

非线性系统的不连续控制

李传东 廖晓峰 著
黄廷文 郭松涛



科学出版社

非线性系统的不连续控制

李传东 廖晓峰 黄廷文 郭松涛 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书旨在介绍不连续控制系统领域的研究现状、典型模型、常用分析方法以及作者近几年的研究成果。本书系统地阐述了常微分系统的周期间歇控制、时滞系统的周期间歇控制、常微分系统的脉冲控制、时滞系统的脉冲控制以及(时滞)脉冲切换控制系统的基本理论、稳定性分析和控制器设计,并通过大量的数值实例演示了理论结果的有效性和使用方法。

本书可作为高等院校控制理论与应用、应用数学、电子工程、计算机等相关专业高年级本科生、研究生的教材和参考书,也可供相关教师及科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

非线性系统的不连续控制/李传东等著. —北京:科学出版社,2013

ISBN 978-7-03-036330-5

I. ①非… II. ①李… III. ①非线性系统(自动化)-自动控制系统-研究 IV. ①TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 003086 号

责任编辑:余 丁 / 责任校对:郭瑞芝
责任印制:张 倩 / 封面设计:陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 3 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2013 年 3 月第一次印刷 印张:11 1/2

字数:222 000

定价:48.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

不连续控制系统可以看成一类简单的混杂系统,它由有限多个连续时间子系统以及子系统之间的切换机制组成。虽然不连续控制是古老的控制方法,但由于不连续系统理论分析的复杂性以及不连续控制手段的多样性,相对连续控制系统理论,不连续控制系统理论还不够成熟。同时,工业控制对象的复杂化和对控制精度的高要求,客观上为非线性复杂系统的不连续控制提出了新的理论问题。近年来,非线性系统的控制理论以及与之相关的右端不连续动态系统理论,尤其是混杂系统理论研究得到了广泛关注,成了控制系统理论研究领域的热点问题。

目前,不连续控制系统包含了多种右端不连续系统,其中包括切换系统、脉冲控制系统、滑模控制系统、继电反馈系统、间歇控制系统等混杂控制系统。本书主要讨论 3 种系统:周期间歇控制系统、脉冲控制系统和脉冲切换系统。并重点介绍状态时滞条件下 3 种控制系统的动力学稳定性和控制设计。因此,从内容上,本书可分成 3 部分:一是周期间歇控制系统理论与应用,包括常微分系统的间歇控制、时滞系统的间歇控制和间歇控制在混沌拟同步中的应用;二是脉冲控制系统理论与应用,分别介绍常微分系统和时滞微分系统的脉冲控制理论,并深入分析脉冲对时滞神经网络系统动力学稳定性的影响;三是脉冲切换系统理论,详细介绍脉冲切换时滞系统的稳定性理论,并引入脉冲切换神经网络模型。

对任何类型的过程控制问题,间歇控制都是一种直接的工程控制方法。作为一种特殊的切换控制,间歇控制也分为两类:时间相关的切换机制和状态相关的切换机制。前者意味着控制操作在预先给定的时间区间内激活,而后者只有在系统轨迹进入特定的区域内时才被激活。在其他时间区间或系统轨迹没有进入特定区域时,系统不受控制,自由演化。因此,这种间歇控制系统是开环的。

脉冲控制是基于脉冲微分方程的控制方法。在一个脉冲控制系统中,至少有一个状态变量在至少一个时刻要发生冲击性突变。脉冲控制系统的研究可以追溯到现代控制理论的开始时期,在最优控制的框架下,许多脉冲控制方法已经有了成功的应用。然而,脉冲控制理论的早期发展是极其缓慢的,这是因为一方面

多年来对脉冲控制系统的研究被限制在诸如力学系统和航天器最优化控制等特定问题中;另一方面,脉冲微分方程的早期研究集中在前苏联而没有在世界展开。

本书集中了作者近 10 年来在非线性控制理论方面的一系列研究成果,尤其是在间歇控制理论和脉冲切换系统理论研究领域的成果,这些成果大多是全新的。同时,本书全面且详细地介绍了上述 3 种系统的模型和动力学稳定性理论,具有较好的自包含性,而且理论推导清晰详细,还提供了大量的数值实例。因此,本书既可以作为非线性控制理论研究者的参考用书,也可以作为控制理论与应用、应用数学等专业高年级学生和研究生的教学用书。

本书的工作得到了国家自然科学基金“非线性时滞系统的脉冲控制及其最优化理论研究”和“脉冲切换时滞系统的稳定性分析和控制器设计”、教育部新世纪优秀人才支持计划“脉冲微分方程的稳定性理论及其在脉冲控制中的应用”、中央高校基本科研业务费科研专项自然科学类项目重点项目“离散大系统的混杂控制理论研究”等项目的资助,在此一并表示感谢!

感谢香港城市大学冯刚教授、陈关荣教授、香港中文大学王均教授等多年来给予我的大量支持和帮助!感谢相关研究领域的关志洪教授、徐胜元教授、曹进德教授、章毅教授、沈轶教授、曾志刚教授等学术界前辈和朋友的指导和关心!感谢在本书撰写过程中付出努力的博士生韩琦、陈玲、王欣以及硕士生元江涛、张伟。另外,书中参考了很多国内外专家和同行学者的论文,无法一一列举,在此一并表示衷心的感谢!

特别感谢我的夫人邱香华女士以及双胞胎儿子李瑞海、邱瑞洋,谨以此书献给他们!

由于作者知识水平及能力的限制,书中难免有不足之处,敬请专家和读者批评指正!

李传东

2012 年 5 月

目 录

前言

第 1 章 不连续系统概述	1
1.1 不连续系统	1
1.1.1 切换系统	1
1.1.2 间歇控制系统	2
1.1.3 脉冲控制系统	3
1.1.4 脉冲切换系统	3
1.2 时滞系统	4
1.3 不连续系统的稳定性分析	5
1.3.1 切换时滞系统的稳定性	5
1.3.2 脉冲时滞系统的稳定性	5
1.3.3 脉冲切换系统的稳定性	5
参考文献	6
第 2 章 周期切换常微分系统	10
2.1 引言	10
2.2 问题陈述和预备知识	10
2.3 稳定性分析:类型 I	13
2.4 稳定性分析:类型 II	14
2.5 稳定性分析:类型 III	19
2.5.1 线性系统的稳定性	19
2.5.2 非线性系统的稳定性	20
2.6 应用于间歇控制	21
2.7 数值模拟	23
2.8 本章小结	25
参考文献	26
第 3 章 常微分系统的周期间歇控制	28
3.1 引言	28
3.2 问题描述	29

3.3	指数稳定性分析	30
3.4	最优控制器设计	34
3.5	混沌 Chua 电路的间歇控制	36
3.6	利用间歇控制实现混沌同步	37
3.6.1	间歇控制下混沌同步的问题描述	37
3.6.2	误差系统的稳定性分析	38
3.6.3	数值模拟	41
3.7	本章小结	44
	参考文献	44
第 4 章	周期切换的时滞切换系统	46
4.1	引言	46
4.2	问题描述	46
4.3	稳定性分析	48
4.4	数值模拟	55
4.5	本章小结	57
	参考文献	57
第 5 章	时滞系统的周期间歇控制	59
5.1	问题的描述以及预备知识	59
5.2	指数稳定性分析	60
5.3	最优控制器设计	63
5.4	时滞神经网络的间歇控制	65
5.5	利用周期间歇控制镇定时滞混沌	68
5.6	本章小结	72
	参考文献	73
第 6 章	利用周期间歇控制实现时滞混沌拟同步	75
6.1	引言	75
6.2	问题陈述	75
6.3	时滞混沌拟同步理论分析	77
6.4	数值模拟	85
6.5	本章小结	86
	参考文献	86
第 7 章	常微分脉冲控制系统	88
7.1	脉冲控制系统简介	88

7.2 线性脉冲控制	89
7.3 非线性脉冲控制	90
7.4 脉冲控制在复杂系统拟同步中的应用	92
7.4.1 引言	92
7.4.2 问题描述	93
7.4.3 带有参数失配的混沌拟同步	94
7.4.4 确定控制增益	97
7.4.5 数值模拟	98
7.5 本章小结	101
参考文献	101
第8章 时滞脉冲控制系统	104
8.1 时滞脉冲控制系统理论	104
8.2 脉冲控制设计	106
8.3 Ikeda 系统的脉冲控制	107
8.4 时滞混沌系统的滞同步	108
8.4.1 时滞混沌神经网络滞同步的理论分析	109
8.4.2 M-G 方程的脉冲滞同步	110
8.4.3 Ikeda-Like 方程的脉冲滞同步	110
8.4.4 Liao 神经系统的脉冲滞同步	112
8.5 本章小结	114
参考文献	114
第9章 时滞神经网络系统的脉冲影响	117
9.1 脉冲对时滞神经网络系统的镇定作用	117
9.1.1 问题阐述	117
9.1.2 用脉冲控制实现神经网络的镇定	118
9.1.3 用脉冲控制实现系统的鲁棒稳定	121
9.1.4 数值模拟	124
9.2 脉冲对时滞双向联想记忆神经网络的发散作用	126
9.2.1 引言	126
9.2.2 主要结论	128
9.2.3 数值例子	132
9.3 本章小结	133
参考文献	133

