

# 前 言

传统上, 主要把以模糊集理论为基础的各种数学理论统称作模糊数学, 再宽泛一点, 也可称作非经典数学, 其应用技术常称作模糊技术. 模糊数学发展到今天, 不仅本身已经成为一棵参天大树, 而且也逐步地渗透到现代科学技术的各个领域, 从而产生了许多有广泛发展前景的模糊技术. 可以肯定地说, 模糊数学及其应用技术的快速发展是创立者无法预料的. 目前, 国内外从事模糊数学以及研究工作与模糊数学有关的学者和科研人员数不胜数, 学术期刊不下几十种, 特别地, 大量的经典数学学术期刊也纷纷开始接受有模糊数学背景的学术论文.

如上所述, 模糊数学及其应用技术可谓枝繁叶茂. 但毋庸置疑, 模糊集 (又称  $L$ -集, 或格值集) 理论是学习和掌握模糊数学及其应用技术的核心所在, 同时也为数学家和数学爱好者理解和研究现代数学提供了新的集合论基础. 近十年来, 作为模糊数学理论基础的模糊集理论呈现若干新的特征, 主要表现在多值序结构的介入和多值逻辑推理的充分使用, 而论述这些新特征, 伽罗瓦联络 (Galois correspondence) 是十分有效的工具. 同时, 正是由于这些新特征的出现以及论述方法对新工具的需求, 使得模糊集理论越来越从模糊数学的传统内容独立出来. 如果有一部能专门论述模糊集理论并且能反映上述新特征的简明著作, 那么对于以模糊数学及其应用技术为基础的广大师生和研究人员来说非常有帮助. 本书正是希望在这个方向做一个有益尝试.

剩余格上具有序结构、丰富的运算及其伴随的蕴涵运算, 特别适合担任多值逻辑推理真值格的角色. 模糊集的引入本质上是为客观世界中具有不确定性的概念以及概念之间的推理提供模型, 这时的概念及其产生的推理也需要真假的判断, 只不过判断不是传统的二值 (分别表示真或假) 而是呈多值化的特点. 因此, 借用王国俊教授专著《数理逻辑引论与归结原理》前言中的形象比喻, 剩余格恰恰可以理解为不确定性的概念以及概念之间推理真假的“打分表”. 事实上, 仅就剩余格担任“打分表”这一角色而言, 还有更一般意义的打分表, 如交换的单位 quantale 或非交换的单位 quantale. 但我们认为剩余格是基本的而且是有代表性的一个. 按现代模糊集理论的观点, 具有序结构、丰富的运算及其蕴涵运算的“打分表”与论述模糊集理论 (包括用其描述概念和解决问题) 已经成为一个不可区分的整体, 这也正是本书书名“剩余格与模糊集”产生的根据所在.

在模糊数学半个多世纪的发展历程中, 国内外出现很多反映模糊数学及其应用技术的优秀书籍. 这些著作有的是全面反映模糊数学理论的基本内容及其应用方

法,如出版较早的:汪培庄的《模糊集合论及其应用》,张文修、刘旺金、王国俊和方锦暄合著的《模糊数学引论》,罗承忠编著的《模糊集引论》,刘普寅和吴孟达编著的《模糊理论及其应用》等<sup>[16-19,21-22,24]</sup>;出版较晚的:R. Bělohlávek 的著作 *Fuzzy Relation Systems*<sup>[2]</sup>,陈水利、李敬功和王向公编著的《模糊集理论及其应用》<sup>[27]</sup>,梁保松和曹殿立主编的《模糊数学及其应用》<sup>[30]</sup>等.有的是反映模糊数学理论在专门研究领域应用的学术著作,如汪培庄、韩立岩合著的《应用模糊数学》,王国俊的专著《 $L$ -Fuzzy 拓扑空间论》,何新贵的专著《模糊知识处理的理论与技术》(第二版),范周田的著作《模糊矩阵理论与应用》,姚炳学的著作《群与环上的模糊理论》,徐泽水的著作《直觉模糊信息集成理论及应用》和哈明虎、杨兰珍和吴从炘合著的《广义模糊集值测度引论》等<sup>[12,20,23,25,28,31,32,34]</sup>.但我们认为,上述著作中还没有一部是集中关注模糊集理论本身又反映多值序结构介入和逻辑推理多值化这些特点的书籍.事实上,由于上述反映模糊数学理论的基本内容及其应用方法的著作多以全面系统见长,除了在著作中安排传统的模糊数学内容,如模糊数、模糊图、模糊关系与模糊关系方程、模糊矩阵、模糊聚类分析、模糊逻辑系统、模糊测度理论、模糊模式识别、模糊综合评判、模糊决策与模糊预测、模糊极值与模糊规划、模糊概率与模糊统计、模糊推理与模糊控制、模糊神经网络等,还要安排模糊数学在若干领域的新进展和技术应用,因此多数作者不得不在论述模糊集基本理论时有所兼顾和取舍,同时著作的内容很难做到简明.此外,上述谈及的反映模糊数学理论在专门研究领域应用的学术著作也不方便专门论述模糊集理论本身的内容.由此可以看出,出版一部集中关注模糊集理论本身又反映多值序结构介入和逻辑推理多值化这些特点的书籍是十分必要的.

