊算术

定义 2.5　一个模糊数 $\tilde{N}$ 是定义在实数域 R 上的正规凸模

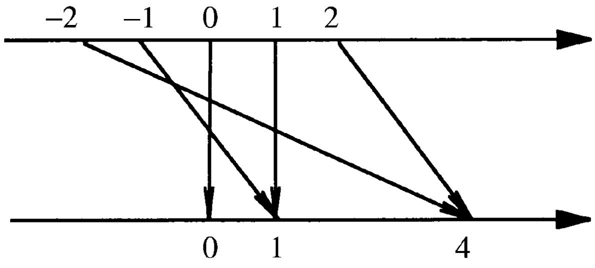

图 2.2 模糊集的扩张原则

糊集,且满足以下条件:

(1) 存在唯一的点 $x_0 \in R$,具有隶属度 $\mu_{\widetilde{N}}(x_0)=1$($x_0$ 被称为 $\widetilde{N}$ 的平均值),

(2) 隶属函数 $\mu_{\widetilde{N}}(x)$是左、右连续的.

模糊数 $\widetilde{N}$ 的一般表示式可以写为

$$\mu_{\widetilde{N}}(x)=\begin{cases} L(x), & l \leqslant x \leqslant m, \\ R(x), & m \leqslant x \leqslant r, \end{cases} \tag{2.9}$$

式中,$L(x)$为增函数,右连续,且 $0 \leqslant L(x) \leqslant 1$; $R(x)$为减函数,左连续,且 $0 \leqslant R(x) \leqslant 1$.如果 $L(x)$与 $R(x)$均为线性函数,则 $\widetilde{N}$ 被称为三角模糊数,简记为 $\widetilde{N}=(l, m, r)$,参见图 2.3.

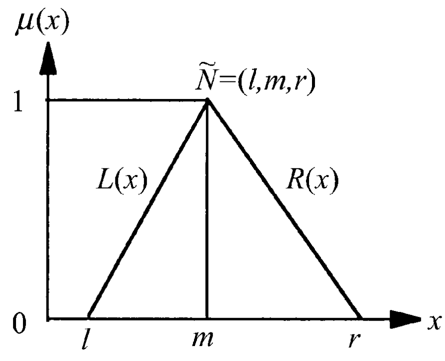

图 2.3 三角模糊数

应该指出,上述定义在实际情况中根据需要常常被修改,文献中多见的另一类模糊数具有梯形隶属函数.但严格说来,梯形模糊集通常被视为模糊区间.

定义 2.6 模糊数 $\widetilde{N}$ 被称为模糊正数(或负数),如果 $\mu_{\widetilde{N}}(x)=0$, $\forall x<0$(或 $\forall x>0$).

如抽象运算符号 $*$ 表示普通的四则运算之一,即 $* \in \{+$,

$-$，$\times$，$\div$}，用（$*$）表示相应的模糊运算，则根据扩张原理，模糊数的四则运算可以被确定如下：

定理 2.4 设 $\widetilde{M}$，$\widetilde{N}$ 为两个模糊数，对任意二元运算（$*$）：$R(*)R\rightarrow R$，模糊数 $\widetilde{M}(*)\widetilde{N}$ 的隶属函数被给定为

$$\mu_{\widetilde{M}(*)\widetilde{N}}(z)=\sup_{x,\ y:\ z=x*y}\min\{\mu_{\widetilde{M}}(x),\ \mu_{\widetilde{N}}(y)\}. \quad (2.10)$$

上面的定理给出了模糊数四则运算的 max-min 卷积形式．但式(2.10)的实际操作并不方便，$\widetilde{M}(*)\widetilde{N}$ 之隶属函数的实际确定常在 $\widetilde{M}$，$\widetilde{N}$ 的 α 截集上进行．依据分解定理，我们有

$$\widetilde{M}=\int_{\alpha\in[0,1]}\alpha M_\alpha=\int_{\alpha\in[0,1]}\alpha[m_\alpha^L,\ m_\alpha^R] \quad (2.11)$$

和

$$\widetilde{N}=\int_{\alpha\in[0,1]}\alpha N_\alpha=\int_{\alpha\in[0,1]}\alpha[n_\alpha^L,\ n_\alpha^R], \quad (2.12)$$