第 10 章 时滞脉冲切换控制系统	137
10.1 引言	137
10.2 问题描述	138
10.3 稳定性分析	139
10.4 数值模拟	147
10.5 本章小结	150
参考文献	150
第 11 章 脉冲切换神经网络系统	153
11.1 引言	153
11.2 脉冲切换神经网络模型	154
11.3 稳定性分析	156
11.4 数值模拟	170
11.5 本章小结	174
参考文献	174

第 1 章 不连续系统概述

本书主要涉及间歇系统、脉冲系统和脉冲切换系统 3 种不连续系统,根据连续子系统是否含有状态时滞,又可以细分为 6 类系统:常微分间歇系统、时滞间歇系统、常微分脉冲系统、时滞脉冲系统、常微分脉冲切换系统和时滞脉冲切换系统。本书对每一种类型都进行了详细的阐述和深刻的理论分析。本章简要介绍本书涉及的这些非线性系统的模型及其研究现状。

1.1 不连续系统

不连续控制系统来源于连续系统的不连续控制和不连续系统的控制。前者由连续的非受控系统、不连续控制器和控制切换机制组成,例如,抽样控制系统、脉冲调制控制系统、脉冲控制系统、滑模控制系统等;后者由多模态系统、连续或不连续的控制器和不同模态间的切换机制组成,例如,机器人控制系统、交通流控制系统、模糊控制系统、基于逻辑的切换控制系统等。下面给出不连续系统的描述性定义。

一个连续状态空间(欧几里得空间或希尔伯特空间)通过一组切换面分成无限多个操作域,在每个操作域内,系统由一个右端可微的常微分方程描述。一旦系统轨迹达到切换面,连续状态就会按照某种切换规则发生跳跃。这里的切换规则是从切换面到操作域的一个映射。这里的状态跳跃一般被看做一种脉冲现象。一个特殊情况是系统达到切换面时没有脉冲现象出现,则在这种情况下,系统的状态轨迹一直是连续的,但在切换面附近系统是不可微的。

由此可见,一个不连续系统具有如下特征:①一组由操作域组成的切换面;②一组定义在各个操作域的连续时间子系统;③一个切换规则,用以确定子系统之间的跳跃。一般来说,切换规则是由系统状态决定的,也就是子系统之间的切换时刻是动态变化的。但在一些情况下,如周期抽样控制系统等,系统的切换时刻是固定的。本书主要讨论 3 种不连续系统,即间歇控制系统、脉冲控制系统和脉冲切换系统。而这 3 种系统都可以看成特殊的切换系统。

1.1.1 切换系统

“切换”作为一种控制思想,很早就 在控制理论中得到了应用。从经典控制理论中最基本的开关控制到相对高级的智能控制等多种控制算法都贯穿了“切换”

的思想。切换系统也从早期的开关伺服系统、Bang-Bang 控制系统发展到变结构控制系统、滑模控制系统等。近年来,随着混杂系统理论的深入研究,切换系统被认为是一种以切换为基本特征的混杂系统。目前,切换系统是混杂系统理论与应用研究领域中非常活跃的一个分支,其主要研究内容包括切换系统的建模、分析和控制等。有关切换系统的综述性文献见参考文献[1]~文献[4]。

一般地,切换系统可描述为

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(t, x(t)) \quad (1-1)$$

式中, $\sigma: Z^+ \rightarrow \Lambda$ 为分段右连续函数, Λ 为指标集,通常假定为有限集,由子系统的编号组成,记为 $\Lambda = \{1, 2, \dots, N\}$ 。

一个切换控制系统定义为

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(t, x(t)) + \sum_{i=1}^m g_{\sigma(t)}(t, x(t)) u_i \quad (1-2)$$

切换系统的稳定性分析是目前切换研究中的热点^[5-7]。由于“切换”的引入,系统的动力学行为会因为“切换”变得非常复杂。如尽管每个子系统都稳定,但不恰当的切换机制却会使整个系统不稳定;而即使每个子系统都不稳定,却可由恰当的切换使整个系统稳定。因此,研究切换系统的稳定性,必须同时考虑各子系统的稳定性和系统的切换机制。切换系统另一个研究热点是系统的能控性、能观性和能达性的判定问题及复杂系统的切换控制,有兴趣的读者可参考文献[8]~文献[16]。

1.1.2 间歇控制系统

间歇控制的控制切换也可以分为时间相关的切换和状态相关的切换。前者意味着控制操作在预先给定的时间区间内激活,而后者只有在系统轨迹进入特定的区域内时才被激活。在其他时间区间或系统轨迹没有进入特定区域时,系统不受控制,自由演化。因此,这种间歇控制系统是开环的。最近,间歇控制系统理论得到了大量的研究,并应用到复杂系统的控制和同步,读者可参考文献[17]~文献[28]。

时间相关的间歇控制系统可以描述为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) + u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1-3)$$

式中, $x \in R^n$ 为状态向量; $f: R^n \rightarrow R^n$ 是一个满足 $f(0) = 0$ 的连续的非线性函数; $u(t)$ 表示系统的外部控制,具有形式

$$u(t) = \begin{cases} Kx(t), & mT \leq t < mT + \tau \\ 0, & mT + \tau \leq t < (m+1)T \end{cases}$$

式中, $K \in R^{n \times n}$ 是控制增益向量; $T > 0$ 表示控制周期; $\tau > 0$ 是控制宽度。这样,受

控系统由下式确定

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) + Kx(t), & mT \leq t < mT + \tau \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & mT + \tau \leq t < (m+1)T \end{cases}$$

这是一个典型的周期间歇控制系统,其目标是设计合适的 T 、 τ 和 K 使其系统式(1-3)可以被稳定在原点。

1.1.3 脉冲控制系统

在科学实践中,脉冲系统出现于 20 世纪 50 年代。它用来描述一些特定的演化过程及动力学控制系统,这些过程和系统由于其状态会出现脉冲形式的突然急剧的变化而不能用单纯的连续模型或单纯的离散模型描述^[29-30]。脉冲系统的数学基础是如下的脉冲微分方程

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & t \neq \tau_i \\ \Delta x = U(i, x), & t = \tau_i, i = 1, 2, \dots \\ x(t_0) = x_0, & t_0 \geq 0 \end{cases} \quad (1-4)$$

式中, $f: R_+ \times R^n \rightarrow R^n$ 连续; $x \in R^n$ 是状态变量; $\{\tau_i\}$ 表示脉冲时刻的集合, 满足 $0 \leq t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_i < \tau_{i+1} < \dots$ 且 $\tau_i \rightarrow \infty (i \rightarrow \infty)$; $U(i, x) = \Delta x \Big|_{t=\tau_i} \equiv x(\tau_i^+) - x(\tau_i^-)$ 表示状态变量在 τ_i 时刻的跳跃, $x(\tau_i^+) = \lim_{t \rightarrow \tau_i^+} x(t)$, $x(\tau_i^-) = \lim_{t \rightarrow \tau_i^-} x(t)$ 。一般地, 假设系统在脉冲时刻是左连续的, 即 $x(\tau_i^-) = x(\tau_i)$ 。

由此可知, 一个脉冲控制系统由 3 部分组成: ①一个连续时间的微分方程, 用以确定动态系统在两个脉冲事件之间的运动; ②一个差分方程, 用以确定当脉冲事件发生的瞬间系统状态变化的方式; ③一个规则, 用以确定系统状态发生突变的时刻, 即脉冲事件发生的时刻。在文献[31]中, Yang 给出了由常微分方程确定的脉冲控制系统的理论基础, 研究了这种脉冲控制的存在性和稳定性。在文献[29]中, 结合脉冲控制系统在微电子设备和混沌扩频通信中的应用, 重点研究了两类控制系统。第一类是控制脉冲系统: 系统本身是一个脉冲微分方程, 控制律既可以是连续的也可以是脉冲的。第二类控制系统是受脉冲控制的动力学系统: 系统本身不受脉冲影响, 但控制律中引入了对系统状态变量的脉冲影响。近年来, 随着脉冲微分方程理论的快速发展, 脉冲控制的应用范围也逐步扩大, 如新的带有脉冲影响的种群模型^[32-38]、原子核自旋发动机的脉冲控制^[39]、生物系统中杀虫剂的脉冲控制^[40]、空气弹性学系统的脉冲响应^[41]等。

1.1.4 脉冲切换系统

在文献[42]和文献[43]中, 提出了同时包含切换机制和脉冲机制的混杂系统

模型

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(k)} f_{\sigma(k)}(t, x(t)), & t \in [t_{k-1}, t_k) \\ \Delta x(t_k) = J_k(t_k^-, x(t_k^-)), & t = t_k, k = 1, 2, \dots \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1-5)$$

式中, $t_0 \geq 0$ 表示初始时刻; $\sigma: \mathbb{Z} \rightarrow I = \{1, 2, \dots, m\}$ 是一个分段常量函数; $\{t_k\}$ 满足 $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$ 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ 。