作者近十年的科学研究工作集中在格上拓扑与非经典推理领域,而序集理论、剩余格理论和模糊集理论是重要的研究基础.在讲授涉及这些理论的课程时,有以下体会:(1)序结构对理解模糊集的本质至关重要,这也是为什么现代模糊集理论需要序结构特别是多值序结构大量参与的本质原因.序结构是与拓扑结构、代数结构比肩的三大数学结构之一.目前国内外本科教学中,序结构的知识较为缺乏.因此,本书的重要特点是集中介绍了序集、格的完整内容,从而可以实现从序结构的观点描述和展开模糊集理论内容的宗旨.(2)模糊集理论创立的早期曾遭到诸多质疑,很重要的原因是其缺乏合适的逻辑基础作为支撑,这也是现代模糊集理论表现为逻辑结构介入和多值逻辑推理大量出现的原因所在.通俗地说,Heyting 代数、完全分配格、剩余格以及三角模恰是多值逻辑结构和多值逻辑推理的载体.为此,本书专门用一些章节介绍这些所谓的多值逻辑结构和多值逻辑推理之载体的各种格,从而达到从格值逻辑的观点论述模糊集基本理论和基本方法的目的.(3)从范畴论的伴随函子理论之观点讲,格值逻辑推理结构存在的本质原因是逻辑背景格中伽罗瓦联络现象的存在.在这个观点下,本书在介绍具有逻辑背景的格(包括

Heyting 代数、完全分配格、剩余格以及三角模等) 和模糊集基本理论时, 尽可能采用了伽罗瓦联络这一新工具, 这种论述内容的方法在已出版的模糊集理论及其应用方面的书籍中是很少见的. (4) 对模糊集理论本身的概念和结果而言, 它们被引入和发现的本质原因需要得到格值逻辑的解释, 这也是理性认识和应用模糊集理论的前提. 为此, 在本书的最后, 安排题为格值逻辑的一章, 意在用格值逻辑的语义理论和实例给出模糊集理论中典型概念和结果的多值逻辑解释, 这是本书的又一特点. 值得指出, 本书安排格值逻辑一章仅仅兼顾了模糊集的概念和结果得到格值逻辑解释这一宗旨, 希望全面了解数理逻辑和模糊逻辑的读者可研读专著 [11,33].

为了使读者通过较短时间的学习就能够掌握本书的内容, 除了尽量控制本书篇幅外, 在写作上力求注意以下几点: 第一, 内容论述做到自给自足; 第二, 取材侧重基本概念和实例、基本理论和基本方法, 尽量做到去叶存枝, 保证基本; 第三, 结合模糊集理论新的发展特点和目前国内本科教学内容中缺乏序集理论和格理论的现状, 利用第 1 章介绍序集理论和格理论的基本知识, 同时, 为了给第 4 章介绍的剩余格理论增加可接受性, 第 2、3 章介绍了有较好分配性和逻辑推理算子的各种格, 如 Heyting 代数、完全分配格; 第四, 为了使读者在阅读完第 5、6、7 章关于模糊集理论的内容后, 能够反思模糊集在描述概念中格值逻辑本质, 我们在第 8 章中介绍了一阶格值逻辑的实用部分 (包括句法和语义), 内容的安排体现了简明实用的目的. 最后, 作者借此机会感谢山东省自然科学基金 (ZR2011AQ010) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (201213010) 对本书出版的资助.

本书大部分内容取材于中国海洋大学 2004、2006 级应用数学专业和 2008、2010 级基础数学专业研究生模糊数学基础课程的教学内容. 同学们的积极参与为本书内容的形成提供了有力支持, 他们因受益于本书部分内容而在学问上取得的进步给笔者带来了鼓舞和鞭策, 特别是罗晓丽、郭远梅、韩元良、庞斌、韩慧、吴文超、陈芳芳等同学分别参与了部分内容的文字打印和部分内容的校对工作, 在此一并致谢.

由于学识和水平有限, 不当之处在所难免, 望读者不吝赐教.

方进明

2010 年 8 月 29 日

于青岛鲁信长春花园



# 目 录

## 前言

|       |                   |    |
|-------|-------------------|----|
| 第 1 章 | 序与格               | 1  |
| 1.1   | 序集                | 1  |
| 1.2   | 序集之间的运算           | 5  |
| 1.2.1 | 和                 | 5  |
| 1.2.2 | 乘积                | 5  |
| 1.2.3 | 对偶偏序集             | 6  |
| 1.3   | 保序映射              | 7  |
| 1.4   | 格与格同态             | 8  |
| 1.5   | 分配格、布尔代数及完备格      | 14 |
| 1.5.1 | 分配格               | 15 |
| 1.5.2 | 布尔代数              | 16 |
| 1.5.3 | 完备格               | 18 |
| 1.6   | 理想与滤子             | 22 |
| 1.6.1 | 上集和下集             | 22 |
| 1.6.2 | 理想与滤子             | 25 |
| 1.6.3 | 素理想与素滤子           | 26 |
| 1.6.4 | 分配格表示定理           | 30 |
| 1.7   | 素元与余素元            | 31 |
| 第 2 章 | 伽罗瓦联络与 Heyting 代数 | 35 |
| 2.1   | 伽罗瓦联络             | 36 |
| 2.1.1 | 伽罗瓦联络的概念和例子       | 36 |
| 2.1.2 | 伽罗瓦联络的性质          | 38 |
| 2.1.3 | 闭包算子与伽罗瓦联络的关系     | 42 |
| 2.2   | Heyting 代数        | 42 |
| 2.2.1 | Heyting 代数的引入     | 43 |
| 2.2.2 | 代数学风格的刻画          | 45 |
| 2.2.3 | Heyting 代数中的否定    | 46 |
| 2.2.4 | Heyting 代数的分配性    | 49 |