式中，m_α^L，n_α^L 和 m_α^R，n_α^R 分别表示模糊数 $\widetilde{M}$，$\widetilde{N}$ 的 α 截集的左、右边界．从式(2.10)不难导出

$$\begin{aligned}\widetilde{M}(*)\widetilde{N}&=\int_{\alpha\in[0,1]}\alpha[M(*)N]_\alpha\\&=\int_{\alpha\in[0,1]}\alpha([m_\alpha^L,\ m_\alpha^R](*)[n_\alpha^L,\ n_\alpha^R]). \quad (2.13)\end{aligned}$$

据此，可得到模糊数四则运算的具体表示式为：

(1) 模糊加法 $[M(+)N]_\alpha=[m_\alpha^L+n_\alpha^L,\ m_\alpha^R+n_\alpha^R]$，

(2) 模糊减法 $[M(-)N]_\alpha=[m_\alpha^L-n_\alpha^R,\ m_\alpha^R-n_\alpha^L]$，

(3) 模糊乘法 $[M(\times)N]_\alpha=[m_\alpha^L\times n_\alpha^L,\ m_\alpha^R\times n_\alpha^R]$，

(4) 模糊除法 $[M(\div)N]_\alpha=[m_\alpha^L/n_\alpha^R,\ m_\alpha^R/n_\alpha^L]$，$n_\alpha^L>0$．

如果 $\widetilde{M}=(m_L,\ m,\ m_R)$，$\widetilde{N}=(n_L,\ n,\ n_R)$是三角模糊数，则二者的和、差也是三角模糊数，记为

$$\widetilde{M}(+)\widetilde{N}=(m_L+n_L,\ m+n,\ m_R+n_R),\qquad(2.14)$$

$$\widetilde{M}(-)\widetilde{N}=(m_L-n_R,\ m-n,\ m_R-n_L).\qquad(2.15)$$

例 2.10（模糊数的乘积） 已知三角模糊数3和5的隶属函数分别为

$$\mu_3(x)=\begin{cases}x-2, & 2\leqslant x\leqslant 3,\\ -x/2+5/2, & 3\leqslant x\leqslant 5\end{cases}$$

和

$$\mu_5(x)=\begin{cases}x/2-3/2, & 3\leqslant x\leqslant 5,\\ -x+6, & 5\leqslant x\leqslant 6.\end{cases}$$

其 α 截集的表示式可以写成

$$\alpha=\begin{cases}3_\alpha^L-2,\\ -3_\alpha^R/2+5/2\end{cases}\quad 和\quad \alpha=\begin{cases}5_\alpha^L/2-3/2,\\ -5_\alpha^R+6,\end{cases}$$

并记为

$$3_\alpha=[3_\alpha^L,\ 3_\alpha^R]=[\alpha+2,\ -2\alpha+5],$$

$$5_\alpha=[5_\alpha^L,\ 5_\alpha^R]=[2\alpha+3,\ -\alpha+6].$$

从而

$$\begin{aligned}[3(\times)5]_\alpha&=[(\alpha+2)(2\alpha+3),\ (-2\alpha+5)(-\alpha+6)]\\&=[2\alpha^2+7\alpha+6,\ 2\alpha^2-17\alpha+30].\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases}x=2\alpha^2+7\alpha+6,\\ x=2\alpha^2-17\alpha+30.\end{cases}$$

则

$$\begin{cases} \alpha = (-7 + \sqrt{1+8x})/4, \\ \alpha = (17 - \sqrt{49+8x})/4. \end{cases}$$

因此

$$\mu_{3(\times)5}(x) = \begin{cases} (-7 + \sqrt{1+8x})/4, & 6 \leqslant x \leqslant 15, \\ (17 - \sqrt{49+8x})/4, & 15 \leqslant x \leqslant 30, \end{cases}$$

参见图 2.4.