脉冲切换系统包含脉冲机制和切换机制。至少有两种情况会产生脉冲切换系统: 切换系统在不同子系统切换时发生了状态的跳跃; 在不同子系统进行切换时施加脉冲控制。不同于一般的切换系统, 脉冲切换系统在切换时刻要经历状态的跃变; 也不同于一般的脉冲系统, 脉冲切换系统在脉冲时刻的前后会发生系统结构的变化。研究脉冲切换系统的主要动机是研究同时具有脉冲机制和切换机制的混杂控制方案以实现高度复杂的非线性动力学系统或控制具有较大的不确定因素/未知参数。事实上, 随着动力学系统复杂度的提高, 采用单一的控制器的期望性能也越来越不现实。因此, 一般的做法是设计多个控制器, 不同的控制器具有不同的作用域, 通过一种机制实现不同控制器之间的切换。从理论层面看, 同时具有脉冲机制和切换机制、同时具有底层连续动力学和高层离散逻辑的连续-离散系统对传统的系统与控制理论提出了新的挑战。

1.2 时滞系统

时滞系统是指存在时间滞后的系统, 即系统的当前状态明显地依赖于系统过去的状态。时滞在自然界、工程技术和社会生活领域中广泛存在的, 其生产的根源在于有限的信号传输速度、开关速度和记忆效应等。时滞系统一般用时滞微分方程(DDE)或泛函微分方程描述, 一个简单的带有离散时滞的时滞系统可以由DDE表示^[44-45]为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\sigma)), & t \geq t_0 \\ x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), & \theta \in [-\sigma, 0] \end{cases} \quad (1-6)$$

式中, σ 是一个正数, 表示系统时滞; $\phi: [-\sigma, 0] \rightarrow R^n$ 是一个连续向量值函数, 表示系统的初始状态。相应地, 带有离散时滞的切换系统和脉冲系统分别由切换时滞微分方程和脉冲时滞微分方程描述

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_s(t, x(t), x(t-\sigma)), & t \geq t_0 \\ x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), & \theta \in [-\sigma, 0] \end{cases} \quad (1-7)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x, x(t-\sigma)), & t \neq \tau_i, t \geq t_0 \\ \Delta x(t) = U(i, x(t)), & t = \tau_i, i = 1, 2, \dots \\ x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), & \theta \in [-\sigma, 0] \end{cases} \quad (1-8)$$

1.3 不连续系统的稳定性分析

系统和控制理论中一个最基本的问题是动力系统的稳定性。近 10 年来,切换系统和脉冲系统的稳定性和镇定问题成为非线性动力学和非线性控制理论研究中的热点,也取得了大量的研究成果,参见文献[31]、文献[46]~文献[48]。其中,文献[46]和文献[47]是关于切换系统的稳定性分析,文献[31]和文献[48]是关于脉冲系统的稳定性和控制。下面简单介绍带有时滞的切换系统、脉冲系统稳定性以及脉冲切换系统模型稳定性的研究成果。

1.3.1 切换时滞系统的稳定性

近 10 年来,切换时滞系统的稳定性理论得到了深入的研究,取得了大量深刻的结果^[49-53]。在文献[49]中,研究了一类由多个线性时滞微分方程组成的切换时滞系统的稳定性,研究结果显示这类系统的稳定性可以由通用李雅普诺夫函数的方法得到。文献[50]利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函和线性矩阵不等式方法研究了离散时间的线性切换系统的稳定性和镇定,在时滞未知的情况下,得到了较好的稳定性条件。利用平均驻留时间方法,文献[51]得到了带有时变时滞的切换系统在任意切换条件下的时滞相关的稳定性条件。文献[52]研究了带有模型相关时滞的离散时间的参数不确定的切换系统的鲁棒稳定性,并分析了控制系统的 H^∞ 性能。Qiu 等^[53]研究了不确定离散时间切换时滞系统的时滞相关的输出反馈保成本控制,给出了一些有意义的结果。

1.3.2 脉冲时滞系统的稳定性

脉冲控制在微分系统和差分系统中的成功应用促进了研究人员对脉冲时滞系统的研究兴趣,但是由于脉冲时滞系统的状态不连续,不能将基于李雅普诺夫函数或者泛函方法的稳定性理论简单地移植到这种系统,而且不同的脉冲机制对系统的影响是不同的。更复杂的是,脉冲和时滞对系统动力学常是混合作用的,因此,脉冲时滞系统的稳定性理论还有待进一步发展。目前,利用解的积分表示方法研究了线性脉冲时滞微分方程的稳定性问题^[54-61],对于非线性脉冲时滞系统,文献[54]提出了 Lyapunov-Razumikhin 函数方法,文献[62]和文献[63]提出了李雅普诺夫泛函方法,文献[64]提出了相应的 Razumikhin 方法。

1.3.3 脉冲切换系统的稳定性

近来,关于混杂切换脉冲系统的稳定性分析和控制器设计得到了研究人员的极大关注,也取得了许多有意义的理论结果和控制应用结果^[65-68]。在文献[66]

中, Lee 和 Lin 利用最小驻留时间和冗余方法研究了模型式(1-5), 得到了平衡点渐近稳定和指数稳定的充分条件。关治洪教授, Hill 和 Shen 在文献 [67] 中研究了特定切换条件下系统式(1-5)的稳定性问题, 提出了针对任意脉冲的一系列通用稳定性条件。特别指出的是文献[68], Li 等在这本专著中对脉冲切换系统的稳定性理论和控制应用作了深刻而全面的论述。

参 考 文 献

- [1] Liberzon D, Hespanha J P, Morse A S. Stability of switched systems: an algebraic condition. *Systems & Control Letters*, 1999, 37(3): 117-122.
- [2] Liberzon D. *Switching in Systems and Control*. Boston: Birkhauser, 2003.
- [3] Sun Z, Ge S S. *Switched Linear System: Control and Design*. London: Springer, 2005.
- [4] 程代展, 郭宇骞. 切换系统进展. *控制理论与应用*, 2005, 22(6): 954-960.
- [5] Sun Z, Ge S S. Analysis and synthesis of switched linear control systems. *Automatica*, 2005, 41(2): 181-195.
- [6] Zhai G, Lin H, Michel A N, et al. Stability analysis for switched systems with continuous-time and discrete-time subsystems//*Proceedings of the 2004 American Control Conference*, Boston, 2004: 4555-4560.
- [7] Zhai G, Xu X, Lin H, et al. Extension of Lie algebraic stability analysis for switched systems with continuous-time and discrete-time subsystems. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2007, 17(4): 447-454.
- [8] Sun Z, Ge S S, Lee T H. Controllability and reachability criteria for switched linear systems. *Automatica*, 2002, 38(5): 775-786.
- [9] Gomez-Gutierrez D, Ramiez-Prado G, Ramirez-Trevino A, et al. Observability of switched linear systems. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2010, 6(2): 127-135.
- [10] Ji Z, Wang L, Guo X X. On controllability of switched linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(3): 796-801.
- [11] Sun Z. Reachability analysis of constrained switched linear systems. *Automatica*, 2007, 43(1): 164-167.
- [12] Ge S S, Sun Z, Lee T H. Reachability and controllability of switched linear discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(9): 1437-1441.
- [13] Xie G, Zheng D, Wang L. Controllability of switched linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(8): 1401-1405.
- [14] Medina E A, Lawrence D A. Reachability and observability of linear impulsive systems. *Automatica*, 2008, 44(5): 1304-1309.
- [15] Xie G, Wang L. Reachability realization and stabilizability of switched linear discrete-time systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2003, 180(2): 209-220.
- [16] Leonessa W, Haddad D, Chellaboina V. Nonlinear system stabilization via hierarchical switching control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(1): 17-28.

-
- [17] Carr T W, Schwartz I B. Controlling unstable steady states using system parameter variation and control duration. *Physical Review E*, 1994, 50: 3410-3415.
- [18] Carr T W, Schwartz I B. Controlling the unstable steady state in a multimode laser. *Physical Review E*, 1995, 51: 5109-5111.
- [19] Carr T W, Schwartz I B. Controlling high-dimensional unstable steady states using delay, duration and feedback. *Physica D*, 1996, 96: 1-25.
- [20] Starrett J. Control of chaos by occasional bang-bang. *Physical Review E*, 2003, 67: 036203.
- [21] Montgomery T L, Frey J W, Norris W B. Intermittent control systems for SO_2 . *Environmental Science and Technology*, 1975, 9: 528-532.
- [22] Xia W G, Cao J D. Pinning synchronization of delayed dynamical networks via periodically intermittent control. *Chaos*, 2009, 19: 013120.
- [23] Li C D, Liao X F, Huang T W. Exponential stabilization of chaotic systems with delay by periodically intermittent control. *Chaos*, 2007, 17: 013103.
- [24] Li C D, Feng G, Liao X F. Stabilization of nonlinear systems via periodically intermittent control. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2009, 54(11): 1019-1023.
- [25] Yang X S, Cao J D. Stochastic synchronization of coupled neural networks with intermittent control. *Physics Letters A*, 2009, 373(36): 3259-3272.
- [26] Gawthrop P J, Wang L P. Event-driven intermittent control. *International Journal of Control*, 2009, 82(12): 2235-2248.
- [27] Huang J J, Li C D, Han Q. Stabilization of delayed chaotic neural networks by periodically intermittent control. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2009, 28(4): 567-579.
- [28] Huang T W, Li C D, Liu X Z. Synchronization of chaotic systems with delay using intermittent linear state feedback. *Chaos*, 2008, 18: 033122.
- [29] Yang T. *Impulsive Systems and Control: Theory and Applications*. New York: Nova, 2001.
- [30] Haddad W, Chellaboina V, Nersisov S. *Impulsive and Hybrid Dynamical Systems: Stability, Dissipativity, and Control*. Princeton: Princeton University Press, 2006.
- [31] Yang T. *Impulsive Control Theory*. Berlin: Springer, 2001.
- [32] Rogovchenko Y V. Nonlinear impulse evolution systems and applications to population models. *Journal of Mathematics and Applications*, 1997, 207: 300-315.
- [33] Ballinger G, Liu X. Performance of population growth models with impulsive effects. *Mathematics and Computer Modelling*, 1997, 26: 59-72.
- [34] Zhang X Y, Shuai Z S, Wang K. Optimal impulsive harvesting policy for single population. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2003, 4: 639-651.
- [35] Stamova I M, Stamov G T. Lyapunov-Razumikhin method for impulsive functional differential equations and applications to the population dynamics. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2001, 130: 163-171.
- [36] Tang S Y, Chen L S. Global attractivity in a “food-limited” population model with impul-