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| 第 3 章 完全分配格              | 52  |
| 3.1 完全分配格的概念和例子          | 52  |
| 3.2 完全分配格的构造性质           | 57  |
| 3.3 完全分配格的伽罗瓦联络描述        | 59  |
| 第 4 章 剩余格                | 62  |
| 4.1 剩余格的引入               | 62  |
| 4.1.1 剩余格的定义和例子          | 62  |
| 4.1.2 三角模                | 66  |
| 4.1.3 特殊的剩余格             | 71  |
| 4.2 剩余格的性质               | 73  |
| 4.2.1 剩余格的基本性质           | 73  |
| 4.2.2 剩余格上的伽罗瓦联络         | 79  |
| 4.2.3 否定运算和双剩余运算的性质      | 80  |
| 4.3 若干特殊剩余格的刻画条件和性质      | 83  |
| 4.3.1 预线性剩余格的性质          | 83  |
| 4.3.2 可除剩余格的性质           | 87  |
| 4.3.3 否定对合剩余格的性质         | 90  |
| 第 5 章 模糊集                | 94  |
| 5.1 模糊集的定义和运算            | 94  |
| 5.1.1 概念和例子              | 94  |
| 5.1.2 格值幂集上的序和运算         | 97  |
| 5.2 $L$ -包含关系和 $L$ -相等关系 | 100 |
| 5.2.1 $L$ -包含关系          | 100 |
| 5.2.2 $L$ -相等关系          | 102 |
| 5.3 $L$ -子集的分解定理         | 105 |
| 5.3.1 截集                 | 106 |
| 5.3.2 $L$ -子集的分解定理       | 107 |
| 5.4 $L$ -子集的表现定理         | 109 |
| 5.4.1 表现定理 I             | 109 |
| 5.4.2 表现定理 II            | 111 |
| 5.4.3 表现定理 III、IV        | 113 |
| 5.5 几何表现定理               | 115 |
| 5.5.1 几何表现定理 I           | 116 |
| 5.5.2 几何表现定理 II          | 117 |

|                                         |     |
|-----------------------------------------|-----|
| 第 6 章 一般论域上的 $L$ -等价关系和 $L$ -相等关系 ..... | 119 |
| 6.1 概念和例子 .....                         | 119 |
| 6.2 相容性问题 .....                         | 122 |
| 6.2.1 $L$ -子集的相容性 .....                 | 122 |
| 6.2.2 $L$ -集合套的相容性 .....                | 125 |
| 第 7 章 扩张原理 .....                        | 128 |
| 7.1 经典扩张原理 .....                        | 128 |
| 7.2 查德扩张原理 .....                        | 129 |
| 7.3 广义扩张原理 .....                        | 134 |
| 7.4 $L$ -集合套的像和逆像 .....                 | 140 |
| 第 8 章 格值逻辑 .....                        | 143 |
| 8.1 句法 .....                            | 143 |
| 8.1.1 语言的引入 .....                       | 143 |
| 8.1.2 项与公式 .....                        | 144 |
| 8.1.3 替换 .....                          | 149 |
| 8.2 语义理论 .....                          | 151 |
| 8.2.1 语言的解释和例子 .....                    | 151 |
| 8.2.2 赋值 .....                          | 153 |
| 8.2.3 公式诱导的 $L$ -关系和项诱导的函数 .....        | 158 |
| 参考文献 .....                              | 162 |
| 索引 .....                                | 164 |



# 第1章 序 与 格

无论是通俗意义还是严格的数学意义, 序的概念都呈现出平凡中见伟大的特征. 平凡表现在其意义容易理解而又时时伴随着人们的思维过程; 伟大表现在其被尼古拉·布尔巴基 (Nicolas Bourbaki) 学派冠名为数学三大母结构 (代数结构、拓扑结构和序结构) 之一. 按传统的观点, 格是代数学的研究对象. 依笔者之见, 实际上它更是序的儿女, 换句话说, 由序出发引入格的概念更易理解. 本章从严格的数学意义上介绍序的概念和实例, 并以序的观点自然导入格理论. 第1章仅介绍序与格的基本理论, 写作中参考了著作 [3] 和 [26]. 格理论中较深入的内容 (如伽罗瓦联络、Heyting 代数、完全分配格和剩余格等) 将在后续几章单独展开.

## 1.1 序 集

设  $P$  是论域. 当需要考虑论域中对象之间相互比较的问题时, 数学中常用的方法是在论域  $P$  上赋予一种称之为序结构的二元关系, 并把赋予序结构的  $P$  称为序集. 对这种描述性的序集概念来说, 其意义过于宽泛. 本书所说的序集 (ordered set) 是偏序集和预序集的统称, 其准确的含义可见如下定义.

**定义 1.1.1** 设  $P$  是非空集,  $\leq$  是  $P$  上的二元关系. 若  $P$  中任意元  $x, y, z$  满足:

(Re)  $x \leq x$  成立 (自反性, reflexivity),

(An)  $(x \leq y, y \leq x) \Rightarrow x = y$  成立 (反对称性, antisymmetry),

(Tr)  $(x \leq y, y \leq z) \Rightarrow x \leq z$  成立 (传递性, transitivity),

则称  $\leq$  是论域  $P$  上的偏序 (partial order) 或偏序结构, 序对  $(P, \leq)$  称作是偏序集 (partially ordered set, 或 poset). 若  $\leq$  作为  $P$  上的二元关系仅满足自反性和传递性, 则关系  $\leq$  称作是预序 (quasi-order) 或预序结构, 此时序对  $(P, \leq)$  称为预序集. ■

依传统, 偏序和预序统称作序关系, 偏序结构和预序结构常别称为序结构. 显然, 定义 1.1.1 中  $x \leq y$  是  $(x, y) \in \leq$  的简单记法. 一般情况下,  $x \leq y$  和  $y \geq x$  是具有相同意义的不同记法, 而  $x \not\leq y$  和  $y \not\geq x$  均指  $(x, y) \notin \leq$  的意义. 在序结构  $\leq$  的