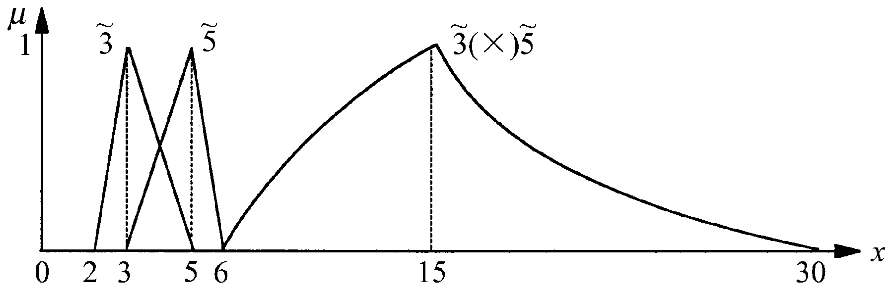

图 2.4 两个模糊数的乘积

此外,当两个模糊数 $\widetilde{M}$,$\widetilde{N}$ 不相互包含时,还可以进行模糊数之间的逻辑运算,构成所谓的极大模糊数与极小模糊数,分别记为 $\max(\widetilde{M}, \widetilde{N})$和 $\min(\widetilde{M}, \widetilde{N})$或 $\widetilde{M}(\vee)\widetilde{N}$ 和 $\widetilde{M}(\wedge)\widetilde{N}$,符号$(\vee)$,$(\wedge)$分别表示取大和取小的广义模糊算子.根据定理 2.4,模糊极大与模糊极小的隶属函数被分别定义为:$\forall\, x, y, z \in R$

$$\mu_{\widetilde{M}(\vee)\widetilde{N}}(z) = \sup_{x,\, y:\, z = x \vee y} \min\{\mu_{\widetilde{M}}(x), \mu_{\widetilde{N}}(y)\} \tag{2.16}$$

和

$$\mu_{\widetilde{M}(\wedge)\widetilde{N}}(z) = \sup_{x,\, y:\, z = x \wedge y} \min\{\mu_{\widetilde{M}}(x), \mu_{\widetilde{N}}(y)\} \tag{2.17}$$

或写成

$$\begin{aligned}[M(\vee)N]_\alpha &= [m_\alpha^L,\ m_\alpha^R](\vee)[n_\alpha^L,\ n_\alpha^R] \\ &= [m_\alpha^L \vee n_\alpha^L,\ m_\alpha^R \vee n_\alpha^R]\end{aligned} \tag{2.18}$$

和

$$\begin{aligned}[M(\wedge)N]_\alpha &= [m_\alpha^L,\ m_\alpha^R](\wedge)[n_\alpha^L,\ n_\alpha^R] \\ &= [m_\alpha^L \wedge n_\alpha^L,\ m_\alpha^R \wedge n_\alpha^R],\end{aligned} \tag{2.19}$$

参见图 2.5 和图 2.6.

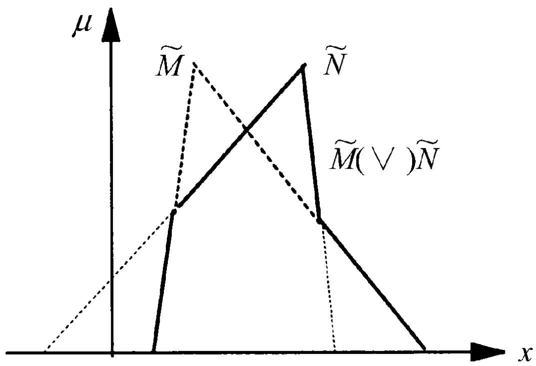

图 2.5 极大模糊数

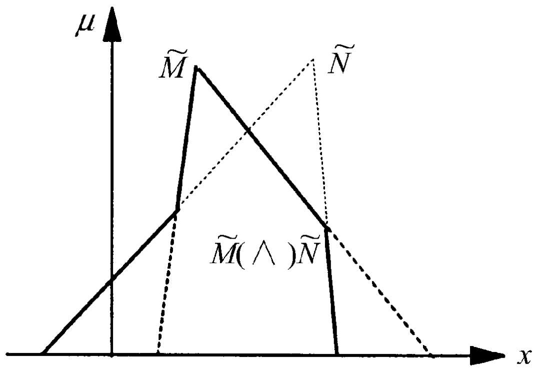

图 2.6 极小模糊数

2.1.5 L-R 模糊数及其运算

L-R 模糊数是一类特殊的模糊数,其算术运算比一般模糊数更为方便.

定义 2.7 设 f 是实数域 R 到[0,1]区间的映射 f: $R\to[0,1]$,如果 f 满足以下条件:

(1) $f(x)=f(-x)$,

(2) $f(0)=1$,

(3) $f(x)$在区间$[0,+\infty)$单调递减,

则称 $f(x)$为模糊数的基准函数.

定义 2.8 设 $L(x)$和 $R(x)$分别为模糊数 $\widetilde{A}$ 的左、右基准函数,如果