- sive effects, *Journal Mathematical Analysis and Applications*, 2004, 292: 211-221.
- [37] Nenov S I. Impulsive controllability and optimization problems in population dynamics. *Nonlinear Analysis*, 1999, 36: 881-890.
- [38] Liu Y J, Ge W G. Global attractivity in delay “food-limited” models with exponential impulses. *Journal Mathematical Analysis and Applications*, 2003, 287: 200-216.
- [39] Sun J T, Zhang Y P. Impulsive control of a nuclear spin generator. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2003, 157: 235-242.
- [40] Lu Z H, Chi X B, Chen L S. Impulsive control strategies in biological control of pesticide. *Theoretical Population Biology*, 2003, 64: 39-47.
- [41] Dimitriadis G, Cooper J E. A time-frequency technique for the stability analysis of impulse responses from nonlinear aeroelastic systems. *Journal of Fluids and Structures*, 2003, 17: 1181-1201.
- [42] Li Z G, Soh Y C, Wen C Y. Robust stability of a class of hybrid nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(6): 897-903.
- [43] Li Z G, Soh Y C, Xu X. Robust stability of a class of hybrid dynamic systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1998, 8: 1059-1072.
- [44] Niculescu S I. *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*. New York: Springer, 2001.
- [45] Michiels W, Niculescu S I. *Stability and Stabilization of Time-Delay Systems: An Eigenvalue-Based Approach*. Philadelphia: SIAM, 2008.
- [46] Sun Z. *Stability Theory of Switched Dynamical Systems*. London: Springer, 2011.
- [47] Xie G, Wang L. Controllability and stabilizability of switched linear systems. *Systems & Control Letters*, 2003, 48(2): 135-155.
- [48] Haddad W M, Chellaboina V, Nersisov S G. *Impulsive and Hybrid Dynamical Systems: Stability, Dissipativity, and Control*. Princeton: Princeton University Press, 2006.
- [49] Kim S, Campbell S A, Liu X. Stability of a class of linear switching systems with time delay. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 2006, 53(2): 384-393.
- [50] Montagner V F, Leite V, Tarbouriech S, et al. Stability and stabilizability of discrete-time switched linear systems with state delay // *Proceedings of the 2005 American Control Conference*, Portland, 2005: 3806-3811.
- [51] Sun X M, Zhao J, Hill D J. Stability and L2-gain analysis for switched delays systems: a delay dependent method. *Automatica*, 2006, 42(10): 1769-1774.
- [52] Sun Y G, Wang L, Xie G. Delay-dependent robust stability and H_∞ control for uncertain discrete-time switched systems with mode-dependent time delays. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, 187(2): 1228-1237.
- [53] Qiu J, Feng G, Yang J. Delay-dependent output feedback guaranteed cost control for uncertain discrete-time switched delay systems // *Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Control and Automation*, Guangzhou, 2007: 847-852.

-
- [54] Yu J S, Zhang B. Stability theorem for delay differential equations with impulses. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1996, 199: 162-175.
- [55] Anokhin A V. On linear impulsive systems for functional differential equations. *Soviet Mathematics Doklady*, 1986, 33: 220-223.
- [56] Gopalsamy K, Zhang B. On delay differential equations with impulses. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1989, 139: 110-122.
- [57] Anokhin A V, Berezhansky L, Braverman E. Exponential stability of linear delay impulsive differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1995, 193: 923-941.
- [58] Anokhin A V, Berezhansky L, Braverman E. Stability of linear delay impulsive differential equations. *Dynamics and Systems Applications*, 1995, 4: 173-188.
- [59] Berezhansky L, Braverman E. Preservation of the exponential stability under perturbations of linear delay impulsive differential equations. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 1995, 14: 157-174.
- [60] Berezhansky L, Braverman E. Impulsive stabilization of linear delay differential equations. *Dynamics and Systems Applications*, 1996, 5: 263-277.
- [61] Yan J R, Shen J H. Impulsive stabilization of functional differential equations by Lyapunov-Razumikhin functions. *Nonlinear Analysis*, 1999, 37: 245-255.
- [62] Shen J, Luo Z, Liu X. Impulsive stabilization of functional differential equations via Lyapunov functional. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1999, 240: 1-5.
- [63] Liu X Z, Wang Q. The method of Lyapunov functionals and exponential stability of impulsive systems with time delay. *Nonlinear Analysis*, 2007, 66: 1465-1484.
- [64] Wang Q, Liu X. Exponential stability for impulsive delay differential equations by Razumikhin method. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2005, 309: 462-473.
- [65] Sun Z D, Ge S S. Book Review: "Switched and impulsive systems: Analysis, Design and Applications; Zhengguo Li, Yengchai Soh, Changyun Wen; Springer, Berlin, Heidelberg, 2005. ISBN: 3540-23952-9". *Automatica*, 2006, 42(9): 1617-1619.
- [66] Lee S H, Lin J T. Stability analysis of switched systems with impulse effects // *Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on Intelligent Control/Intelligent Systems and Semiotics*, Cambridge, 1999: 79-83.
- [67] Guan Z H, Hill D J, Shen X. On hybrid impulsive and switching systems and application to nonlinear control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(7): 1058-1062.
- [68] Li Z G, Soh Y C, Wen C Y. *Switched and Impulsive Systems: Analysis, Design and Applications*. Berlin: Springer, 2005.

第 2 章 周期切换常微分系统

本章研究由两个子系统组成的周期切换系统理论。首先根据子系统的稳定性将周期切换系统分成 3 种类型,接着详细分析这 3 种类型的周期切换系统的稳定性,最后将周期切换系统的理论结果应用于间歇控制系统。

2.1 引言

切换系统是工程设计和人类活动中常见的一种行为方式^[1-2],如飞机或汽车的驾驶、电力系统等。由于在系统建模、复杂系统控制方面的广泛应用,近 30 年来,切换系统一直是控制领域的研究热点^[1-17]。切换系统具有复杂系统的特性,如每个子系统都稳定,切换后可能不稳定;也可能每个子系统都不稳定,但切换系统是稳定的。因此,对切换系统动力学行为的研究是切换控制系统理论研究的关键内容之一。在切换系统的研究中,常用的分析工具包括矩阵理论、动力系统理论和微分包含等。在切换系统中有两种不同的切换机制:一是按时间进行切换^[11-13],简称时间切换,如周期切换系统;二是与系统状态相关的切换^[4-10],简称状态切换,如服务器切换系统。

目前,切换系统的研究基本集中在线性切换系统,或含有非线性扰动的线性系统。由于切换系统具有复杂系统的特性,所以对切换系统动力学研究需要根据其子系统的稳定性分类进行。本节以两个子系统组成的切换系统为例展开研究,对于含有多个子系统的情况,可以采用类似的方法进行分析。显然,根据两个子系统的稳定性,这种时间切换系统应包含以下 3 种类型。

类型Ⅰ:两个子系统都不稳定。

类型Ⅱ:两个子系统中一个稳定,另一个不稳定。

类型Ⅲ:两个子系统都稳定。

下面将分别讨论这 3 种情况下时间切换系统的稳定性。

2.2 问题陈述和预备知识

考虑如下切换系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i f_i(x(t)), \quad kT + \tau_{i-1} \leq t < kT + \tau_i \\ i &= 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2-1)$$

式中, $x \in R^n$ 表示状态向量; $A_i = (a_{kl}^{(i)}) \in R^{n \times n}$ 和 $B_i = (b_{kl}^{(i)}) \in R^{n \times n}$, $i=1,2$, 是常矩阵; $T>0$ 称为切换周期; $\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ 称为第 i 个子系统的驻留时间, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{m-1} < \tau_m = T$ 。显然, 这是一个有 m 个非线性子系统的特殊的切换系统, 它的特点是切换时刻是周期变化的, 所以称为周期切换系统。为了便于后面的分析, 假设非线性项是神经类型的连续函数, 即 $f_i(x) = [f_{i1}(x_1), f_{i2}(x_2), \dots, f_{in}(x_n)]^T$, 且满足假设

(H1) $f_i(0) = 0$, 存在常数 α_{ij} ($i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$) 使得

$$|f_{ij}(y) - f_{ij}(\bar{y})| \leq \alpha_{ij} |y - \bar{y}|, \forall y, \bar{y} \in R$$