意义特别明确或不需指出时,  $(P, \leq)$  也简记作  $P$ . 我们用  $x < y$  表示  $x \leq y$  但  $x \neq y$ . 偏序集中有些特别的类型值得特别说明:

若  $P$  是偏序集,  $P$  还满足对任意元  $x, y \in P$  时, 均有  $x \leq y$  或  $y \leq x$ , 等价地说,  $P$  中任意两个元都可以比较, 这时也称偏序集  $P$  是**链**(chain), 有时又称其为**线性序集** (linearly ordered set) 或**全序集** (totally ordered set). 和链形成鲜明对照的概念是**反链** (antichain). 所谓反链是序结构满足下列条件的偏序集:

$$(\text{Anc}) \quad \forall x, y \in P, \quad x \leq y \Rightarrow x = y \text{ 成立.}$$

为了使读者更具体理解偏序结构和预序结构是大量存在的, 下面介绍若干偏序集和预序集的实例作为支撑.

**例 1.1.1** 若  $(P, \leq)$  是偏序集且  $S \subseteq P$ , 则  $S$  关于偏序结构  $\leq$  在  $S \times S$  上的限制也是偏序集. 习惯上,  $\leq$  在  $S \times S$  上的限制仍记作  $\leq$ . 实数集  $\mathbb{R}$ 、自然数集  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ 、整数集  $\mathbb{Z}$  及有理数集  $\mathbb{Q}$  关于相应数的自然序关系都是偏序集的例子. 事实上, 它们都是链.  $\mathbb{N}$  上还有序关系  $\leq$  使得  $(\mathbb{N}, \leq)$  是偏序集而不是链, 其中此时序结构  $\leq$  的意义如下:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad m \leq n \text{ 当且仅当存在 } k \in \mathbb{N} \text{ 使得 } km = n. \quad \blacksquare$$

**例 1.1.2** (1) 设  $X$  是非空集合, **幂集**记作  $\mathcal{P}(X)$ , 即  $X$  的子集全体.  $\mathcal{P}(X)$  关于子集的包含关系  $\subseteq$  构成偏序集.

(2) 设  $X$  是非空集合,  $P = \{\{x\} | x \in X\}$ . 则  $(P, \subseteq)$  是一个反链的例子, 其中  $\subseteq$  是  $X$  的子集包含关系在  $P$  上的限制. 如在  $X$  上引入  $\leq$  如下: 对任意  $x, y \in X$ ,  $x \leq y \Leftrightarrow x = y$ , 则  $(X, \leq)$  是反链的另外例子, 其中如此定义的  $X$  上的偏序结构常称作是集合  $X$  的**离散序** (discrete order). 事实上, 读者已能意识到任何非空集合关于其上的离散序都是反链的例子, 正是由于这种理解, 读者能部分地感受到序结构意义的广泛性.  $\blacksquare$

**例 1.1.3** 设  $(X, \mathcal{T})$  是拓扑空间, 即  $X$  是非空集合,  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  满足:

(T1)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ ,

(T2)  $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$ ,

(T3)  $\forall j \in J, A_j \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}$ .

满足 (T1)、(T2) 和 (T3) 的子集族  $\mathcal{T}$  称作是  $X$  上的一个**拓扑**(topology).  $\mathcal{T}$  中的元称作是**开集**(open set), 当  $(X - D) \in \mathcal{T}$  时, 称  $D$  是**闭集**. 特别地, 若  $X$  的子

集  $E$  既是开集又是闭集, 则称  $E$  是开闭集(clopen set). 记指定拓扑空间中的全体闭集为  $\mathcal{T}_C$ , 开闭集全体记作  $\mathcal{T}_D$ . 则  $(\mathcal{T}, \subseteq)$ 、 $(\mathcal{T}_C, \subseteq)$  和  $(\mathcal{T}_D, \subseteq)$  都是偏序集, 其中  $\subseteq$  是  $X$  的子集的包含关系. ■

**例 1.1.4** 一般地, 谓词(predicate) 可以描述成一个可判断真假的陈述(statement). 用集合论语言恰当地说, 谓词是非空集合  $X$  到二元集  $\{T, F\}$  的映射. 记  $\mathbb{P}(X)$  为关于集合  $X$  的全体谓词, 并定义  $\mathbb{P}(X)$  上序关系 “ $\Rightarrow$ ” 如下:

$$\forall p, q \in \mathbb{P}(X), \quad p \Rightarrow q \text{ 当且仅当 } \{x \in X | p(x) = T\} \subseteq \{x \in X | q(x) = T\},$$

则  $(\mathbb{P}(X), \Rightarrow)$  是偏序集. 值得指出, 谓词是逻辑学和计算机科学中常用的基本概念. ■

**例 1.1.5** 设  $\leq$  是实数集  $\mathbb{R}$  上具有如下意义的二元关系:

$$\forall m, n \in \mathbb{R}, \quad m \leq n \Leftrightarrow (m - n) \in \mathbb{Z},$$

则  $(\mathbb{R}, \leq)$  是预序集而非偏序集. ■

最后, 需介绍的是偏序集中元之间的一种特殊关系. 设  $(P, \leq)$  是偏序集. 若对  $P$  中的元  $x, y$ , 当  $z \in P$  使得  $x \leq z < y$  时, 必有  $x = z$ , 等价地说对已知的  $x$  与  $y$ ,  $P$  中不存在  $z$  使得  $x < z < y$  成立, 则称  $y$  是  $x$  的覆盖, 或  $y$  覆盖  $x$ . 记作  $x < y$  或  $y > x$ . 因为对有限偏序集而言,  $x < y$  当且仅当存在有限个元  $x_0, x_1, \dots, x_n$  使得  $x = x_0 < x_1 < \dots < x_n = y$ , 所以元之间的覆盖关系对描述有限偏序集上的偏序关系十分重要. 偏序集中的元之间是否存在覆盖关系的实例如下:

△ 设  $P = \mathbb{N}$  是自然数集, 则对任意自然数  $m, n$ ,  $m < n$  当且仅当  $n = m + 1$ .

□ 设  $P = \mathbb{R}$  是实数集, 则对任意实数  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x < y$  都不成立.

◇ 设  $X$  是非空集合,  $P = \mathcal{P}(X)$ , 则对任意  $A, B \in P$  而言,  $A < B$  当且仅当存在  $b \in X - A$  使得  $B = A \cup \{b\}$ .

在偏序集中经常存在各种特殊的元, 它们在讨论问题时担任十分重要的角色, 详见如下的定义.

**定义 1.1.2** 设  $(P, \leq)$  是偏序集,  $a, b \in P$ . 若对  $P$  中每个元  $x$ , 都有  $x \leq a$  (对偶地,  $x \geq a$ ), 则称  $a$  是最大元(对偶地,  $a$  是最小元). 习惯上, 最大元和最小元存在时, 统一记作  $\top$  和  $\perp$ , 或  $1$  和  $0$ ; 若对  $P$  中每个元  $x$ , 总有  $b \leq x$  意味着  $b = x$  成立(对偶地,  $b \geq x$  意味着  $b = x$  成立), 则说  $b$  是极大元(对偶地,  $b$  是极小元). ■

对偏序集而言, 最大元和最小元并不总是存在. 例如在实数偏序集  $(\mathbb{R}, \leq)$  中, 两者都不存在; 而在自然数偏序集  $(\mathbb{N}, \leq)$  中, 有最小元  $1 = 0$ , 而无最大元. 幸运的是, 在幂集  $\mathcal{P}(X)$  中, 两者都存在且  $1 = \emptyset, \top = X$ . 当然, 无论两者谁存在必定是唯一的. 在偏序集中, 极大 (小) 元也不总是存在, 但对有限偏序集, 必有极大元和极小元是易证的结论. 最大 (小) 元与极大 (小) 元是意义不同的概念, 在链这种特殊的偏序集中, 两类概念取得一致.

利用偏序集上的偏序结构, 上 (下) 界和上 (下) 确界的概念可自然地引入.

**定义 1.1.3** 设  $(P, \leq)$  是偏序集,  $S \subseteq P$ , 且  $u, l \in P$ . 若对  $S$  中每个元素  $x$ , 总有  $x \leq u$  (对偶地,  $x \geq l$ ) 成立, 就称  $u$  (对偶地,  $l$ ) 是子集  $S$  的上界 (对偶地, 下界). ■

对已知偏序集的子集  $S$ , 其上界或下界未必存在, 即使存在也不一定唯一, 而且也不必属于  $S$ . 应该指出, 偏序集的子集有一种特殊意义的上界和下界 (见如下定义), 当它们存在时, 必是唯一的.

**定义 1.1.4** 设  $(P, \leq)$  是偏序集,  $S \subseteq P$  且  $S$  的上界之集记作  $S^u$ , 即

$$S^u = \{x \in P | (\forall s \in S) s \leq x\}.$$

若  $S^u$  中有最小元  $a$ , 即  $a$  满足  $\forall x \in S^u, x \geq a$ , 则  $a$  被称作是  $S$  的上确界 (least upper bound, 或 supremum), 记作  $a = \sup S$ , 或称作  $a$  是  $S$  的并, 记作  $a = \vee S$ . 等价地说, 若  $a \in P$  满足:

(sup1)  $a$  是  $S$  的上界,

(sup2)  $\forall y \in S^u, a \leq y$  成立,

则  $a$  是  $S$  的上确界或  $S$  的并. ■

关于上确界, 其特征性质可以陈述如下: 偏序集  $P$  的子集  $S$  有上确界当且仅当存在  $x \in P$  使得

$$(\forall y \in P) \quad \left( ((\forall s \in S) s \leq y) \iff (x \leq y) \right)$$

成立.

对偶地, 可以引入偏序集  $P$  的子集  $S$  的下确界, 记

$$S^l = \{x \in P | (\forall s \in S) s \geq x\}$$

是  $S$  的下界之集.  $S^l$  的最大元  $b$  存在时,  $b$  被称作  $S$  的下确界 (greatest lower bound, 或 infimum), 记作  $b = \inf S$ , 有时也说  $b$  是  $S$  的交, 记作  $b = \wedge S$ .

若  $S = \{a, b\}$  是偏序集  $P$  的二元子集有上确界和下确界, 则它们分别记作

$$\sup S = a \vee b \text{ 和 } \inf S = a \wedge b.$$

若  $S = \emptyset$  时,  $P$  中的每个元都是  $S$  的上界和下界. 因此  $\emptyset$  作为子集有没有上(下)确界取决于  $P$  是否有最小(大)元. 若  $P$  的最大元和最小元分别是  $\top$  和  $\perp$ , 则  $\sup \emptyset = \perp$  且  $\inf \emptyset = \top$ .