采用线性化方法将系统式(2-1)化成非自治线性系统。为此, 定义 $m \times n$ 个函数 s_{ij} ($i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$)

$$s_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{f_{ij}(x_j(t))}{x_j(t)}, & x_j(t) \neq 0 \\ 0, & x_j(t) = 0 \end{cases}$$

令 $S_i = \text{diag}(s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{in})$, $i=1,2,\dots,m$ 。那么, 系统式(2-1)可改写成

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_i + B_i S_i(t))x(t), kT + \tau_{i-1} \leq t < kT + \tau_i \\ i &= 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2-2)$$

由假设(H1)知, $|s_{ij}| \leq \alpha_{ij}$ ($i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$)。从而, 对任意的 $t \geq t_0$ 和 $i=1,2,\dots,m$, 有

$$-L_i \leq S_i \leq L_i = \text{diag}(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in})$$

进一步, 对 $i=1,2,\dots,m$, 令

$$\underline{C}_i = (\underline{c}_{kl}^{(i)})_{n \times n} \equiv A_i - |B_i| L_i, \quad \bar{C}_i = (\bar{c}_{kl}^{(i)})_{n \times n} \equiv A_i + |B_i| L_i$$

$$M[\underline{C}_i, \bar{C}_i] = \{C = (c_{kl}^{(i)})_{n \times n}; \underline{c}_{kl}^{(i)} \leq c_{kl}^{(i)} \leq \bar{c}_{kl}^{(i)}, k, l = 1, 2, \dots, n\}$$

式中, $|B_i| = (|b_{kl}^{(i)}|) \in R^{n \times n}$ 。对任意的 $t \geq t_0$

$$A_i + B_i S_i(t) \in M[\underline{C}_i, \bar{C}_i]$$

定义

$$C_i = \frac{\underline{C}_i + \bar{C}_i}{2} = A_i, \quad H_i = \frac{\bar{C}_i - \underline{C}_i}{2} = |B_i| L_i, \quad i=1,2,\dots,m$$

因为矩阵 $H_i = (h_{kl}^{(i)}) \in R^n$ ($i=1,2,\dots,m$) 的各个元素是非负的, 进一步定义

$$\begin{aligned} E_i &= [\sqrt{h_{11}^{(i)}} e_1, \dots, \sqrt{h_{1n}^{(i)}} e_1, \dots, \sqrt{h_{n1}^{(i)}} e_n, \dots, \sqrt{h_{nn}^{(i)}} e_n] \in R^{n \times n^2} \\ F_i &= [\sqrt{h_{11}^{(i)}} e_1, \dots, \sqrt{h_{1n}^{(i)}} e_n, \dots, \sqrt{h_{n1}^{(i)}} e_1, \dots, \sqrt{h_{nn}^{(i)}} e_n]^T \in R^{n^2 \times n} \end{aligned} \quad (2-3)$$

式中, e_i 表示 $n \times n$ 单位矩阵中的第 i 个列向量。容易验证, 对 $i=1,2,\dots,m$,

$$\begin{aligned}
E_i E_i^T &= \text{diag} \left(\sum_{j=1}^n h_{1j}^{(i)}, \sum_{j=1}^n h_{2j}^{(i)}, \dots, \sum_{j=1}^n h_{nj}^{(i)} \right) \\
F_i^T F_i &= \text{diag} \left(\sum_{j=1}^n h_{j1}^{(i)}, \sum_{j=1}^n h_{j2}^{(i)}, \dots, \sum_{j=1}^n h_{jn}^{(i)} \right)
\end{aligned} \tag{2-4}$$

引理 2.1^[18-19] 令

$$\begin{aligned}
\Sigma^* &= \left\{ \Sigma \in R^{n^2 \times n^2} \left| \begin{array}{l} \Sigma = \text{diag}(\epsilon_{11}, \dots, \epsilon_{1n}, \dots, \epsilon_{n1}, \dots, \epsilon_{nn}) \\ |\epsilon_{ij}| \leq 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \right\} \\
N[\underline{C}_i, \bar{C}_i] &= \{D_i = C_i + E_i \Sigma_i F_i \mid \Sigma_i \in \Sigma^*\}
\end{aligned}$$

则 $M[\underline{C}_i, \bar{C}_i] = N[\underline{C}_i, \bar{C}_i]$ 。

现在考虑如下的不确定线性系统

$$\dot{x}(t) = (C_i + E_i \Sigma_i F_i)x(t), \quad kT + \tau_{i-1} \leq t < kT + \tau_i \tag{2-5}$$

式中, $\Sigma_i \in \Sigma^*, i=1, 2$ 。

由引理 2.1 可知, 系统式(2-5)的鲁棒稳定性隐含了系统式(2-2)的稳定性, 而系统式(2-2)等价于系统式(2-1)。因此, 可以通过研究系统式(2-5)的鲁棒稳定性间接得到系统式(2-1)的稳定性条件。

注 2.1 如果非线性函数 $f_i(x)$ 满足假设

(H2) 对任意的 $x_j \neq 0$ 和 $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$

$$0 \leq \frac{f_{ij}(x_j)}{x_j} \leq \alpha_{ij}$$

则 $0 \leq s_{ij} \leq \alpha_{ij}$ 且 $\underline{C}_i = A_i + (\min\{0, b_{kl}^{(i)} \alpha_{il}\})$, $\bar{C}_i = A_i + (\max\{0, b_{kl}^{(i)} \alpha_{il}\})$ 。

可以看到, (H2) 隐含了

$$C_i = A_i + \frac{1}{2}(b_{kl}^{(i)} \alpha_{il}), H_i = \frac{1}{2}(|b_{kl}^{(i)}| \alpha_{il})$$

式中, (d_{kl}) 表示以 d_{kl} 为第 k 行第 l 列元素的矩阵。

为简便起见, 下面只考虑只有两个子系统的情况, 即 $m=2$ 。这样, 可以把式(2-1)和式(2-5)分别改写成

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 f(x(t)), & kT \leq t < kT + \alpha T \\ \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 g(x(t)), & kT + \alpha T \leq t < (k+1)T \end{cases} \tag{2-6}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (C_1 + E_1 \Sigma_1 F_1)x(t), & kT \leq t < kT + \alpha T \\ \dot{x}(t) = (C_2 + E_2 \Sigma_2 F_2)x(t), & kT + \alpha T \leq t < (k+1)T \end{cases} \tag{2-7}$$

式中, $0 < \alpha < 1$ 为切换率。显然, 式(2-6)和式(2-7)的结果容易推广到具有任意有限多个子系统的一般系统式(2-1)和式(2-5)。

2.3 稳定性分析:类型 I

本节研究有两个不稳定子系统组成的切换系统式(2-6),根据 2.2 节的讨论,系统式(2-7)的鲁棒稳定性隐含系统式(2-6)的稳定性,因此,首先讨论系统式(2-7)的鲁棒稳定性。

定理 2.1 假设存在对称正定矩阵 P ,正常数 q_1, q_2 和 $\alpha (0 < \alpha < 1)$ 使得

$$\begin{aligned} \Omega_1 = & P(\alpha C_1 + (1-\alpha)C_2) + (\alpha C_1 + (1-\alpha)C_2)^T P \\ & + \alpha q_1^{-1} P E_1 E_1^T P + \alpha q_1 F_1^T F_1 \\ & + (1-\alpha) q_2^{-1} P E_2 E_2^T P + (1-\alpha) q_2 F_2^T F_2 < 0 \end{aligned} \quad (2-8)$$

则存在小的切换周期 T 使得时间切换系统式(2-7)的原点是全局鲁棒指数稳定的,从而,时间切换系统式(2-6)的原点是全局指数稳定的。

证明:只需证明不等式(2-8)隐含系统式(2-7)在小的切换周期下是全局鲁棒指数稳定的。不失一般性,假设系统式(2-7)在初始时刻 $t_0 \in [0, \alpha T)$ 的值为 $x_0 = x(t_0)$ 。根据分段积分,得

$$\begin{aligned} x(\alpha T) &= \exp((C_1 + E_1 \Sigma_1 F_1)(\alpha T - t_0)) x_0 \\ x(T) &= \exp((C_2 + E_2 \Sigma_2 F_2)(1-\alpha)T) \exp((C_1 + E_1 \Sigma_1 F_1)(\alpha T - t_0)) x_0 \\ &= \exp((C_2 + E_2 \Sigma_2 F_2)(1-\alpha)T) \\ &\quad \times \exp((C_1 + E_1 \Sigma_1 F_1)\alpha T) \exp(-(C_1 + E_1 \Sigma_1 F_1)t_0) x_0 \\ &= \left[I + (C_2 + E_2 \Sigma_2 F_2)(1-\alpha)T + \frac{1}{2!} (C_2 + E_2 \Sigma_2 F_2)^2 (1-\alpha)^2 T^2 + \dots \right] \\ &\quad \times \left[I + (C_1 + E_1 \Sigma_1 F_1)\alpha T + \frac{1}{2!} (C_1 + E_1 \Sigma_1 F_1)^2 \alpha^2 T^2 + \dots \right] \\ &\quad \times \exp(-(C_1 + E_1 \Sigma_1 F_1)t_0) x_0 \\ &= \{ I + [(C_1 + E_1 \Sigma_1 F_1)\alpha + (C_2 + E_2 \Sigma_2 F_2)(1-\alpha)]T + O(T) \} \\ &\quad \times \exp(-(C_1 + E_1 \Sigma_1 F_1)t_0) x_0 \end{aligned}$$

容易看出,如果让时间周期 T 趋近于 0,则在任意的固定时间区间内系统(2-7)的解都将趋近于“平均”系统取相同初始值时的解^[20]

$$\dot{x}(t) = [(C_1 + E_1 \Sigma_1 F_1)\alpha + (C_2 + E_2 \Sigma_2 F_2)(1-\alpha)]x(t) \quad (2-9)$$

式中, $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \Sigma^*$ 。

也就是说,当切换周期足够小时切换系统式(2-7)的鲁棒稳定性可以由“平均”系统式(2-9)的鲁棒指数稳定性确定。而系统式(2-9)全局鲁棒指数稳定的充分必要条件之一是:对任意的 $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \Sigma^*$, 存在 $0 < \alpha < 1$ 使得 $A_e = (C_1 + E_1 \Sigma_1 F_1)\alpha + (C_2 + E_2 \Sigma_2 F_2)(1-\alpha)$ 是 Hurwitz。这个充分必要条件等价于条件:存在对称正定矩阵 P 使得 $A_e^T P + P A_e < 0$ 。而使得 $A_e^T P + P A_e < 0$ 成立的一个充分条件恰恰是

不等式(2-8)。这是因为,当 $x \neq 0$ 时

$$\begin{aligned}
 & x^T [A_e^T P + P A_e] x \\
 &= x^T \{ [(C_1 + E_1 \Sigma_1 F_1) \alpha + (C_2 + E_2 \Sigma_2 F_2)(1 - \alpha)]^T P \\
 &\quad + P [(C_1 + E_1 \Sigma_1 F_1) \alpha + (C_2 + E_2 \Sigma_2 F_2)(1 - \alpha)] \} x \\
 &= x^T \{ [\alpha C_1 + (1 - \alpha) C_2]^T P + P [\alpha C_1 + (1 - \alpha) C_2] \} x \\
 &\quad + 2\alpha x^T P E_1 \Sigma_1 F_1 x + 2(1 - \alpha) x^T P E_2 \Sigma_2 F_2 x \\
 &\leq x^T \{ [\alpha C_1 + (1 - \alpha) C_2]^T P + P [\alpha C_1 + (1 - \alpha) C_2] \} x \\
 &\quad + \alpha q_1^{-1} x^T P E_1 E_1^T P x + \alpha q_1 x^T F_1^T F_1 x \\
 &\quad + (1 - \alpha) q_2^{-1} x^T P E_2 E_2^T P x + (1 - \alpha) q_2 x^T F_2^T F_2 x \\
 &= x^T \{ [\alpha C_1 + (1 - \alpha) C_2]^T P + P [\alpha C_1 + (1 - \alpha) C_2] \\
 &\quad + \alpha q_1^{-1} P E_1 E_1^T P + \alpha q_1 F_1^T F_1 \\
 &\quad + (1 - \alpha) q_2^{-1} P E_2 E_2^T P + (1 - \alpha) q_2 F_2^T F_2 \} x \\
 &= x^T \Omega_1 x < 0
 \end{aligned}$$

注 2.2 这个结果可以看成时间切换线性系统稳定性结果的自然推广^[13]。

2.4 稳定性分析:类型 II

这一节假设系统式(2-6)的两个子系统中一个是全局指数稳定的子系统,而另一个不稳定。分别用多李雅普诺夫函数和单李雅普诺夫函数研究切换系统的稳定性,得到了两个确保系统全局指数稳定的充分条件。

假设第一个子系统全局指数稳定,而第二个子系统不稳定。一个特殊的情况是,当切换周期无穷大时,系统只按照第一个子系统演化,所以系统是指数稳定的。反之,如果第一个子系统不稳定,而第二个子系统稳定,当切换周期无穷大时,系统是不稳定的。本节不考虑这些极端情况,只考虑确定二元组 (T, α) 的取值范围使当切换周期 T 和切换率 α 在这个取值范围内取值时切换系统是全局指数稳定的。

定理 2.2 假设存在两个常量函数 $V_i: R^n \rightarrow R^+, i=1, 2$ 和一个单调连续增函数 $\gamma(\gamma(0)=0)$ 以及常数 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ 和 $\beta \geq 1$ 使得

- ① $\gamma(\|x\|) \leq V_1(x)$
- ② 对任意的 $k=0, 1, 2, \dots$, 当 $t \in [kT, kT + \alpha T)$ 时, $\dot{V}_1(x) \leq -\lambda_1 V(x)$;
当 $t \in [kT + \alpha T, (k+1)T)$ 时, $\dot{V}_2(x) \leq \lambda_2 V(x)$
- ③ 对任意的 $x \in R^n$ 和 $i, j \in \{1, 2\}$, 有 $V_i(x) \leq \beta V_j(x)$
- ④ $\epsilon = \alpha \lambda_1 - (1 - \alpha) \lambda_2 - \frac{2}{T} \ln \beta > 0$

则时间切换系统式(2-6)的原点是全局指数稳定的。

证明:当 $t \in [kT, kT + \alpha T)$ 时,由条件②知

$$V_1(x) \leq \exp\{-\lambda_1(t - kT)\}V_1(kT) \quad (2-10)$$

类似地,当 $t \in [kT + \alpha T, (k+1)T)$ 时,不等式 $\dot{V}_2(x) \leq \lambda_2 V(x)$ 隐含了

$$V_2(x) \leq \exp\{\lambda_2(t - kT - \alpha T)\}V_2(kT + \alpha T) \quad (2-11)$$

由式(2-10)、式(2-11)和条件③,得

(a) 当 $t \in [0, \alpha T)$ 时, $V_1(x) \leq \exp\{-\lambda_1 t\}V_1(0)$

(b) 当 $t \in [\alpha T, T)$ 时

$$\begin{aligned} V_2(x) &\leq \exp\{\lambda_2(t - \alpha T)\}V_2(\alpha T) \\ &\leq \beta \exp\{\lambda_2(t - \alpha T)\}V_1(\alpha T) \\ &\leq \beta \exp\{\lambda_2(t - \alpha T) - \lambda_1 \alpha T\}V_1(0) \\ &= \beta \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_2)\alpha T + \lambda_2 t\}V_1(0) \end{aligned}$$

(c) 当 $t \in [T, T + \alpha T)$ 时

$$\begin{aligned} V_1(x) &\leq \exp\{-\lambda_1(t - T)\}V_1(T) \\ &\leq \beta \exp\{-\lambda_1(t - T)\}V_2(T) \\ &\leq \beta^2 \exp\{-\lambda_1(t - T) - (\lambda_1 + \lambda_2)\alpha T + \lambda_2 T\}V_1(0) \\ &= \beta^2 \exp\{(\lambda_1 + \lambda_2)(1 - \alpha)T - \lambda_1 t\}V_1(0) \end{aligned}$$

(d) 当 $t \in [T + \alpha T, 2T)$ 时

$$\begin{aligned} V_2(x) &\leq \exp\{\lambda_2(t - T - \alpha T)\}V_2(T + \alpha T) \\ &\leq \beta \exp\{\lambda_2(t - T - \alpha T)\}V_1(T + \alpha T) \\ &\leq \beta^3 \exp\{\lambda_2(t - T - \alpha T) + (\lambda_1 + \lambda_2)(1 - \alpha)T - \lambda_1(T + \alpha T)\}V_1(0) \\ &= \beta^3 \exp\{-2(\lambda_1 + \lambda_2)\alpha T + \lambda_2 t\}V_1(0) \end{aligned}$$

由归纳法知

(e) 当 $t \in [kT, kT + \alpha T)$ 时,可得 $k \leq \frac{t}{T}$, 且

$$\begin{aligned} V_1(x) &\leq \beta^{2k} \exp\{k(\lambda_1 + \lambda_2)(1 - \alpha)T - \lambda_1 t\}V_1(0) \\ &\leq \exp\left\{[(\lambda_1 + \lambda_2)(1 - \alpha)T + 2\ln\beta]\frac{t}{T} - \lambda_1 t\right\}V_1(0) \\ &\leq \exp\left\{[(\lambda_1 + \lambda_2)(1 - \alpha) + \frac{2}{T}\ln\beta]t\right\}V_1(0) \\ &= \exp\left\{-\left[\alpha\lambda_1 - (1 - \alpha)\lambda_2 - \frac{2}{T}\ln\beta - \lambda_1\right]t\right\}V_1(0) \end{aligned}$$

(f) 当 $t \in [kT + \alpha T, (k+1)T)$ 时,可得 $k+1 \geq \frac{t}{T} \geq k$, 且

$$V_2(x) \leq \beta^{2k+1} \exp\{-(k+1)(\lambda_1 + \lambda_2)\alpha T + \lambda_2 t\}V_1(0)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \beta \exp \left\{ [-(\lambda_1 + \lambda_2)\alpha T + 2\ln \beta] \frac{t}{T} + \lambda_2 t \right\} V_1(0) \\
&\leq \beta \exp \left\{ - \left[(\lambda_1 + \lambda_2)\alpha - \frac{2}{T} \ln \beta - \lambda_2 \right] t \right\} V_1(0) \\
&= \beta \exp \left\{ - \left[\alpha \lambda_1 - (1-\alpha)\lambda_2 - \frac{2}{T} \ln \beta \right] t \right\} V_1(0)
\end{aligned}$$