**引理 1.1.1** (关联引理, The Connecting Lemma) 设  $(P, \leq)$  是偏序集,  $a, b \in P$ , 且  $a \wedge b$  与  $a \vee b$  都存在. 则有下列诸条等价:

- (1)  $a = a \wedge b$ , (2)  $b = a \vee b$ , (3)  $a \leq b$ . ■

## 1.2 序集之间的运算

在研究序集时, 有两种从已知的序集合出发构造新的序集的方法. 这些方法构成了序集之间的基本运算.

### 1.2.1 和

本小节在陈述内容时经常假设涉及的序集合互不相交. 此处需明确的一点是: 假设参与运算的序集互不相交是非本质的. 事实上, 我们总是可以做出参与运算的序集的同构序集, 使得后者互不相交, 其中同构序集的概念将在 1.3 节中介绍.

设  $P$  和  $Q$  是 (互不相交的) 偏序集. 令  $R = P \cup Q$ , 定义  $R$  上的序关系  $\leq$  如下:

$$\forall x, y \in R, x \leq y \text{ 当且仅当 } x, y \in P \text{ 且 } x \leq y, \text{ 或 } x, y \in Q \text{ 且 } x \leq y.$$

一般地, 称  $(R, \leq)$  是  $P$  与  $Q$  的**不交和**, 经常记作  $P \dot{\cup} Q = R$ .

有时, 从已知的偏序集  $P$  与  $Q$  出发, 也可定义  $R = P \cup Q$  上的序关系  $\leq$  如下:

$$\forall x, y \in R, x \leq y \text{ 当且仅当 } x, y \in P \text{ 且 } x \leq y, \text{ 或 } x, y \in Q \text{ 且 } x \leq y, \text{ 或 } x \in P \text{ 且 } y \in Q,$$

这时, 称  $(R, \leq)$  是  $P$  与  $Q$  的**线性和**, 经常记  $R = P \oplus Q$ .

### 1.2.2 乘积

设  $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$  是偏序集. 令  $P = \prod_{i=1}^n P_i$  是集合  $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$  的有限笛卡儿乘积之集, 定义  $P$  上的序关系  $\leq$  如下:

$$\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in P, (x_1, \dots, x_n) \leq (y_1, \dots, y_n) \text{ 当且仅当 } \forall i \leq n, x_i \leq y_i.$$

序对  $(P, \leq)$  是偏序集, 称作是  $P_1, \dots, P_n$  的**乘积偏序集**, 或**乘积**,  $P$  上新定义的序常称作**积序**.  $n$  个偏序集  $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$  的乘积偏序集常简记作  $\prod_{i=1}^n P_i$ , 当  $P_1 = P_2 = \dots = P_n = P$  时, 也记作  $P^n$ . 两个偏序集  $P$  与  $Q$  的乘积记作  $P \times Q$ .

### 1.2.3 对偶偏序集

设  $P$  是偏序集, 定义新的偏序集  $P^\partial := (P, \leq^\partial)$  如下:  $P^\partial$  的论域与  $P$  相同, 偏序结构  $\leq^\partial$  意义如下:

$$\forall x, y \in P, \quad x \leq^\partial y \text{ 当且仅当 } y \leq x \text{ 成立.}$$

此时, 称偏序集  $P^\partial$  是  $P$  的**对偶偏序集**, 或简称**对偶**.

一般地, 当已知一个仅与偏序集  $P$  的偏序结构有关的命题  $\Phi$ , 则总可以得到一个关于  $P^\partial$  上序结构的命题  $\Phi^\partial$ , 并称命题  $\Phi^\partial$  是原命题  $\Phi$  的**对偶命题**.

例如, 设  $P = \{x, y, z, w, a, b\}$  是论域, 其上的偏序结构如下:

$$\leq = \{(x, y), (x, z), (x, w), (x, a), (y, w), (y, a), (z, w), (b, w)\} \cup \Delta_P,$$

此处  $\Delta_P = \{(t, t) | t \in P\}$ .  $P$  上的偏序结构  $\leq$  及其对偶  $\leq^\partial$  可用哈斯 (Hasse) 图表示为图 1.1 和图 1.2.

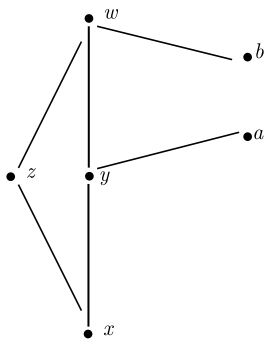


图 1.1 序结构  $\leq$  的图示

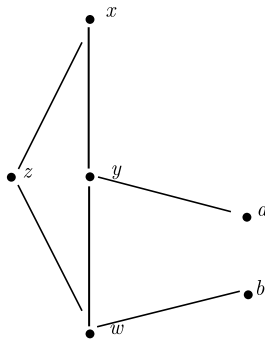


图 1.2 序结构  $\leq^\partial$  的图示

关于偏序集  $(P, \leq)$  有真命题

$\Phi$ : 存在唯一元  $w$  覆盖三个其他的元.

在对偶偏序集  $(P, \leq^\partial)$  中, 对偶命题也是真的, 具体如下:

$\Phi^\partial$ : 存在唯一元  $w$  被三个其他元覆盖.

一般地, 下列对偶原理成立.

**定理 1.2.1** (对偶原理) 设  $\Phi$  是关于偏序集上偏序结构的真命题, 则  $\Phi^{\theta}$  关于其对偶偏序集上偏序结构也是真命题. ■

## 1.3 保序映射

为了建立不同偏序集间的联系, 本节介绍保序映射 (序同态) 的概念. 此外, 序同构和保序映射的性质也一并在此节给出介绍.

**定义 1.3.1** 设  $P$  与  $Q$  是偏序集,  $\varphi: P \rightarrow Q$  是映射:

(1) 若对任意  $x, y \in P, x \leq y$  时, 总有  $\varphi(x) \leq \varphi(y)$  成立, 则称映射  $\varphi$  是保序的 (order-preserving) 或单调的 (monotone), 有时也称之为序同态.

(2) 若对任意  $x, y \in P, x \leq y$  在  $P$  中成立当且仅当  $\varphi(x) \leq \varphi(y)$  在  $Q$  中成立, 则称映射  $\varphi$  是序嵌入 (order-embedding), 记作  $P \hookrightarrow Q$ .

(3) 若  $\varphi$  是满的序嵌入, 则称  $\varphi$  是序同构 (order-isomorphism).

一般地, 若偏序集  $P$  和  $Q$  之间存在序同构, 则称  $P$  和  $Q$  是同构的 (isomorphic), 记作  $P \cong Q$ . ■

一般地, 若  $P$  和  $Q$  是偏序集, 则嵌入  $\varphi: P \rightarrow Q$  必是单射. 事实上, 借助自反性和反对称性可得: 对任意  $x, y \in P$ ,

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \varphi(y) &\Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y) \text{ 且 } \varphi(y) \leq \varphi(x) \\ &\Rightarrow x \leq y \text{ 且 } y \leq x \\ &\Rightarrow x = y.\end{aligned}$$

因此, 序同构必是双射. 值得注意的是双射而非序同构的例子是存在的, 例如令  $P = Q = 2 = \{0, 1\}$ , 定义  $\varphi(0) = 1, \varphi(1) = 0$ . 同时也应注意保序的双射也未必是序同构. 如  $P = \{a, b, \perp, \top\}$  使得  $\perp \leq a, b \leq \top$  且  $a \parallel b$  (其中,  $a \parallel b$  表示元  $a$  和  $b$  不可比较),  $Q = 4 = \{0, 1, 2, 3\}$  带有自然数序.  $\varphi(\perp) = 0, \varphi(\top) = 3, \varphi(a) = 1$  和  $\varphi(b) = 2$  时,  $\varphi$  是保序双射但非序同构.

**注 1.3.1** 下列结论是成立的:

(1) 保序映射的复合映射 (如有意义) 仍是保序映射.

(2) 设  $\varphi: P \hookrightarrow Q$  且  $\varphi(P) := \{\varphi(x) | x \in P\}$  是  $P$  在  $\varphi$  下的像, 则  $\varphi(P) \cong P$ .

(3) 偏序集  $P$  与  $Q$  同构当且仅当存在两个保序映射  $\varphi: P \rightarrow Q$  以及  $\psi: Q \rightarrow P$  使得  $\varphi \circ \psi = \text{id}_Q$  且  $\psi \circ \varphi = \text{id}_P$  (对给定的集合  $X$ ,  $\text{id}_X: X \rightarrow X$  的意义为  $\text{id}_X(x) = x (\forall x \in X)$ , 称作  $X$  上的恒同映射).

(4) 对任意偏序集  $P$ ,  $P$  上的恒同映射  $\text{id}_P: P \rightarrow P$  是序同态. ■

特别有意义的是, 到某偏序集上的映射全体关于所谓的点态序也提供了偏序集的例子. 设  $X$  是集合,  $Y$  是偏序集. 显然, 全体从  $X$  到  $Y$  的映射全体  $Y^X$  仍然是偏序集, 其上偏序关系是如下意义的点态序:

$$\forall f, g \in Y^X, f \leq g \iff \forall x \in X, f(x) \leq g(x).$$

特别地,  $X$  是  $n$  个元的有限集时,  $Y^X$  同构与  $Y^n, n := \{0, 1, \dots, n-1\}$ . 如果需要的话,  $Y^X$  任意子集  $Q$  关于点态序的限制都可以认为是偏序集. 假如进一步假设  $X$  是偏序集, 则从  $X$  到  $Y$  的全体保序映射之集关于点态序的限制也可以得到偏序集, 记作  $Y^{<X>}$ . 作为选择的记法,  $Y^X$  也常记作  $(X \rightarrow Y)$ , 而  $Y^{<X>}$  常记作  $<X, Y>$ . 特别是对有上 (下) 标记的对象以及出现高阶映射 (高阶映射常指以映射为变量的映射) 时, 后者更便于使用.

## 1.4 格与格同态

格是重要的代数学研究对象, 但它也是偏序结构的自然产物. 因此, 格概念的引入经常有两种典型的方式, 即代数学的方式和序结构的方式. 以笔者的认识, 序结构的方式更加简明. 本节将从偏序结构的角度引入格的概念, 然后介绍它的代数学的等价条件.

**定义 1.4.1** 设  $L$  是非空偏序集. 若对任意  $x, y \in L, x \vee y$  和  $x \wedge y$  总存在, 则称  $L$  是格. 有时为了明确起见, 格  $L$  经常记作三元对的形式  $(L; \wedge, \vee)$ . ■

**注 1.4.1** 在掌握格的概念时, 下列几点值得注意:

(1) 一般地, 在偏序集  $P$  中,  $\{x, y\} \subseteq P$  的上 (下) 确界未必存在.  
 (2) 设  $L$  是格. 对任意  $a \in L$ , 映射  $a \vee (-): L \rightarrow L$  和  $a \wedge (-): L \rightarrow L$  都是保序的. 因此, 对  $a, b, c, d \in L$ , 下列结论成立:

- ① 若  $a \leq b$ , 则  $a \vee c \leq b \vee c$  且  $a \wedge c \leq b \wedge c$ ;
- ② 若  $a \leq b$  且  $c \leq d$ , 则  $a \vee c \leq b \vee d$  且  $a \wedge c \leq b \wedge d$ ;
- (3) 若  $a \leq b$ , 则  $a \vee b = b$  且  $a \wedge b = a$ . 特别地,  $\forall c \in L, c \wedge c = c, c \vee c = c$ .