从而,由(e)~(f)和条件①、条件④知,定理成立。

根据定理 2.2,如果选取二次李雅普诺夫函数 $V_i(x) = x^T P_i x (i=1,2)$,则下面的推论成立。

推论 2.1 假设存在对称正定矩阵 P_1 和 P_2 ,以及正常数 $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ 使得

$$\textcircled{1} \quad P_1(A_1 + 0.5\lambda_1 I) + (A_1 + 0.5\lambda_1 I)^T P_1 + \mu_1^{-1} P_1 B_1 B_1^T P_1 + \mu_1 L_1^2 \leq 0$$

$$\textcircled{2} \quad P_2(A_2 - 0.5\lambda_2 I) + (A_2 - 0.5\lambda_2 I)^T P_2 + \mu_2^{-1} P_2 B_2 B_2^T P_2 + \mu_2 L_2^2 \leq 0$$

$$\textcircled{3} \quad \epsilon = \alpha \lambda_1 - (1-\alpha)\lambda_2 - \frac{2}{T} \ln \beta > 0$$

式中, $\beta = \sup_{1 \leq i \neq j \leq 2} \frac{\lambda_{\max}(P_i)}{\lambda_{\min}(P_j)}$ 。则含有一个稳定子系统和一个不稳定子系统的时间切换系统式(2-6)的原点是全局指数稳定的。而且,系统的状态满足

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{\beta \lambda_{\max}(P_1)}{\lambda_{\min}(P_1)}} \|x_0\| \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\alpha \lambda_1 - (1-\alpha)\lambda_2 - \frac{2}{T} \ln \beta \right] t \right\}$$

证明:考虑二次李雅普诺夫函数 $V_i(x) = x^T P_i x (i=1,2)$ 。由于推论 2.1 中的条件③与定理 2.2 中条件④相同,所以只需证明定理 2.2 中的条件①~条件③成立。

当 $t \in [kT, kT + \alpha T)$ 时,由条件①和 Schur 余引理^[21]知, V_1 沿着第一个子系统的时间导数为

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(x) &= 2x^T P_1 [A_1 x(t) + B_1 f(x(t))] \\
&= x^T(t) [P_1 A_1 + A_1^T P_1] x(t) + 2x^T(t) P_1 B_1 f(x(t)) \\
&\leq x^T(t) [P_1 A_1 + A_1^T P_1] x(t) + \mu_1^{-1} x^T(t) P_1 B_1 B_1^T P_1 x(t) \\
&\quad + \mu_1 f^T(x(t)) f(x(t)) \\
&\leq x^T(t) [P_1 A_1 + A_1^T P_1 + \mu_1^{-1} P_1 B_1 B_1^T P_1] x(t) + \mu_1 x^T(t) L_1^2 x(t) \\
&= x^T(t) [P_1 A_1 + A_1^T P_1 + \mu_1^{-1} P_1 B_1 B_1^T P_1 + \mu_1 L_1^2] x(t) \\
&= -\lambda_1 V_1(x) + x^T(t) [P_1 A_1 + A_1^T P_1 + \mu_1^{-1} P_1 B_1 B_1^T P_1 + \mu_1 L_1^2 + \lambda_1 P_1] x(t) \\
&\leq -\lambda_1 V_1(x)
\end{aligned}$$

当 $t \in [kT + \alpha T, (k+1)T)$ 时,由条件②和 Schur 余引理^[21]知, V_2 沿着第二个子系统的时间导数为

$$\dot{V}_2(x) = 2x^T P_2 [A_2 x(t) + B_2 g(x(t))]$$

$$\begin{aligned}
&= x^T(t) [P_2 A_2 + A_2^T P_2] x(t) + 2x^T(t) P_2 B_2 g(x(t)) \\
&\leq x^T(t) [P_2 A_2 + A_2^T P_2] x(t) + \mu_2^{-1} x^T(t) P_2 B_2 B_2^T P_2 x(t) \\
&\quad + \mu_2 g^T(x(t)) g(x(t)) \\
&\leq x^T(t) [P_2 A_2 + A_2^T P_2 + \mu_2^{-1} P_2 B_2 B_2^T P_2] x(t) + \mu_2 x^T(t) L_2^2 x(t) \\
&= x^T(t) [P_2 A_2 + A_2^T P_2 + \mu_2^{-1} P_2 B_2 B_2^T P_2 + \mu_2 L_2^2] x(t) \\
&= \lambda_2 V_2(x) + x^T(t) [P_2 A_2 + A_2^T P_2 + \mu_2^{-1} P_2 B_2 B_2^T P_2 + \mu_2 L_2^2 - \lambda_2 P_2] x(t) \\
&\leq \lambda_2 V_2(x)
\end{aligned}$$

由此可知,定理 2.2 中的条件①和条件②成立。另一方面, β 的定义隐含着 $V_i(x) \leq \beta V_j(x)$, 即定理 2.2 中的条件③成立。因此,根据定理 2.2,该推论成立。

注 2.3 如果 $\alpha\lambda_1 - (1-\alpha)\lambda_2 > 0$, 则当切换周期足够大时定理 2.2 中的条件④和推论 2.1 中的条件③总是成立。这与前面提过的只有第一个系统的极端情况一致。

注 2.4 可以根据推论中的条件③估计出切换周期 T 和切换率 α 组成的二元组的取值区域 Ω 以确保当 $(\alpha, T) \in \Omega$ 时系统是全局指数稳定的。求解区域 Ω 步骤如下。

第 1 步:由条件①求出 λ_1 的最大值及相应的 P_1 。条件①等价于关于 P_1 和 μ_1 的线性矩阵不等式(LMI)^[22]

$$\begin{bmatrix} P_1 A_1 + A_1^T P_1 + \lambda_1 P_1 + \mu_1 L_1^2 & -P_1 B_1 \\ -B_1^T P_1 & -\mu_1 I \end{bmatrix} \leq 0$$

由此,第 1 步就转化成了求解如下优化问题

$$\begin{cases} \max \lambda_1 \\ \text{s. t.} \\ \begin{bmatrix} P_1 A_1 + A_1^T P_1 + \lambda_1 P_1 + \mu_1 L_1^2 & -P_1 B_1 \\ -B_1^T P_1 & -\mu_1 I \end{bmatrix} \leq 0 \end{cases}$$

第 2 步:由条件②求出 λ_2 的最小值及相应的 P_2 。类似于第 1 步,问题转化成求解含有 LMI 的优化问题

$$\begin{cases} \min \lambda_2 \\ \text{s. t.} \\ \begin{bmatrix} P_2 A_2 + A_2^T P_2 + \mu_2 L_2^2 - \lambda_2 P_2 & -P_2 B_2 \\ -B_2^T P_2 & -\mu_2 I \end{bmatrix} \leq 0 \end{cases}$$

第 3 步:利用上两步求出的 λ_1 和 λ_2 , 估计 (α, T) 的取值范围

$$\Omega = \left\{ (\alpha, T) : \alpha\lambda_1 - (1-\alpha)\lambda_2 > 0 \text{ and } T > \frac{2\ln\beta}{\alpha\lambda_1 - (1-\alpha)\lambda_2} \right\}$$

定理 2.2 中用两个不同的李雅普诺夫函数给出了系统指数稳定性的一个充

分条件,显然,如果对两个子系统采用同一个李雅普诺夫函数,可以得到如下更简单的稳定性条件。

定理 2.3 假设存在李雅普诺夫函数 $V:R^n \rightarrow R^+$, 单调连续增函数 $\gamma(\gamma(0)=0)$ 及常数 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \beta \geq 1$ 使得

$$\textcircled{1} \quad \gamma(\|x\|) \leq V(x)$$

$$\textcircled{2} \quad \text{对任意的 } k=0,1,2,\dots, \text{ 当 } t \in [kT, kT+\alpha T) \text{ 时, } \dot{V}(x) \leq -\lambda_1 V(x);$$

$$\text{当 } t \in [kT+\alpha T, (k+1)T) \text{ 时, } \dot{V}(x) \leq \lambda_2 V(x)$$

$$\textcircled{3} \quad \epsilon = \alpha\lambda_1 - (1-\alpha)\lambda_2 > 0$$

则对任意的切换周期 $T > 0$, 系统式(2-6)是全局指数稳定的。

类似于推论 2.1, 根据定理 2.3 有如下推论。

推论 2.2 假设存在对称正定矩阵 P 和正常数 $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ 使得

$$\textcircled{1} \quad P(A_1 + 0.5\lambda_1 I) + (A_1 + 0.5\lambda_1 I)^T P + \mu_1^{-1} P B_1 B_1^T P + \mu_1 L_1^2 \leq 0$$

$$\textcircled{2} \quad P(A_2 - 0.5\lambda_2 I) + (A_2 - 0.5\lambda_2 I)^T P + \mu_2^{-1} P B_2 B_2^T P + \mu_2 L_2^2 \leq 0$$

$$\textcircled{3} \quad \epsilon = \alpha\lambda_1 - (1-\alpha)\lambda_2 > 0$$

则对任意的切换周期 $T > 0$, 系统式(2-6)是全局指数稳定的。并且

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|x_0\| \exp\left\{-\frac{1}{2}[\alpha\lambda_1 - (1-\alpha)\lambda_2]t\right\}$$

根据线性化系统式(2-7)和定理 2.3, 还可以得到更简单的充分条件。

推论 2.3 假设存在对称正定矩阵 P 和正常数 $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ 使得

$$\textcircled{1} \quad PC_1 + C_1^T P + \mu_1^{-1} P E_1 E_1^T P + \mu_1 F_1^T F_1 + \lambda_1 P \leq 0$$

$$\textcircled{2} \quad PC_2 + C_2^T P + \mu_2^{-1} P E_2 E_2^T P + \mu_2 F_2^T F_2 - \lambda_2 P \leq 0$$

则对任意的切换周期 $T > 0$, 如果 $1 > \alpha > \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, 那么时间切换系统式(2-6)的原点是全局指数稳定的。

注 2.5 在推论 2.2 和推论 2.3 中, 条件①用于确保第一个子系统是全局指数稳定的, 即满足第一个子系统指数稳定的假设; 而条件②隐含了第二个子系统可能是发散的, 并给出了发散速度的上限, 符合第二个子系统不稳定的要求。

注 2.6 利用推论 2.3 判断系统的稳定性时, 算法步骤如下。

第 1 步: 利用凸优化算法, 由推论 2.2 或推论 2.3 中的条件①求出 λ_1 的最大值及相应的 P 。

第 2 步: 利用凸优化算法, 由推论 2.2 或推论 2.3 中的条件②求出 λ_2 的最小值。注意, 矩阵 P 已由第 1 步求出。

第 3 步: 计算 α 的下界 $\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$ 。那么对任意的 $T > 0$, 只要 $1 > \alpha > \lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$, 时间切换系统式(2-6)的原点就是全局指数稳定的。

2.5 稳定性分析:类型Ⅲ

本节讨论时间切换系统式(2-6)具有两个稳定子系统的情况。首先研究线性子系统的稳定性问题,然后将研究结果推广到非线性子系统的情况。

2.5.1 线性系统的稳定性

考虑下述系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_1 x(t), & kT \leq t < kT + \alpha T \\ \dot{x}(t) = A_2 x(t), & kT + \alpha T \leq t < (k+1)T \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2-12)$$

式中, $x \in R^n$ 表示系统状态向量; $A_i = (a_{kl}^{(i)}) \in R^{n \times n}$ ($i=1,2$) 是 Hurwitz 矩阵(即所有特征值的实部都是负的)。因此,两个子系统都是全局指数稳定的。

对系统式(2-12),首先给出如下结果。

定理 2.4 如果存在一个对称正定矩阵使得

$$PA_1 + A_1^T P < 0$$

$$PA_2 + A_2^T P < 0$$

则系统式(2-12)对任意的切换都是全局指数稳定的。

证明:考虑李雅普诺夫函数

$$V(x) = x^T P x$$

沿着系统式(2-12)的时间轨迹分段积分 $V(x)$ 可得

$$V(x(t)) \leq K x_0^T P x_0 \exp\{-[\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2]t\} \quad (2-13)$$

式中, $K = \exp\{\alpha(1-\alpha)\lambda_2 T\}$; λ_i 是满足 $PA_i + A_i^T P + \lambda_i P < 0$ 的正常数。对任意的 $0 < \alpha < 1$, 有 $\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2 > 0$ 。定理得证。

定理 2.5 令

$$\lambda_i = \sup_{P=P^T>0} \{\lambda: PA_i + A_i^T P + \lambda P < 0, \lambda > 0\}$$

$$P_i = \arg(\sup_{P=P^T>0} \{\lambda: PA_i + A_i^T P + \lambda P < 0, \lambda > 0\}), \quad i=1,2$$

如果切换周期 T 满足

$$T > \frac{2\ln\beta}{\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2}$$

式中, $\beta = \max_{1 \leq i \neq j \leq 2} \left\{ \frac{\lambda_{\max}(P_i)}{\lambda_{\min}(P_j)} \right\}$ 。则系统式(2-12)是以切换周期为 T 全局指数稳定的。

证明:考虑如下两个李雅普诺夫函数

$$\begin{aligned} V_1(x) &= x^T P_1 x, \quad t \in [kT, kT + \alpha T) \\ V_2(x) &= x^T P_2 x, \quad t \in [kT + \alpha T, (k+1)T) \end{aligned}$$

显然

$$\begin{aligned} P_i A_i + A_i^T P_i + \lambda_i P_i &\leq 0 \\ \dot{V}_i(x) &\leq -\lambda_i V_i(x) \end{aligned}$$

因此

(a) 对任意的 $t \in [kT, kT + \alpha T)$

$$V(x) \leq V_1(0) \exp \left\{ - \left[\alpha \lambda_1 + (1-\alpha) \lambda_2 - \frac{2 \ln \beta}{T} \right] kT \right\}$$

(b) 对任意的 $t \in [kT + \alpha T, (k+1)T)$

$$V(x) \leq \beta \exp \{ -\alpha \lambda_1 T \} V_1(0) \exp \left\{ - \left[\alpha \lambda_1 + (1-\alpha) \lambda_2 - \frac{2 \ln \beta}{T} \right] kT \right\}$$

如果

$$\alpha \lambda_1 + (1-\alpha) \lambda_2 - \frac{2 \ln \beta}{T} > 0$$

即

$$T > \frac{2 \ln \beta}{\alpha \lambda_1 + (1-\alpha) \lambda_2}$$

则系统式(2-12)是全局指数稳定的。定理得证。

2.5.2 非线性系统的稳定性

再来考虑非线性时间切换系统式(2-6)及相应的“线性化”系统式(2-7)。本节假设系统式(2-7)中的两个子系统都是鲁棒 Hurwitz 稳定的。类似于定理 2.4 和定理 2.5, 得到如下定理。

定理 2.6 如果下面的两个条件中至少有一个成立

① 存在对称正定矩阵 P 使得, 对任意的 $\Sigma_i \in \Sigma^*$, 有

$$P(C_i + E_i \Sigma_i F_i) + (C_i + E_i \Sigma_i F_i)^T P < 0, \quad i = 1, 2$$

② 切换周期 T 满足

$$T > \frac{2 \ln \beta}{\alpha \lambda_1 + (1-\alpha) \lambda_2}$$

式中

$$\beta = \max_{1 \leq i \neq j \leq 2} \left\{ \frac{\lambda_{\max}(P_i)}{\lambda_{\min}(P_j)} \right\}$$

$$\lambda_i = \sup_{\substack{P = P^T > 0 \\ \Sigma_i \in \Sigma^*}} \{ \lambda : P(C_i + E_i \Sigma_i F_i) + (C_i + E_i \Sigma_i F_i)^T P + \lambda P < 0, \lambda > 0 \}$$

$$P_i = \arg(\sup_{\substack{P=P^T>0 \\ \Sigma_i \in \Sigma^*}} \{\lambda: P(C_i + E_i \Sigma_i F_i) + (C_i + E_i \Sigma_i F_i)^T P + \lambda P < 0, \lambda > 0\})$$

则系统式(2-6)的原点是全局指数稳定的。

对任意的 $\mu_i > 0$

$$P(C_i + E_i \Sigma_i F_i) + (C_i + E_i \Sigma_i F_i)^T P \leq PC_i + C_i^T P + \mu_i^{-1} P E_i E_i^T P + \mu_i F_i^T F_i$$

所以,根据定理 2.6,得到以下推论。

推论 2.4 如果下面任一个条件成立,则切换系统式(2-6)的原点是全局指数稳定的。

① 存在对称正定矩阵 P 和正常数 μ_i 使得

$$PC_i + C_i^T P + \mu_i^{-1} P E_i E_i^T P + \mu_i F_i^T F_i < 0, \quad i=1,2$$

② 存在对称正定矩阵 P_i 和正常数 λ_i 使得

$$\lambda_i = \sup_{\substack{P=P^T>0 \\ \mu_i>0}} \{\lambda: PC_i + C_i^T P + \mu_i^{-1} P E_i E_i^T P + \mu_i F_i^T F_i + \lambda P < 0, \lambda > 0\}$$

$$P_i = \arg(\sup_{\substack{P=P^T>0 \\ \mu_i>0}} \{\lambda: PC_i + C_i^T P + \mu_i^{-1} P E_i E_i^T P + \mu_i F_i^T F_i + \lambda P < 0, \lambda > 0\})$$

并且满足

$$T > \frac{2 \ln \beta}{\alpha \lambda_1 + (1-\alpha) \lambda_2}$$

式中

$$\beta = \max_{1 \leq i \neq j \leq 2} \left\{ \frac{\lambda_{\max}(P_i)}{\lambda_{\min}(P_j)} \right\}$$

2.6 应用于间歇控制

本节研究传统意义上的间歇控制,其具有如下形式的控制律

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & t \in [t_k, t_k + \tau) \\ 0, & t \in [t_k + \tau, t_{k+1}) \end{cases} \quad (2-14)$$

考虑非线性控制系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bf(x(t)) + u(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2-15)$$

式中, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$ 表示状态向量; $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$, $B = (b_{ij}) \in R^{n \times n}$ 和 $C = (c_{ij}) \in R^{m \times n}$ 是常矩阵; $y(t)$ 表示系统输出; $u(t)$ 是形如式(2-14)的外部输入。非线性连续函数 $f(x) = [f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)]^T: R^n \rightarrow R^n$ 满足 $f(0) = 0$ 且满足如下利普希茨条件