(4) 格的定义中, 任意二元集必有上(下)确界这一条件也可以等价地说对任意非空有限集的上(下)确界都存在.

(5) 由(3)知, 在具体判定偏序集是否是格时, 仅需考虑任意不可比较的两个元是否有上、下确界即可. ■

**例 1.4.1** 在通常的数学内容中, 格的例子有很多, 下面是一些常见的实例.

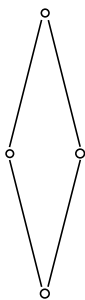
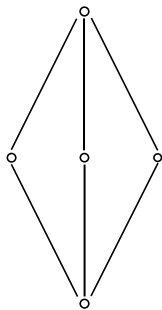
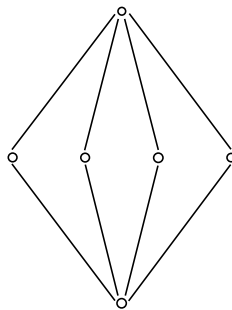
(1) 由注 1.4.1(3) 可知, 所有链都是格, 特别地,  $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$  和  $\mathbb{N}$  关于自然的数序都是格.

(2) 设  $X$  是非空集.  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$  是格, 常称之为**幂集格**. 显然,

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X), \quad A \vee B = A \cup B \text{ 且 } A \wedge B = A \cap B.$$

特别地, 设  $\mathcal{T}$  是  $X$  上的一个拓扑, 由例 1.1.3 知  $\mathcal{T}$  作为幂集  $\mathcal{P}(X)$  的子集是偏序集, 此时,  $(\mathcal{T}, \subseteq)$  也是格, 常称之为**拓扑结构格**. 一般地, 设  $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{P}(X)$ . 若  $S$  关于子集的非空有限交与并都封闭, 则  $S$  都是格, 常称作**集格**. 在集格  $(S, \subseteq)$  中, 对任意  $A, B \in S$ , 总有  $A \vee B = A \cup B$  且  $A \wedge B = A \cap B$ .

(3) 用下列哈斯 (Hasse) 图 1.3~ 图 1.6 表示的  $M_n (1 \leq n \leq 4)$  都是格的例子:

图 1.3  $M_1$ 图 1.4  $M_2$ 图 1.5  $M_3$ 图 1.6  $M_4$ 

(4) 考虑序集  $(\mathbb{N}, \leq)$ , 其中  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $m \leq n$  当且仅当有  $k \in \mathbb{N}$  使得  $mk = n$ . 任取  $m, n \in \mathbb{N}$ , 记  $m$  与  $n$  的最大公约数是  $\gcd\{m, n\}$  (greatest common divisor), 最小公倍数  $\text{lcm}\{m, n\}$  (least common multiple). 则  $(\mathbb{N}, \leq)$  是格, 其中

$$m \vee n = \text{lcm}\{m, n\} \text{ 且 } m \wedge n = \gcd\{m, n\}. \quad \blacksquare$$

从格的定义可见, 格是一种特殊类型的偏序集. 为了更好地理解格, 下文从另外的观点, 即代数学的观点来描述格.

设  $L$  是格, 则格上可以引入二元运算  $\vee : L \times L \rightarrow L$  和  $\wedge : L \times L \rightarrow L$ , 分别称作并和交, 即对  $a, b \in L$ , 规定

$$a \vee b := \sup\{a, b\}, \quad a \wedge b := \inf\{a, b\}.$$

注 1.4.1 告诉我们二元运算  $\vee$  和  $\wedge$  关于单个变元都是保序的, 这个性质部分地反映了格上运算和序结构的联系. 事实上, 对格而言, 反映格上运算和序结构的关联引理仍然成立, 总结如下:

**引理 1.4.1** (格序关联引理) 设  $L$  是格,  $a, b \in L$ . 则下列结论等价:

(1)  $a \leq b$ , (2)  $a \vee b = b$ , (3)  $a \wedge b = a$ . ■

为了具体用代数学的方式描述格, 需要先体会一下格上的运算满足什么本质条件. 读者不难验证下面定理谈及定律的正确性, 但接续的内容告诉我们这些形式上简单的定律恰恰给出了格的代数学刻画.

**定理 1.4.1** 设  $L$  是格. 则其上的交及并作为运算满足下列定律:

(1) 结合律 (associative laws):

(LA)  $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ ;

(LA) $^\partial$   $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ .

(2) 交换律 (commutative laws):

(LC)  $a \vee b = b \vee a$ ;

(LC) $^\partial$   $a \wedge b = b \wedge a$ .

(3) 幂等律 (idempotent laws):

(LI)  $a \vee a = a$ ;

(LI) $^\partial$   $a \wedge a = a$ .

(4) 吸收律 (absorption laws):

(LAB)  $a \vee (a \wedge b) = a$ ;

(LAB) $^\partial$   $a \wedge (a \vee b) = a$ . ■

下面的内容让我们体会到当论域上已知运算一旦满足若干等式时, 论域上的序结构也就可以被确定了. 显然, 这种方式与前面从论域上已知的偏序出发, 然后定义格的方式在思路上是相反的.

**定理 1.4.2** 设已知非空集  $L$  与其上的两个二元运算  $\vee$  和  $\wedge$ , 其中  $\vee$  和  $\wedge$  满足定理 1.4.1 中的结合律、交换律、幂等律和吸收律. 则有下列结论成立: